ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Τμημα $\mathbf{B}'$ (Μ-Ω)

Φυλλαδιο 9

Προτεινομενες Επαναληπτικες Ασκησεις

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html

Παρασκευή 19 Μαΐου 2023

Άσκηση 1. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Να δειχθεί ότι ορίζοντας

$$\langle\!\langle (x_1, x_2, x_3, (y_1, y_2, y_3) \rangle\!\rangle = {}^t X\, A\, Y, \quad \text{όπου} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

αποκτούμε ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$. *Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του Ευκείδειου χώρου* $(\mathbb{R}^3, \langle\!\langle\,,\,\rangle\!\rangle)$.

Άσκηση 2. *Θεωρούμε τον πίνακα πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) *Να διαγωνοποιηθεί ορθογώνια ο πίνακας* A.
(2) *Να δειχθεί ότι ο* A *είναι θετικός και να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του* A.
(3) *Ποιό είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του* A;
(4) *Να βρεθεί ο πίνακας* A^{-1} *συναρτήσει του* A *και του* I_4.

Άσκηση 3. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle\,,\,\rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και* $f, g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *αυτοπροσαρτημένοι ενδομορφισμοί του* $\mathcal{E}$. *Υποθέτουμε ότι:*

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{E} : \quad \langle f(\vec{x}), \vec{x}\,\rangle = \langle g(\vec{x}), \vec{x}\,\rangle$$

Να δειχθεί ότι $f = g$.

Έστω $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ *δύο συμμετρικοί πίνακες και υποθέτουμε ότι:*

$$\forall X \in \mathbb{R}_n : \quad \langle A\,X, X\,\rangle = \langle B\,X, X\,\rangle$$

Να δειχθεί ότι $A = B$.

Άσκηση 4. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle\, ,\, \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f, g \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ δύο αυτοπροσαρτημένοι ενδομορφισμοί του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι:*

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{E} : \quad \langle f(g(\vec{x})), \vec{x}\, \rangle = \langle g(f(\vec{x})), \vec{x}\, \rangle$$

Αν $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ είναι δύο συμμετρικοί πίνακες, να δειχθεί ότι:

$$\forall X \in \mathbb{R}_n : \quad \langle ABX, X\, \rangle = \langle BAX, X\, \rangle$$

Άσκηση 5. *Να δειχθεί ότι κάθε συμμετρικός πίνακας A βαθμίδας r είναι άθροισμα συμμετρικών πινάκων A_i, $1 \leq i \leq r$, βαθμίδας 1:*

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_r, \quad \mathbf{r}(A_i) = 1, \quad \leq i \leq r$$

Αν ο πίνακας A είναι μη-αρνητικός, τότε και οι πίμνακες A_i είναι μη-αρνητικοί.

Άσκηση 6. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle\, ,\, \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f, g \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ αυτοπροσαρτημένοι ενδομορφισμοί του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι ο ενδομορφισμός $f \circ g$ είναι αυτοπροσαρτημένος αν και μόνον αν $f \circ g = g \circ f$.*

Αν $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ είναι δύο συμμετρικοί πίνακες, να δειχθεί ότι: ο πίνακας $A\,B$ είναι συμμετρικός αν και μόνον αν $A\,B = B\,A$.

Άσκηση 7. *Να διαγωνοποιηθεί ορθογώνια ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Είναι ο πίνακας A θετικός ή μη-αρνητικός; Στην πρώτη περίπτωση να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζχα του A και στην δεύτερη περίπτωση να βρεθεί μια κυβική ρίζα του A. Τέλος να βρεθεί η n-οστή δύναμη του A.

Άσκηση 8. *Να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 4 \\ 14 & 24 & 18 \\ 4 & 18 & 29 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 9. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας P με ορίζουσα ιση με 1 έτσι ώστε ο πίνακας

$${}^tP\,A\,P$$

να είναι διαγώνιος. Ακολούθως να δειχθεί ότι ο ορθογώνιος πίνακας P γεωμετρικά παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) γύρω από άξονα (ε) ο οποίος είναι κάθετος στο (Π) κατά γωνία ϑ. Τέλος να βρεθεί το επιπέδο (Π), ο άξονας (ε), και η γωνία ϑ.

Άσκηση 10. *Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή*

$$\mathsf{q} \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathsf{q}(x, y, z) = 4x^2 + y^2 - 8z^2 + 4xy - 4xz + 8yz$$

(1) *Να βρεθεί ο πίνακας A της* q.
(2) *Να βρεθούν οι κύριοι άξονες της* q.

(3) *Να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας* P *έτσι ώστε ο πίνακας* ${}^tPAP$ *να είναι διαγώνιος.*
(4) *Να δειχθεί ότι ο ορθογώνιος πίνακας* P *γεωμετρικά παριστάνει στροφή επιπέδου* (Π) *γύρω από άξονα* (ε) *ο οποίος είναι κάθετος στο* (Π) *κατά γωνία* ϑ*, και ν;α βρεθεί το επιπέδο* (Π)*, ο άξονας* (ε)*, και η γωνία* ϑ*.*
(5) *Να προσδιορισθεί η δευτεροβάδμια επιφάνεια*

$$\mathcal{S} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathsf{q}(x,y,z) = 10\big\}$$

Άσκηση 11. *Να προσδιορισθεί το είδος της δευτεροβάδμιας επιφάνειας*

$$\mathcal{S} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = xz\big\}$$

Άσκηση 12. *Να προσδιορισθεί το είδος της δευτεροβάδμιας επιφάνειας*

$$\mathcal{S} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 - z^2 + 12xy - 4xz - 8yz + 14x + 16y - 12z - 3 = 0\big\}$$