ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

Προχειρη Δοκιμασια 1

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html

Παρασκευή 24 Φεβρουαρίου 2023

Πρόχειρη Δοκιμασία. *Θεωρούμε τους ακόλουθους υποχώρους του* $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \ \middle|\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \ \middle|\ x \in \mathbb{R} \right\}$$

(1) *Να εξετασθεί αν* $\mathsf{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$.

(2) *Αν* $\mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \neq \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, *να βρεθούν υπόχωροι* $\mathcal{U}$ *και* $\mathcal{Z}$ *του* $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ *έτσι ώστε:*

$$\mathsf{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}$$

(3) *Να βρεθεί ενδομορφισμός* $f\colon \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ *έτσι ώστε:*

$$f^2 = f \qquad \textit{και} \qquad \operatorname{Im}(f) = \mathcal{V}$$

(4) *Να βρεθεί μια βάση* $\mathcal{A}$ *του* $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ *έτσι ώστε:*

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Λύση. (1) Θα προσδιορίσουμε πρώτα βάσεις των $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$.

Επειδή

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \ \middle|\ x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

έπεται ότι το μονοσύνολο $\mathcal{D}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{W}$.

Για τον $\mathcal{V}$, θα έχουμε:

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \ \middle|\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \ \middle|\ x_2 = 2x_3 - x_4 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & 2x_3 - x_4 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \ \middle|\ x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2x_3 \\ x_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -x_4 \\ 0 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \ \middle|\ x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \ \middle|\ x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \right\rangle$$

Εύκολα βλέπουμε ότι το σύνολο πινάκων $\mathcal{C}_1 = \left\{ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \right\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί μια βάση του $\mathcal{V}$.

Παρατηρούμε ότι $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ διότι αν $\begin{pmatrix}x & x\\ x & x\end{pmatrix} \in \mathcal{W}$, τότε $\begin{pmatrix}x & x\\ x & x\end{pmatrix} \in \mathcal{V}$ διότι $x - 2x + x = 0$. Επομένως $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \mathcal{W} \neq \{O\}$ και επομένως το άθροισμα $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ δεν είναι ευθύ. Επιπλέον επειδή $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$, έπεται ότι $\mathcal{V} + \mathcal{W} = \mathcal{V}$ και επομένως $\mathcal{V} + \mathcal{W} = \mathcal{V} \neq \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ διότι $3 = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V} \neq 4 = \mathsf{dim}_2(\mathbb{R})$. Ιδιαίτερα προκύπτει ότι $\mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \neq \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$.

(2) Συμπληρώνουμε τη βάση $\mathcal{C}_1$ του $\mathcal{V}$ σε μια βάση $\mathcal{C}$ του $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$: Θεωρούμε τον πίνακα $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Επειδή ο πίνακας των συνιστωσών των διανυσμάτων του συνόλου

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \right\}$$

έχει μη-μηδενική ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{C}$ είναι μια βάση του $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ η οποία συμπληρώνει τη βάση $\mathcal{C}_1$ του $\mathcal{V}$. Θέτοντας

$$\mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & d\end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid d \in \mathbb{R} \right\}$$

έπεται ότι θα έχουμε:

$$\mathsf{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$$

Παρόμοια, συμπληρώνουμε τη βάση $\mathcal{D}_1$ του $\mathcal{W}$ σε μια βάση $\mathcal{D}$ του $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$: Θεωρούμε τους πίνακε $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, και $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Επειδή ο πίνακας των συνιστωσών των διανυσμάτων του συνόλου

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \right\}$$

έχει μη-μηδενική ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{D}$ είναι μια βάση του $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ η οποία συμπληρώνει τη βάση $\mathcal{D}_1$ του $\mathcal{W}$. Θέτοντας

$$\mathcal{Z} = \left\langle \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix}0 & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

έπεται ότι θα έχουμε:

$$\mathsf{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}$$

(3) Επειδή $\mathsf{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$, κάθε πίνακας $A = \begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$, γράφεται μοναδικά ως

$$A = B + C, \quad \text{όπου} \quad B \in \mathcal{V} \ \text{ και } \ C \in \mathcal{U}$$

Όμως $B \in \mathcal{V}$, σημαίνει ότι ο πίνακας B είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{C}_1$ του $\mathcal{V}$:

$$B = \begin{pmatrix}y_1 & y_2\\ y_3 & y_4\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & 2b - c\\ b & c\end{pmatrix}$$

Τότε $a = y_1$, $b = y_3$, $c = y_4$, και επομένως:

$$A = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y_4 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & 2y_3 - y_4 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$$

Παρόμοια $C \in \mathcal{U}$, σημαίνει ότι ο πίνακας $C = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ του $\mathcal{U}$: $C = d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και επομένως $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ και

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z_4 \end{pmatrix} = z_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = B + C = \begin{pmatrix} y_1 & 2y_3 - y_4 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & 2y_3 - y_4 \\ y_3 & y_4 + z_4 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή $x_1 = y_1$, $2y_3 - y_4 = x_2$, $y_3 = x_3$ και $x_4 = y_4 + z_4$. Από αυτές τις σχέσεις προκύπτει ότι $z_4 = x_2 + x_4 - 2x_3$ και $y_4 = 2x_3 - x_2$. Άρα ο τυχαίος πίνακας $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ γράφεται μοναδικά ως:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = B + C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & 2x_3 - x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_4 - 2x_3 + x_2 \end{pmatrix}$$

Με βάση την παραπάνω ανάλυση, ορίζουμε απεικόνιση

$$f \colon \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathsf{M}_2(\mathbb{R}), \quad f \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & 2x_3 - x_2 \end{pmatrix}$$

η οποία είναι εκ' κατασκευής η προβολή του $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ στον υπόχωρο $\mathcal{V}$ (παράλληλα με τον υπόχωρο $\mathcal{U}$). Εύκολα προκύπτει ότι $f^2 = f$ και $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{V}$, βλέπε την Παρατήρηση **1** στο Φυλλάδιο Λυμένων Ασκήσεων **1**.

(4) Προφανώς $\mathrm{Ker}(f) = \mathcal{U}$ και μια βάση του $\mathsf{Ker}(f)$ είναι η $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Θεωρούμε την κανονική βάση

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

η οποία συμπληρώνει τη βάση του $\mathsf{Ker}(f)$. Γνωρίζουμε τότε ότι το σύνολο

$$\left\{ f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι μια βάση της εικόνας $\mathrm{Im}(f)$. Το σύνολο

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι τότε μια βάση του $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ στην οποία ο πίνακας της f είναι ο

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Βλέπε τη λυμένη Άσκηση **15** στο Φυλλάδιο Λυμένων Ασκήσεων **1**. $\square$