

# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

## ΠΡΟΧΕΙΡΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ 2

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html>

Παρασκευή 10 Μαρτίου 2023

**Πρόχειρη Δοκιμασία.** Να βρεθεί η  $n$ -οστή δύναμη του ακόλουθου  $3 \times 3$  πίνακα πραγματικών αριθμών:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Λύση. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα  $A$ :

$$\begin{aligned} P_A(t) = |A - tI_3| &= \begin{vmatrix} 3-t & -2 & 0 \\ -2 & 3-t & 0 \\ 0 & 0 & 5-t \end{vmatrix} = (5-t) \begin{vmatrix} 3-t & -2 \\ -2 & 3-t \end{vmatrix} = (5-t)((3-t)^2 - 4) = \\ &= (5-t)(t^2 - 6t + 5) \end{aligned}$$

Οι ρίζες του τριωνύμου  $t^2 - 6t + 5$  είναι 5 και 1 και επομένως

$$P_A(t) = (5-t)^2(t-1)$$

Οι ιδιοτιμές του  $A$  είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου και επομένως είναι οι εξής:

$$\lambda_1 = 1 \quad (\text{αλγεβρικής πολλαπλότητας } 1) \quad \text{και} \quad \lambda_2 = 5 \quad (\text{αλγεβρικής πολλαπλότητας } 2)$$

Θα προσδιορίσουμε βάσεις και τη διάσταση των ιδιοχώρων  $\mathcal{V}(1)$  και  $\mathcal{V}(5)$ .

- Για τον ιδιοχώρο  $\mathcal{V}(1)$  θεωρούμε το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} (A - I_3)X = O &\implies \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \\ 4z = 0 \end{cases} \implies \\ &\implies \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\mathcal{V}(1) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

και το σύνολο  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  είναι μια βάση του  $\mathcal{V}(1)$ . Ιδιαίτερα:  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(1) = 1$ .

- Για τον ιδιοχώρο  $\mathcal{V}(5)$  θεωρούμε το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$(A - 5I_3)X = O \implies \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} y = -x \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x, z \in \mathbb{R})$$

Επομένως:

$$\mathcal{V}(5) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

και προφανώς το σύνολο  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  είναι μια βάση του  $\mathcal{V}(5)$ . Ιδιαίτερα:  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(5) = 2$ .

Επειδή  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(1) = 1 =$  αλγεβρική πολλαπλότητα της  $\lambda_1 = 1$  και  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(5) = 2 =$  αλγεβρική πολλαπλότητα της  $\lambda_2 = 5$ , έπεται ότι ο πίνακας  $A$  είναι διαγωνοποιήσιμος.

Γνωρίζουμε τότε ότι ο πίνακας  $P$  ο οποίος σχηματίζεται από τις στήλες των διανυσμάτων στηλών των βάσεων των ιδιοχώρων, δηλαδή ο πίνακας

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και ικανοποιεί τη σχέση

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Τότε:

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1} \implies A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

δηλαδή:

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Υπολογίζουμε εύκολα ότι:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xlongequal{\text{πράξεις}}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+5^n & 1-5^n & 0 \\ 1-5^n & 1+5^n & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot 5^n \end{pmatrix}$$

Επομένως η  $n$ -οστή δύναμη του πίνακα  $A$  είναι ο πίνακας:

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+5^n & 1-5^n & 0 \\ 1-5^n & 1+5^n & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot 5^n \end{pmatrix}$$

□