

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΠΡΟΧΕΙΡΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ 3

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html>

Παρασκευή 17 Μαρτίου 2023

Πρόχειρη Δοκιμασία. Θεωρούμε τον ακόλουθο 3×3 πίνακα πραγματικών αριθμών, όπου $a, b \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}$$

- (I) Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A .
- (II) Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος; Αν ναι, ποιά είναι η διαγώνια μορφή του;
- (III) Αν $a = 0$:
 - (α) Να βρεθεί η n -οστή δύναμη του πίνακα A .
 - (β) Αν $b \geq 0$, να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του A , δηλαδή ένας 3×3 πίνακας πραγματικών αριθμών B για τον οποίο ισχύει ότι $B^2 = A$.
 - (γ) Αν $b = 1$, να βρεθεί ο πίνακας A^n συναρτήσει των πινάκων A και I_3 .

Λύση. (I) Θεωρούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A :

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 1 \\ 1 & 0 & b-t \end{vmatrix} = (1-t)^2(b-t)$$

Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A είναι κανονικό και διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A , έπεται ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι ένα εκ των $t-1$, $t-b$, $(t-1)^2$, $(t-1)(t-b)$, και $(t-1)^2(t-b)$. Παρατηρούμε ότι:

1. Αν $b = 1$, τότε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad P_A(t) = -(t-1)^3$$

Άρα το ελάχιστο πολυώνυμο είναι ένα εκ των $t-1$, $(t-1)^2$, και $(t-1)^3$.

Θα έχουμε:

(i)

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O \implies \\ \implies Q_A(t) \neq t-1$$

(ii)

$$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies Q_A(t) = \begin{cases} (t-1)^2, & \text{αν } a = 0 \\ (t-1)^3, & \text{αν } a \neq 0 \end{cases}$$

2. Αν $b \neq 1$, τότε επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A έχει τις ίδιες ρίζες με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A , έπεται ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι ένα εκ των $(t-1)(t-b)$ και $(t-1)^2(t-b)$.

Θα έχουμε:

$$(A - I_3)(A - bI_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-b & 0 & 0 \\ 0 & 1-b & a \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies Q_A(t) = \begin{cases} (t-1)(t-b), & \text{αν } a = 0 \\ (t-1)^2(t-b), & \text{αν } a \neq 0 \end{cases}$$

Συνδυάζοντας τις περιπτώσεις **1.** και **2.** έπεται ότι:

$$Q_A(t) = \begin{cases} (t-1)(t-b), & \text{αν } a = 0 \\ (t-1)^2(t-b), & \text{αν } a \neq 0 \end{cases}$$

(II) Γνωρίζουμε ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος αν το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων. Επομένως, από το μέρος (I) έπεται ότι:

$$\text{ο πίνακας } A \text{ είναι διαγωνοποιήσιμος} \iff a = 0 \text{ και } b \neq 1$$

Υποθέτουμε ότι $a = 0$ και $b \neq 1$. Τότε ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος και η διαγώνια μορφή του είναι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Με τη γνωστή διαδικασία βρίσκουμε βάσεις για τους ιδιοχώρους $\mathcal{V}(1)$ και $\mathcal{V}(b)$:

$$\mathcal{V}(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1-b \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{και} \quad \mathcal{V}(b) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

και άρα το σύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} 1-b \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ είναι μια βάση τοπυ $\mathcal{V}(1)$ και το σύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}(b)$.

Επομένως, θέτοντας

$$P = \begin{pmatrix} 1-b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

αποκτούμε έναν αντιστρέψιμο πίνακα P έτσι ώστε:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

(III) (α) Εύκολα βλέπουμε ότι

$$P^{-1} = \frac{1}{1-b} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-b & 0 \\ -1 & 0 & 1-b \end{pmatrix}$$

Τότε

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} \implies A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix} P^{-1} \implies$$

$$\implies A^n = \begin{pmatrix} 1-b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix} \frac{1}{1-b} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-b & 0 \\ -1 & 0 & 1-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} b^k & 0 & b^n \end{pmatrix}$$

(β) Έστω $b \geq 0$. Θα έχουμε:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \implies A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{b} \end{pmatrix}^2 P^{-1}$$

Επομένως θέτουμε

$$B = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{b} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1-\sqrt{b}}{1-b} & 0 & \sqrt{b}(1-b) \end{pmatrix}$$

Θα έχουμε:

$$B^2 = \left(P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{b} \end{pmatrix} P^{-1} \right)^2 = \left(P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{b} \end{pmatrix}^2 P^{-1} \right) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = A$$

(γ) Αν $b = 1$, τότε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad P_A(t) = -(t-1)^3$$

Επειδή $|A| = P_A(0) = 1$, έπεται ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Επειδή $a = 0$ και $b = 1$, από το μέρος (1) έπεται ότι $Q_A(t) = (t-1)^2 = t^2 - 2t + 1$. Επειδή $Q_A(A) = O$, δηλαδή $A^2 - 2A + I_2 = O$, θα έχουμε:

$$A^2 = 2A - I_2 \quad \text{και} \quad A^{-1} = 2I_2 - A$$

Εύκολα βλέπουμε με επαγωγή ότι, $\forall n \geq 0$:

$$A^n = nA - (n-1)I_2 \quad \text{και} \quad A^{-n} = (n+1)I_2 - nA$$

□