ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

Προχειρη Δοκιμασια 4

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html

Παρασκευή 24 Μαρτίου 2023

Πρόχειρη Δοκιμασία. **1.** *Έστω $(\mathcal{E}, \langle\, ,\, \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{E}$ ένα υποσύνολο του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι το υποσύνολο*

$$\mathcal{U}^{\perp} = \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \langle \vec{x}, \vec{v}\rangle = 0, \ \ \forall \vec{v} \in \mathcal{U}\big\}$$

είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$, και:

$$\{\vec{0}\}^{\perp} = \mathcal{E} \quad \text{και} \quad \mathcal{E}^{\perp} = \{\vec{0}\}$$

2. *Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\big(\mathsf{M}_2(\mathbb{R}), \langle\, ,\, \rangle\big)$, όπου*

$$\langle A, B\rangle = \mathsf{Tr}(A \cdot {}^tB)$$

(α΄) *Να βρεθεί το μήκος και η γωνία των διανυσμάτων*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(β΄) *Να βρεθεί η ορθογώνια προβολή του διανύσματος A στο διάνυσμα B.*

(γ΄) *Να βρεθεί ένα μοναδιαίο διάνυσμα $C \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ έτσι ώστε: $C \perp B$.*

(δ΄) *Αν $\mathcal{U} = \big\{A, B\big\}$, να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου $\mathcal{U}^{\perp}$.*

Λύση. **1.** Επειδή $\langle \vec{0}, \vec{v}\,\rangle = 0$, $\forall \vec{v} \in \mathcal{U}$, έπεται ότι $\vec{0} \in \mathcal{U}^{\perp}$.

Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{U}^{\perp}$, δηλαδή $\langle \vec{x}, \vec{v}\,\rangle = 0 = \langle \vec{y}, \vec{v}\rangle$, $\forall \vec{v} \in \mathcal{U}$. Τότε, $\forall \vec{v} \in \mathcal{U}$:

$$\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{v}\,\rangle = \langle \vec{x}, \vec{v}\,\rangle + \langle \vec{y}, \vec{v}\rangle = 0 + 0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{U}^{\perp}$$

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\vec{x} \in \mathcal{U}^{\perp}$, δηλαδή $\langle \vec{x}, \vec{v}\,\rangle = 0$, $\forall \vec{v} \in \mathcal{U}$. Τότε, $\forall \vec{v} \in \mathcal{U}$:

$$\langle \lambda\vec{x}, \vec{v}\,\rangle = \lambda\langle \vec{x}, \vec{v}\,\rangle = \lambda \cdot 0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda\vec{x} \in \mathcal{U}^{\perp}$$

Οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν ότι το υποσύνολο $\mathcal{U}^{\perp}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$.

Επειδή $\langle \vec{0}, \vec{x}\rangle = 0$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$, έπεται ότι $\mathcal{E} \subseteq \big\{\vec{0}\big\}^{\perp}$ και επομένως: $\mathcal{E} = \big\{\vec{0}\big\}^{\perp}$. Αν $\vec{x} \in \mathcal{E}^{\perp}$, τότε $\langle \vec{y}, \vec{x}\rangle = 0$, $\forall \vec{y} \in \mathcal{E}$, και ιδιαίτερα θα έχουμε $\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle = 0$. Τότε όμως $\vec{x} = \vec{0}$ άρα $\mathcal{E}^{\perp} \subseteq \big\{\vec{0}\big\}$ και επομένως: $\mathcal{E}^{\perp} = \big\{\vec{0}\big\}$.

2. (α΄) Θα έχουμε:

$$\langle A, A\rangle = \mathsf{Tr}(A \cdot {}^tA) = \mathsf{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \mathsf{Tr}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \quad \Longrightarrow \quad \|A\| = \sqrt{3}$$

$$\langle B, B\rangle = \mathsf{Tr}(B \cdot {}^tB) = \mathsf{Tr}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \mathsf{Tr}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 \quad \Longrightarrow \quad \|B\| = 2$$

Έστω θ η γωνία των διανυσμάτων A, B. Τότε:

$$\langle A, B\rangle = \|A\| \cdot \|B\| \cdot \cos(\theta) \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{Tr}(A \cdot {}^tB) = \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos(\theta) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \mathsf{Tr}\left(\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right) = 2\sqrt{3}\cdot\cos(\theta) \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{Tr}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = -2\sqrt{3}\cdot\cos(\theta) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad -1 = 2\sqrt{3}\cdot\cos(\theta) \quad \Longrightarrow \quad \cos(\theta) = -\frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6} \approx -0.288$$

Η μοναδική γωνία $\theta \in [0,\pi]$ για την οποία ισχύει ότι $\cos(\theta) = -0,288$ είναι η γωνία $106.73°$.

(β΄) Η ορθογώνια προβολή του διανύσματος A στο διάνυσμα B είναι

$$\Pi_B(A) = \frac{\langle A, B\rangle}{\langle B, B\rangle}B = \frac{-1}{4}B = -\frac{1}{4}B = \begin{pmatrix}1/4 & -1/4\\ -1/4 & -1/4\end{pmatrix}$$

(γ΄) Θεωρούμε το διάνυσμα

$$A - \Pi_B(A) = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} - \left(-\frac{1}{4}\right)\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/4 & -3/4\\ 5/4 & 1/4\end{pmatrix}$$

Τότε

$$\langle A - \Pi_B(A),\, B\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}3/4 & -3/4\\ 5/4 & 1/4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\rangle = \mathsf{Tr}\big((A - \Pi_B(A),\, B)\cdot {}^tB\big) =$$

$$= \mathsf{Tr}\begin{pmatrix}-6/4 & 0\\ -1 & 6/4\end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (A - \Pi_B(A)) \perp B$$

Τέλος θα έχουμε

$$\|A - \Pi_B(A)\| = \sqrt{\Big\langle A - \Pi_B(A), A - \Pi_B(A)\Big\rangle} = \sqrt{\mathsf{Tr}\big((A - \Pi_B(A)\cdot {}^t(A - \Pi_B(A))\big)} =$$

$$= \sqrt{\mathsf{Tr}\left(\begin{pmatrix}3/4 & -3/4\\ 5/4 & 1/4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3/4 & 5/4\\ -3/4 & 1/4\end{pmatrix}\right)} = \sqrt{\mathsf{Tr}\begin{pmatrix}9/8 & 3/4\\ 3/4 & 13/8\end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

Τότε ο πίνακας

$$C = \frac{A - \Pi_B(A)}{\|A - \Pi_B(A)\|} = \frac{2}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}3/4 & -3/4\\ 5/4 & 1/4\end{pmatrix}$$

είναι μοναδιαίος και είναι κάθετος στον πίνακα B.

(δ΄) Έστω $X = \begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$ έτσι ώστε $X \in \mathcal{U}^{\perp}$. Τότε:

$$\langle X, A\rangle = 0 = \langle X, B\rangle \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{Tr}\big(X\cdot {}^tA\big) = 0 = \mathsf{Tr}\big(X\cdot {}^tA\big) = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}\mathsf{Tr}\left(\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right) = 0\\ \text{και}\\ \mathsf{Tr}\left(\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right) = 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\mathsf{Tr}\left(\begin{pmatrix}x_1 - x_2 & x_1\\ x_3 - x_4 & x_3\end{pmatrix}\right) = 0\\ \text{και}\\ \mathsf{Tr}\left(\begin{pmatrix}-x_1 + x_2 & x_1 + x_2\\ -x_3 + x_4 & x_3 + x_4\end{pmatrix}\right) = 0\end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad (\Sigma) \quad \begin{cases}x_1 - x_2 + x_3 = 0\\ \text{και}\\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\end{cases}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η γενική λύση του ομογενούς συστήματος (Σ) είναι της μορφής:

$$\begin{pmatrix}x_2 - x_3\\ x_2\\ x_3\\ -2x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2\\ x_2\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-x_3\\ 0\\ x_3\\ -2x_3\end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\\ -2\end{pmatrix} =$$

Επομένως ο υπόχωρος $\mathcal{U}^{\perp}$ είναι ο εξής:

$$\mathcal{U}^{\perp} = \left\{\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid x_1 = x_2 - x_3 \ \text{ και } \ x_4 = -2x_3\right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_2 - x_3 & x_2 \\ x_3 & -2x_3 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_2 & x_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_3 & 0 \\ x_3 & -2x_3 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \textit{ο υπόχωρος του } \ \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \ \textit{ ο οποίος παράγεται από τους πίνακες}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ευκολα βλέπουμε ότι οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητοι και άρα αποτελούν μια βάση του $\mathcal{U}^{\perp}$. $\square$