

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΠΡΟΧΕΙΡΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ 5

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html>

Παρασκευή 31 Μαρτίου 2023

Πρόχειρη Δοκιμασία. Έστω ο Ευκλείδειος χώρος $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι το κανονικό (συνηθισμένο) εσωτερικό γινόμενο του \mathbb{R}^4 .

Θεωρούμε τον ακόλουθο υπόχωρο \mathcal{V} του Ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^4 :

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y - z = 0 \text{ και } y - z - w = 0\}$$

1. Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του \mathcal{V} .
2. Να βρεθεί ο ορθογώνιος υπόχωρος \mathcal{V}^\perp του \mathcal{V} .
3. Να επεκταθεί η ορθοκανονική βάση του \mathcal{V} η οποία βρέθηκε στο μέρος 1. σε μια ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^4 .
4. Να βρεθεί ορθογώνια προβολή και η κάθετη προβολή του διανύσματος $(1, 1, 1, 1)$ στον υπόχωρο \mathcal{V} .

Λύση. Αναζητούμε ένα σύνολο γεννητόρων για τον υπόχωρο \mathcal{V} :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y - z = 0 \text{ και } y - z - w = 0\} = \\ &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid z = 2x - y \text{ και } w = y - z\} = \\ &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid z = 2x - y \text{ και } w = 2y - 2x\} \\ &= \{(x, y, 2x - y, 2y - 2x) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0, 2, -2) + y(0, 1, -1, 2) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Επομένως τα διανύσματα $\vec{x}_1 = (1, 0, 2, -2)$ και $\vec{x}_2 = (0, 1, -1, 2)$ παράγουν τον υπόχωρο \mathcal{V} . Επειδή όπως βλέπουμε άμεσα τα διανύσματα \vec{x}_1 και \vec{x}_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται ότι αποτελούν μια βάση του \mathcal{V} .

1. Θα εφαρμόσουμε τη διαδικασία Gram-Schmidt στη βάση $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ του \mathcal{V} :

(α) Θέτουμε

$$\vec{y}_1 = \vec{x}_1 = (1, 0, 2, -2)$$

Τότε:

$$\|\vec{y}_1\|^2 = \langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle = \langle (1, 0, 2, -2), (1, 0, 2, -2) \rangle = 9 \implies \|\vec{y}_1\| = 3$$

(β) Θέτουμε

$$\begin{aligned} \vec{y}_2 &= \vec{x}_2 - \frac{\langle \vec{x}_2, \vec{y}_1 \rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle} \vec{y}_1 = (0, 1, -1, 2) - \frac{\langle (0, 1, -1, 2), (1, 0, 2, -2) \rangle}{9} (1, 0, 2, -2) = \\ &= (0, 1, -1, 2) + \frac{6}{9} (1, 0, 2, -2) = (0, 1, -1, 2) + \frac{2}{3} (1, 0, 2, -2) = \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Άρα

$$\vec{y}_2 = \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

και τότε

$$\|\vec{y}_2\|^2 = \langle \vec{y}_2, \vec{y}_2 \rangle = \left\langle \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\rangle = 2 \implies \|\vec{y}_2\| = \sqrt{2}$$

Θέτοντας

$$\vec{\varepsilon}_1 = \frac{\vec{y}_1}{\|\vec{y}_1\|} = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3} \right) = \frac{1}{3}(1, 0, 2, -2)$$

και

$$\vec{\varepsilon}_2 = \frac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{\sqrt{2}}{6}(2, 3, 1, 2)$$

έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{C} = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2\}$$

είναι μια ορθοκανονική βάση του \mathcal{V} .

2. Έστω $\vec{a} = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$. Επειδή το σύνολο \mathcal{C} είναι μια (ορθοκανονική) βάση του \mathcal{V} , έπεται ότι:

$$\begin{aligned} \vec{a} \in \mathcal{V}^\perp &\iff \langle \vec{a}, \vec{\varepsilon}_1 \rangle = 0 = \langle \vec{a}, \vec{\varepsilon}_2 \rangle \iff \\ &\iff \left\langle (x, y, z, w), \frac{1}{3}(1, 0, 2, -2) \right\rangle = 0 = \left\langle (x, y, z, w), \frac{\sqrt{2}}{6}(2, 3, 1, 2) \right\rangle \iff \\ &\iff \begin{cases} \frac{1}{3}(x + 2z - 2w) = 0 \\ \frac{2}{6}(2x + 3y + x + 2w) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2w - 2z \\ z = y + 2w \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2w - 2z \\ y = z - 2w \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^\perp &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 2w - 2z \text{ και } y = z - 2w\} = \\ &= \{(2w - 2z, z - 2w, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid z, w \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{w(2, -2, 0, 1) + z(-2, 1, 1, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid z, w \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Επομένως τα διανύσματα $\vec{x}_3 = (2, -2, 0, 1)$ και $\vec{x}_4 = (-2, 1, 1, 0)$ παράγουν τον υπόχωρο \mathcal{V}^\perp . Επειδή όπως βλέπουμε άμεσα τα διανύσματα \vec{x}_3 και \vec{x}_4 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται ότι αποτελούν μια βάση του \mathcal{V}^\perp .

Θα εφαρμόσουμε τη διαδικασία Gram-Schmidt στη βάση $\{\vec{x}_3, \vec{x}_4\}$ του \mathcal{V}^\perp :

(α) Θέτουμε

$$\vec{y}_3 = \vec{x}_3 = (2, -2, 0, 1)$$

Τότε:

$$\|\vec{y}_3\|^2 = \langle \vec{y}_3, \vec{y}_3 \rangle = \langle (2, -2, 0, 1), (2, -2, 0, 1) \rangle = 9 \implies \|\vec{y}_3\| = 3$$

(β) Θέτουμε

$$\begin{aligned} \vec{y}_4 &= \vec{x}_4 - \frac{\langle \vec{x}_4, \vec{y}_3 \rangle}{\langle \vec{y}_3, \vec{y}_3 \rangle} \vec{y}_3 = (-2, 1, 1, 0) - \frac{\langle (-2, 1, 1, 0), (2, -2, 0, 1) \rangle}{9} (2, -2, 0, 1) = \\ &= (-2, 1, 1, 0) + \frac{6}{9}(1, 0, 2, -2) = (-2, 1, 1, 0) + \frac{2}{3}(2, -2, 0, 1) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

Άρα

$$\vec{y}_4 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3} \right)$$

και τότε

$$\|\vec{y}_4\|^2 = \langle \vec{y}_4, \vec{y}_4 \rangle = \left\langle \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3} \right), \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3} \right) \right\rangle = 2 \implies \|\vec{y}_4\| = \sqrt{2}$$

Θέτοντας

$$\vec{\varepsilon}_3 = \frac{\vec{y}_3}{\|\vec{y}_3\|} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} (2, -2, 0, 1)$$

και

$$\vec{\varepsilon}_4 = \frac{\vec{y}_4}{\|\vec{y}_4\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3} \right) = \frac{\sqrt{2}}{6} (-2, -1, 3, 2)$$

έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{D} = \{\vec{\varepsilon}_3, \vec{\varepsilon}_4\}$$

είναι μια ορθοκανονική βάση του \mathcal{V}^\perp .

3. Επειδή το σύνολο

$$\mathcal{C} = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2\}$$

είναι μια ορθοκανονική βάση του \mathcal{V} , και το σύνολο

$$\mathcal{D} = \{\vec{\varepsilon}_3, \vec{\varepsilon}_4\}$$

είναι μια ορθοκανονική βάση του \mathcal{V}^\perp , έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D} = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3, \vec{\varepsilon}_4\}$$

είναι μια ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^4 η οποία συμπληρώνει την ορθοκανονική βάση \mathcal{C} του \mathcal{V} .

4. Η ορθογώνια προβολή του διανύσματος $\vec{a} = (1, 1, 1, 1)$ στον υπόχωρο \mathcal{V} είναι:

$$\pi_{\mathcal{V}}(\vec{a}) = \langle \vec{a}, \vec{\varepsilon}_1 \rangle \vec{\varepsilon}_1 + \langle \vec{a}, \vec{\varepsilon}_2 \rangle \vec{\varepsilon}_2$$

Εκτελώντας απλές πράξεις θα έχουμε:

$$\pi_{\mathcal{V}}(1, 1, 1, 1) = \left\langle (1, 1, 1, 1), \frac{1}{3}(1, 0, 2, -2) \right\rangle \frac{1}{3}(1, 0, 2, -2) + \left\langle (1, 1, 1, 1), \frac{\sqrt{2}}{6}(2, 3, 1, 2) \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{6}(2, 3, 1, 2)$$

και άρα:

$$\pi_{\mathcal{V}}(1, 1, 1, 1) = \left(1, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

Η κάθετη προβολή του διανύσματος $\vec{a} = (1, 1, 1, 1)$ στον υπόχωρο \mathcal{V} είναι:

$$\pi_{\mathcal{V}^\perp}(\vec{a}) = \langle \vec{a}, \vec{\varepsilon}_3 \rangle \vec{\varepsilon}_3 + \langle \vec{a}, \vec{\varepsilon}_4 \rangle \vec{\varepsilon}_4$$

Εκτελώντας απλές πράξεις θα έχουμε:

$$\pi_{\mathcal{V}^\perp}(1, 1, 1, 1) = \left\langle (1, 1, 1, 1), \frac{1}{3}(2, -2, 0, 1) \right\rangle \frac{1}{3}(2, -2, 0, 1) + \left\langle (1, 1, 1, 1), \frac{\sqrt{2}}{6}(-2, -1, 3, 2) \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{6}(-2, -1, 3, 2)$$

και άρα:

$$\pi_{\mathcal{V}^\perp}(1, 1, 1, 1) = \left(0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

□