

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΠΡΟΧΕΙΡΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ 6

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html>

Παρασκευή 7 Απριλίου 2023

Πρόχειρη Δοκιμασία. Να συμπληρωθεί ο πίνακας πραγματικών αριθμών

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

σε έναν 3×3 ορθογώνιο πίνακα ο οποίος γεωμετρικά παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) κατά γωνία ϑ , γύρω από άξονα (ε) ο οποίος είναι κάθετος στο (Π).

Στη συνέχεια να βρεθούν:

- (1) Η γωνία στροφής ϑ .
- (2) Ο άξονας (ε).
- (3) Το επίπεδο (Π).
- (4) Ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε

$${}^t P \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Λύση. Έστω

$$\Gamma_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \text{και} \quad \Gamma_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

οι δύο πρώτες γραμμές του πίνακα A . Αναζητούμε μια γραμμή

$$\Gamma_3 = (a, b, c)$$

έτσι ώστε ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

να είναι ορθογώνιος και γεωμετρικά να παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) κατά γωνία ϑ , γύρω από άξονα (ε) ο οποίος είναι κάθετος στο (Π). Ισοδύναμα, σύμφωνα με το Θεώρημα του Euler, αναζητούμε γραμμή Γ_3 έτσι ώστε ο πίνακας A που προκύπτει να είναι ορθογώνιος και να έχει ορίζουσα $|A| = 1$.

Ισοδύναμα θα πρέπει

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle &= 0, & \langle \Gamma_1, \Gamma_3 \rangle &= 0, & \langle \Gamma_2, \Gamma_3 \rangle &= 0 \\ \|\Gamma_1\| &= \|\Gamma_2\| = \|\Gamma_3\| &= 1 \\ |A| &= 1 \end{aligned}$$

Θα έχουμε:

$$\langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = 0$$

$$\|\Gamma_1\| = \langle \Gamma_1, \Gamma_1 \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = 1$$

$$\|\Gamma_2\| = \langle \Gamma_2, \Gamma_2 \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = 1$$

$$\langle \Gamma_3, \Gamma_3 \rangle^2 = 1 \implies \langle (a, b, c), (a, b, c) \rangle = 1 \implies a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

$$\langle \Gamma_1, \Gamma_3 \rangle = 0 \implies \left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), (a, b, c) \right\rangle = \frac{a}{4} + \frac{b}{4} - \frac{c\sqrt{2}}{2} = 0 \implies a + b - 2c\sqrt{2} = 0$$

$$\langle \Gamma_2, \Gamma_3 \rangle = 0 \implies \left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), (a, b, c) \right\rangle = \frac{a}{4} + \frac{b}{4} + \frac{c\sqrt{2}}{2} = 0 \implies a + b + 2c\sqrt{2} = 0$$

Τότε προκύπτει το (μη-γραμμικό) σύστημα

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a + b - 2c\sqrt{2} = 0 \\ a + b + 2c\sqrt{2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ 4c\sqrt{2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a + b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ b = -a \end{cases} \implies \\ \implies 2a^2 = 1 \implies a^2 = \frac{1}{2} \implies a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \implies a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Επομένως προκύπτουν οι ακόλουθοι ορθογώνιοι πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι:

$$\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{και} \quad \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Άρα ο ζητούμενος πίνακας είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

ο οποίος είναι ορθογώνιος με ορίζουσα ίση με 1 και ο οποίος γεωμετρικά παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) κατά γωνία ϑ , γύρω από άξονα (ε) ο οποίος είναι κάθετος στο (Π).

(1) **Άξονας Στροφής:** Από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι ο πίνακας A έχει ως ιδιοτιμή το $\lambda = 1$. Βρίσκουμε

ένα ιδιοδιάνυσμα $F'_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned} (A - I_3) \cdot X = 0 &\implies \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x - y + \sqrt{2}z = 0 \\ \sqrt{2}x - \sqrt{2}y - 2z = 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} x - y + \sqrt{2}z = 0 \\ x - y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα ένα ιδιοδιάνυσμα το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$, είναι το διάνυσμα-στήλη

$$F'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$ είναι το

$$F_1 = \frac{F'_1}{\|F'_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Σύμφωνα με την θεωρία, ο άξονας περιστροφής είναι ο μονοδιάστατος υπόχωρος ο οποίος παράγεται από το F'_1 , ή ισοδύναμα από το F_1 :

$$(\varepsilon) : \quad \{ \kappa F_1 \in \mathbb{R}_3 \mid \kappa \in \mathbb{R} \}$$

(2) **Επίπεδο Στροφής:** Συμπληρώνουμε το διάνυσμα F_1 σε μια ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}_3 . Για να το επιτύχουμε αυτό αρκεί να βρούμε μια ορθοκανονική βάση του $\{F_1\}^\perp$:

$$\begin{aligned} \{F_1\}^\perp &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x + y = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y = -x \text{ και } z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathcal{L}(F'_2, F'_3) \text{ ο υπόχωρος του } \mathbb{R}_3 \text{ ο οποίος παρτάγεται από τα } F'_2, F'_3 \end{aligned}$$

όπου:

$$F'_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad F'_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Επειδή, όπως βλέπουμε εύκολα τα F'_2 και F'_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, θα αποτελούν μια βάση του $\{F_1\}^\perp$ η οποία προφανώς είναι ορθογώνια. Με τη διαδικασία Gram-Schmidt τότε αποκτούμε μια ορθοκανονική βάση του $\{F_1\}^\perp$:

$$F_2 := \frac{F'_2}{\|F'_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad F_3 := \frac{F'_3}{\|F'_3\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Τότε ως γνωστόν, το επίπεδο περιστροφής (II) ορίζεται από το 2-διάστατο υπόχωρο $\{F_1\}^\perp = \mathcal{L}(F'_2, F'_3) = \mathcal{L}(F_2, F_3)$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα F_2 και F_3 :

$$(II) : \quad \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

(3) **Γωνία Στροφής:** Ός γνωστόν το συνημίτονο της γωνίας περιστροφής ϑ υπολογίζεται ως εξής:

$$\cos \theta = \frac{\text{Tr}A - 1}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Άρα η γωνία περιστροφής είναι

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

(4) **Ορθογώνια Ομοιότητα:** Γνωρίζουμε ότι οι πίνακες A και $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ είναι όμοιοι διότι είναι πίνακες του ενδομορφισμού

$$f_A: \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_3, \quad f_A(X) = A \cdot X$$

ως προς την κανονική βάση $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3\}$ του \mathbb{R}_3 , η οποία είναι ορθοκανονική, και την ορθοκανονική βάση $\mathcal{C} = \{F_1, F_2, F_3\}$ αντίστοιχα. Άρα, θέτοντας $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, έπεται ότι ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος και ισχύει ότι:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας P ορίζεται από τις στήλες της ορθοκανονικής βάσης \mathcal{C} και άρα:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επειδή οι βάσεις \mathcal{B} και \mathcal{C} είναι ορθοκανονικές, έπεται ότι ο πίνακας P είναι ορθογώνιος. Επειδή $\theta = \pi/2$, έπεται ότι τελικά θα έχουμε:

$${}^t P \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \square$$