

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΠΡΟΧΕΙΡΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ 8

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII2023/LAII2023.html>

Παρασκευή 19 Μαΐου 2023

Πρόχειρη Δοκιμασία. Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή

$$q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad q(x, y, z) = xy + yz$$

- (1) Να βρεθούν οι κύριοι άξονες της q .
- (2) Να προσδιορισθεί το είδος της δευτεροβάθμιας επιφάνειας

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy + yz = \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

- (3) Να βρεθεί μια κυβική ρίζα του πίνακα της q .
- (4) Να υπολογισθεί ο πίνακας

$$2^{1010} A^{2018}$$

Λύση. (1) Ο πίνακας της τετραγωνικής μορφής q είναι

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A . Έχουμε:

$$\begin{aligned} P_A(t) &= \begin{vmatrix} -t & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -t & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -t \end{vmatrix} = -t \cdot \begin{vmatrix} -t & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -t \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -t \end{vmatrix} = -t \cdot \left(t^2 - \frac{1}{4} \right) + \frac{t}{4} \\ &= -t \cdot \left(t^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = -t \cdot \left(t^2 - \frac{1}{2} \right) = -t \cdot \left(t - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

πολλαπλότητας ένα.

- Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}_A(0)$ λύνουμε το παρακάτω ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$

και άρα

$$\mathcal{V}_A(0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y = 0 \text{ και } z = -x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \right\} \implies \mathcal{V}_A(0) = \mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Υπολογίζουμε εύκολα ότι: $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}$. Τότε το σύνολο

$$\left\{ F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}_A(0)$.

- Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}_A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ έχουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -\sqrt{2}x + y = 0 \\ x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$$

Από τη πρώτη εξίσωση έχουμε $y = \sqrt{2}x$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη βρίσκουμε: $x - \sqrt{2}\sqrt{2}x + z = 0 \implies x = z$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y = \sqrt{2}x \text{ και } x = z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{2}x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \right\} \implies \mathcal{V}_A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Έχουμε $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 2$ και άρα μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}_A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ είναι το σύνολο:

$$\left\{ F_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}_A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ έχουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \sqrt{2}x + y = 0 \\ x + \sqrt{2}y + z = 0 \\ y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = -\sqrt{2}x \\ z = x \end{cases}$$

Τότε

$$\mathcal{V}_A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Επομένως μια ορθοκανονική βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}_A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ είναι η εξής:

$$\left\{ F_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Επομένως οι κύριοι άξονες της τετραγωνικής μορφής q είναι

$$\left\{ F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, F_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, F_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Τέλος η τετραγωνική μορφή q στους κύριους άξονες γράφεται ως εξής:

$$q(x', y', z') = \frac{\sqrt{2}}{2}(y')^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}(z')^2$$

(2) Η επιφάνεια S στους κύριους άξονες γράφεται ως εξής:

$$S' = \left\{ (x', y', z') \in \mathbb{R}_3 \mid \frac{\sqrt{2}}{2}(y')^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}(z')^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} = \left\{ (x', y', z') \in \mathbb{R}_3 \mid (y')^2 - (z')^2 = 1 \right\}$$

Επομένως η δευτεροβάθμια επιφάνεια S είναι ένα μονόχωνο υπερβολοειδές.

(3) Θέτοντας

$$P = (F_1 \ F_2 \ F_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

αποκτούμε έναν ορθογώνιο πίνακα έτσι ώστε

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε τον πίνακα

$$B = P \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot {}^tP = \dots = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Τότε υπολογίζουμε εύκολα ότι $B^3 = A$ και επομένως ο πίνακας B είναι μια κυβική ρίζα του A .

(4) Τέλος θα έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= P \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot {}^tP \implies A^{2018} = P \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right)^{2018} \cdot {}^tP = \\ &= P \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{2018} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{2018} \cdot {}^tP = P \cdot \frac{1}{2^{1009}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot {}^tP = \frac{1}{2^{1009}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Επομένως:

$$A^{2018} = \frac{1}{2^{1010}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Άρα

$$2^{1010} A^{2018} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

□