

# ΘΕΩΡΙΑ ΔΑΚΤΥΛΙΩΝ

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ

2020 - 2021

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ :

<http://users.uoi.gr/abeligia/RingTheory2020/RingTheory2020.html>

2 Οκτωβρίου 2020

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- |   |    |
|---|----|
| 1. <b>Στοιχειώδης Θεωρία Δακτυλίων</b>                  | 3  |
| 2. <b>Βασική Θεωρία Προτύπων και Ημιαπλοί Δακτύλιοι</b> | 26 |

## 1. Στοιχειώδης Θεωρία Δακτυλίων

**Άσκηση 1.1.** Έστω  $R = (R, +, \cdot)$  ένας δακτύλιος με μονάδα  $1_R$ . Ναδειχθεί ότι η τριάδα  $\tilde{R} = (R, \oplus, \odot)$ , όπου:

$$x \oplus y = x + y + 1_R \quad \& \quad x \odot y = x \cdot y + x + y$$

είναι ένας δακτύλιος με μονάδα ο οποίος είναι ισόμορφος με τον δακτύλιο  $R$ .

**Άσκηση 1.2.** Ναδειχθεί ότι η αβελιανή ομάδα  $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$  δεν μπορεί να είναι η προσθετική ομάδα ενός δακτυλίου με μονάδα.

**Άσκηση 1.3.** Έστω  $\{0\} \neq R$  ένας δακτύλιος, όχι απαραίτητα με μονάδα, έτσι ώστε για κάθε  $a \in R$ ,  $a \neq 0$ , υπάρχει μοναδικό στοιχείο  $x \in R$  έτσι ώστε:  $a = axa$ . Ναδειχθεί ότι ο  $R$  έχει μονάδα και είναι δακτύλιος διαίρεσης.

**Άσκηση 1.4.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος με μονάδα. ναδειχθεί ότι ο  $R$  είναι δακτύλιος διαίρεσης αν και μόνον αν για κάθε στοιχείο  $a \in R$ ,  $a \neq 1_R$ , υπάρχει στοιχείο  $b \in R$  έτσι ώστε:  $ab = a + b$ .

**Άσκηση 1.5.** (1) Αν  $x, y$  είναι στοιχεία ενός δακτυλίου  $R$  έτσι ώστε  $xy = 1$ , είναι τα στοιχεία  $x$  και  $y$  αντιστρέψιμα;

Αν η απάντηση είναι ναι, να αποδείξετε τον ισχυρισμό. Αν η απάντηση είναι όχι, να δοθεί αντιπαράδειγμα.

(2) Αν  $x$  είναι ένα στοιχείο ενός δακτυλίου  $R$  έτσι ώστε το στοιχείο  $x^n$  είναι αντιστρέψιμο, για κάποιο  $n \geq 2$ . Ναδειχθεί ότι το στοιχείο  $x$  είναι αντιστρέψιμο.

(3) Ναδειχθεί ότι ένα στοιχείο  $a$  ενός δακτυλίου  $R$  είναι αντιστρέψιμο αν και μόνον αν το  $a$  είναι αριστερά (δεξιά) αντιστρέψιμο και δεν είναι δεξιός (αριστερός) διαιρέτης του μηδενός.

(4) Αν ο δακτύλιος  $R$  δεν περιέχει διαιρέτες του μηδενός, ναδειχθεί ότι:

$$\forall x, y \in R: \quad xy = 1 \implies yx = 1$$

**Άσκηση 1.6.** Αν  $R$  είναι ένας δακτύλιος με μονάδα, τότε το **κέντρο** του  $R$  ορίζεται να είναι το σύνολο

$$Z(R) = \{r \in R \mid rx = xr, \forall x \in R\}$$

(1) Δείξτε ότι το κέντρο του  $R$  είναι ένας μεταθετικός υποδακτύλιος του  $R$ .

(2) Δείξτε ότι το κέντρο ενός δακτυλίου διαίρεσης είναι ένα σώμα.

(3) Αν  $\mathbb{H}$  είναι ο δακτύλιος των τετρανίων του Hamilton, να προσδιορισθεί το κέντρο του  $Z(\mathbb{H})$ .

**Άσκηση 1.7.** Έστω  $R$  ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα. Ναδειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) Ο  $R$  είναι σώμα.

(2) Κάθε (γνήσιο) ιδεώδες του  $R$  είναι πρώτο.

**Άσκηση 1.8.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος διαίρεσης.

(1) Αν  $S$  είναι ένας πεπερασμένος υποδακτύλιος του  $R$ , ναδειχθεί ότι ο  $S$  είναι δακτύλιος διαίρεσης.

(2) Αν  $Z(R)$  είναι το κέντρο του, ναδειχθεί ότι ο  $R$  είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος  $Z(R)$ , βλ. Άσκηση 1.6(2), με διάσταση  $\neq 2$ .

- Άσκηση 1.9.** (1) Ναδειχθεί ότι κάθε απλός μεταθετικός δακτύλιος είναι σώμα.  
 (2) Ναδειχθεί ότι το κέντρο ενός απλού δακτυλίου είναι σώμα.  
 (3) Να εξετασθεί αν ένας υποδακτύλιος ενός απλού δακτυλίου είναι απλός δακτύλιος.  
 (4) Αν ο δακτύλιος  $R$  είναι απλός, είναι ο δακτύλιος πολυωνύμων  $R[x]$  απλός;

**Άσκηση 1.10.** Ναδειχθεί ότι το ακόλουθο σύνολο πινάκων

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a + 3b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$$

είναι ένας υποδακτύλιος του δακτυλίου  $M_2(\mathbb{R})$ , και ακολούθως να εξετασθεί αν ο υποδακτύλιος  $R$  είναι σώμα.

**Άσκηση 1.11.** Ναδειχθεί ότι το ακόλουθο σύνολο πινάκων

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a + b & 4b \\ -b & a - b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}) \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{Q})$$

είναι ένας υποδακτύλιος του δακτυλίου  $M_2(\mathbb{Q})$ , και ακολούθως να εξετασθεί αν ο υποδακτύλιος  $R$  είναι σώμα.

**Άσκηση 1.12.** Ναδειχθεί ότι το ακόλουθο σύνολο πινάκων

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2c & a & b \\ 2b & 2c & a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}) \mid a, b, c \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq M_3(\mathbb{Q})$$

είναι ένας υποδακτύλιος του δακτυλίου  $M_3(\mathbb{Q})$ , και ακολούθως να εξετασθεί αν ο υποδακτύλιος  $R$  είναι σώμα.

**Άσκηση 1.13.** Έστω  $R$  ένας υποδακτύλιος του  $\mathbb{C}$ . Θεωρούμε το σύνολο πινάκων

$$\mathbb{H}(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid a, b, c, d \in R \right\}$$

- (1) Να εξετάσετε αν το σύνολο  $\mathbb{H}(R)$  είναι υποδακτύλιος του  $M_2(\mathbb{C})$ .
- (2) Αν  $R = \mathbb{R}$ , ναδειχθεί ότι το σύνολο  $\mathbb{H}(\mathbb{R})$  είναι υποδακτύλιος του  $M_2(\mathbb{C})$  ο οποίος είναι ισόμορφος με τον δακτύλιο διαίρεσης  $\mathbb{H}$  των τετρανίων του Hamilton.
- (3) Αν  $R = \mathbb{Q}$ , ναδειχθεί ότι το σύνολο  $\mathbb{H}(\mathbb{Q})$  είναι υποδακτύλιος του  $M_2(\mathbb{C})$  ο οποίος είναι δακτύλιος διαίρεσης.
- (4) Αν  $R = \mathbb{Z}$ , ναδειχθεί ότι το σύνολο  $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$  είναι υποδακτύλιος του  $M_2(\mathbb{C})$ , ο οποίος δεν έχει (αριστερούς ή δεξιούς) διαιρετές του μηδενός, αλλά δεν είναι δακτύλιος διαίρεσης.

**Άσκηση 1.14.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος και  $X$  ένα σύνολο. Έστω  $f: R \rightarrow X$  μια απεικόνιση συνόλων η οποία υποθέτουμε ότι είναι «επί».

- (1) Έστω  $\oplus, \odot: X \times X \rightarrow X$ , δύο απεικονίσεις για τις οποίες ισχύει ότι,  $\forall r_1, r_2 \in R$ :

$$f(r_1 + r_2) = f(r_1) \oplus f(r_2) \quad \text{και} \quad f(r_1 \cdot r_2) = f(r_1) \odot f(r_2)$$

Ναδειχθεί ότι η τριάδα  $(X, \oplus, \odot)$  είναι ένας δακτύλιος και η απεικόνιση  $f: R \rightarrow X$  είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων.

- (2) Ναδειχθεί ότι υπάρχει το πολύ μια δομή δακτυλίου επί του συνόλου  $X$  έτσι ώστε η «επί» απεικόνιση  $f: R \rightarrow X$  να είναι ομομορφισμός δακτυλίων.

**Άσκηση 1.15.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος με μονάδα. Δείξτε ότι ο δακτύλιος  $R$  είναι μεταθετικός σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- (1)  $\forall r \in R: r^2 = r.$
- (2)  $\forall r \in R: r^2 - r \in Z(R).$
- (3)  $\forall r \in R: r^3 = r.$
- (4)  $\forall r \in R: r^3 - r \in Z(R).$
- (5)  $\forall r \in R: r^4 = r.$
- (6)  $\forall r \in R: r^5 = r.$
- (7)  $\forall r \in R: r^6 = r.$

**Άσκηση 1.16.** Να δοθεί παράδειγμα (μη-μεταθετικού) δακτυλίου ο οποίος περιέχει στοιχεία τα οποία είναι αριστεροί, αντίστοιχα δεξιοί, διαιρετές του μηδενός αλλήλα δεν είναι δεξιοί, αντίστοιχα αριστεροί, διαιρετές του μηδενός.

**Άσκηση 1.17.** Έστω ότι  $a, b$  είναι στοιχεία ενός δακτυλίου  $R$ . Αν το στοιχείο  $1 - ba$  είναι αριστερά αντιστρέψιμο (αντίστοιχα, αντιστρέψιμο), ναδειχθεί ότι και το στοιχείο  $1 - ab$  είναι αριστερά αντιστρέψιμο (αντίστοιχα, αντιστρέψιμο), και να βρεθεί ένας αριστερά αντίστροφο (αντίστοιχα, αντίστροφο) στοιχείο του  $1 - ab$ .

**Άσκηση 1.18.** Έστω  $f: R \rightarrow S$  ένας επιμορφισμός δακτυλίων. Ναδειχθεί ότι αν ο δακτύλιος  $R$  είναι μεταθετικός, τότε και ο δακτύλιος  $S$  είναι μεταθετικός. Να δοθεί παράδειγμα επιμορφισμού δακτυλίων  $f: R \rightarrow S$ , όπου ο δακτύλιος  $S$  είναι μεταθετικός και ο δακτύλιος  $R$  δεν είναι μεταθετικός.

**Άσκηση 1.19.** Δείξτε ότι κάθε δακτύλιος  $R$  με μονάδα και πλήθος στοιχείων  $|R| = p^2$ , όπου  $p$  είναι ένας πρώτος αριθμός, είναι μεταθετικός.

**Άσκηση 1.20.** Έστω  $\mathcal{V}$  ένας  $\mathbb{K}$ -διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος  $\mathbb{K}$  και  $\mathcal{S}$  ένα μη-κενό σύνολο γραμμικών απεικονίσεων  $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ . Το σύνολο  $\mathcal{W}$  καλείται **ανάγωγο** αν:

$$\mathcal{W} : \text{υπόχωρος του } \mathcal{V} \text{ και } f(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W}, \forall f \in \mathcal{S} \implies \mathcal{W} = \{\vec{0}\} \text{ ή } \mathcal{W} = \mathcal{V}$$

Να δεχθεί ότι αν  $\mathcal{S}$  είναι ένα ανάγωγο σύνολο γραμμικών απεικονίσεων επί του  $\mathcal{V}$ , τότε το σύνολο

$$D = \{g \in \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}) \mid g \circ f = f \circ g, \forall f \in \mathcal{S}\}$$

είναι ένας υποδακτύλιος του  $\text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V})$ <sup>1</sup> ο οποίος είναι δακτύλιος διαίρεσης.

**Άσκηση 1.21.** Για κάθε δακτύλιο  $R$ , ναδειχθεί ότι το υποσύνολο

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(R) \mid a + c = b + d \right\}$$

είναι ένας υποδακτύλιος του  $M_2(R)$  ο οποίος είναι ισόμορφος με τον δακτύλιο  $T_2(R)$  των  $2 \times 2$  πινάκων υπεράνω του  $R$ .

<sup>1</sup>Το σύνολο  $\text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V})$  όλων των γραμμικών απεικονίσεων  $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  είναι δακτύλιος με πράξη πρόσθεσης την συνήθη πρόσθεση γραμμικών απεικονίσεων, και πολλαπλασιασμό την σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων.

**Άσκηση 1.22.** Θεωρούμε τον πίνακα πραγματικών αριθμών:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

και έστω το σύνολο

$$R = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$$

Ναδειχθεί ότι το σύνολο  $R$  είναι ένας υποδακτύλιος του  $M_2(\mathbb{R})$  ο οποίος είναι ισόμορφος με το σώμα  $\mathbb{C}$  των μιγαδικών αριθμών.

**Άσκηση 1.23.** Θεωρούμε το εξής σύνολο  $4 \times 4$  πινάκων πραγματικών αριθμών:

$$\mathcal{M} = \left\{ M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ναδειχθεί ότι το σύνολο

$$R = \{A \in M_4(\mathbb{R}) \mid AM_i = M_iA, i = 1, 2\}$$

είναι ένας υποδακτύλιος του  $M_4(\mathbb{R})$  ο οποίος είναι ισόμορφος με τον δακτύλιο διαίρεσης  $\mathbb{H}$  των τετρανίων του Hamilton.

**Άσκηση 1.24.** Βρείτε όλους τους υποδακτυλίους των δακτυλίων  $\mathbb{Z}$  και  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ .

**Άσκηση 1.25.** Να προσδιορισθούν όλοι οι υποδακτύλιοι του  $\mathbb{Q}$ .

**Άσκηση 1.26.** Βρείτε όλους τους ομομορφισμούς δακτυλίων:

- (1)  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ .
- (2)  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ .
- (3)  $\mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, \forall n \geq 2$ .
- (4)  $\mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_m, \forall n, m \geq 2$ .

**Άσκηση 1.27.** Έστω  $\mathbb{K}$  ένα σώμα. Ναδειχθεί ότι οι ομάδες  $(\mathbb{K}, +)$  και  $(\mathbb{K}^*, \cdot)$  δεν είναι ποτέ ισόμορφες.

**Άσκηση 1.28.** Έστω  $\mathbb{K}$  ένα σώμα για το οποίο ισχύει ότι,  $\forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ :

$$a^{-1} = -a$$

Ναδειχθεί ότι το  $\mathbb{K}$  είναι ισόμορφο με το σώμα  $\mathbb{Z}_2$ .

**Άσκηση 1.29.** Έστω  $f: R \rightarrow S$  ένας ομομορφισμός δακτυλίων.

- (1) Αν  $I$  είναι ένα ιδεώδες του  $R$  έτσι ώστε  $\text{Ker}(f) \subseteq I$ , ναδειχθεί ότι το υποσύνολο  $f(I)$  είναι ένα ιδεώδες του υποδακτυλίου  $\text{Im}(f)$  του  $S$  και υπάρχει ένας ισομορφισμός δακτυλίων:

$$R/I \xrightarrow{\cong} \text{Im}(f)/f(I)$$

Ιδιαίτερα αν ο  $f$  είναι επιμορφισμός, τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός δακτυλίων:  $R/I \cong S/f(I)$ .

- (2) Αν  $K$  είναι ένα ιδεώδες του  $\text{Im}(f)$ , να δειχθεί ότι το υποσύνολο  $f^{-1}(K)$  είναι ένα ιδεώδες του δακτυλίου  $R$  και υπάρχει ένας ισομορφισμός δακτυλίων:

$$R/f^{-1}(K) \xrightarrow{\cong} \text{Im}(f)/K$$

Ιδιαίτερα αν ο  $f$  είναι επιμορφισμός, τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός δακτυλίων:  $R/f^{-1}(K) \cong S/K$ .

- Άσκηση 1.30.** (1) Να δειχθεί ότι το σύνολο

$$\mathbb{Q}[\sqrt{10}] := \{a + b\sqrt{10} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

είναι υποδακτύλιος του  $\mathbb{R}$ .

- (2) Να δειχθεί ότι το σύνολο

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} x + 2y & 3y \\ 2y & x - 2y \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}) \mid x, y \in \mathbb{Q} \right\}$$

είναι ένα υποδακτύλιος του  $M_2(\mathbb{Q})$ .

- (3) Να κατασκευάσετε έναν ισομορφισμό δακτυλίων

$$\mathbb{Q}[\sqrt{10}] \xrightarrow{\cong} R$$

- (4) Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος  $R$ , άρα και ο δακτύλιος  $\mathbb{Q}[\sqrt{10}]$ , είναι σώμα.

- Άσκηση 1.31.** (1) Να δειχθεί ότι το σύνολο

$$\mathbb{Q}[\sqrt{-3}] := \{a + bi\sqrt{3} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

είναι υποδακτύλιος του  $\mathbb{C}$  ο οποίος είναι σώμα.

- (2) Να δειχθεί ότι το σύνολο

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} x + y & 4y \\ -y & x - y \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}) \mid x, y \in \mathbb{Q} \right\}$$

είναι ένα υποδακτύλιος του  $M_2(\mathbb{Q})$ .

- (3) Να δειχθεί ότι το σύνολο

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x + y \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}) \mid x, y \in \mathbb{Q} \right\}$$

είναι ένα υποδακτύλιος του  $M_2(\mathbb{Q})$ .

- (4) Να κατασκευάσετε έναν ισομορφισμό δακτυλίων

$$\mathbb{Q}[\sqrt{-3}] \xrightarrow{\cong} R$$

- (5) Να κατασκευάσετε έναν ισομορφισμό δακτυλίων

$$\mathbb{Q}[\sqrt{-3}] \xrightarrow{\cong} S$$

- (6) Να κατασκευάσετε έναν ισομορφισμό δακτυλίων

$$R \xrightarrow{\cong} S$$

- Άσκηση 1.32.** Να δειχθεί ότι κάθε μη-μηδενικό ιδεώδες του δακτυλίου  $\mathbb{Z}[i]$  των ακεραίων του Gauss περιέχει έναν θετικό ακέραιο αριθμό.

**Άσκηση 1.33.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος και  $S$  ένα μη-κενό υποσύνολο του  $R$ . Το σύνολο

$$\text{ann}_r(S) = \{r \in R \mid sr = 0, \forall s \in S\}$$

καλείται ο **δεξιός μηδενιστής** του  $S$  στον  $R$ , και το σύνολο

$$\text{ann}_l(S) = \{r \in R \mid rs = 0, \forall s \in S\}$$

καλείται ο **αριστερός μηδενιστής** του  $S$  στον  $R$ .

- (1) Ναδειχθεί ότι ο δεξιός μηδενιστής  $\text{ann}_r(S)$  είναι δεξιό ιδεώδες, και ο αριστερός μηδενιστής  $\text{ann}_l(S)$  είναι αριστερό ιδεώδες.
- (2) Αν το υποσύνολο  $S$  είναι δεξιό ιδεώδες, τότε ο δεξιός μηδενιστής  $\text{ann}_r(S)$  είναι ιδεώδες, και αν το υποσύνολο  $S$  είναι αριστερό ιδεώδες, τότε ο αριστερός μηδενιστής  $\text{ann}_l(S)$  είναι ιδεώδες.
- (3) Αν  $T$  είναι ένα επίσης μη-κενό υποσύνολο του  $R$ , και ισχύει  $S \subseteq T$ , ναδειχθεί ότι:

$$\text{ann}_r(T) \subseteq \text{ann}_r(S) \quad \& \quad \text{ann}_l(T) \subseteq \text{ann}_l(S)$$

- (4) Ναδειχθούν οι εγκλίσεις:

$$S \subseteq \text{ann}_r(\text{ann}_l(S)) \quad \& \quad S \subseteq \text{ann}_l(\text{ann}_r(S))$$

- (5) Αν  $A = \text{ann}_r(S)$  και  $B = \text{ann}_l(S)$ , τότε:

$$A = \text{ann}_r(\text{ann}_l(A)) \quad \& \quad B = \text{ann}_l(\text{ann}_r(B))$$

**Άσκηση 1.34.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος.

- (1) Αν  $x, y$  είναι στοιχεία του  $R$  και το στοιχείο  $xy$  είναι αντιστρέψιμο, είναι τα στοιχεία  $x, y$  αντιστρέψιμα;
- (2) Αν το στοιχείο  $x^n$ ,  $n \geq 1$ , είναι αντιστρέψιμο, ναδειχθεί ότι το  $x$  είναι αντιστρέψιμο.
- (3) Αν το στοιχείο  $x$  είναι αριστερά αντιστρέψιμο (δηλαδή υπάρχει  $z \in R$  έτσι ώστε  $zx = 1$ ) και δεν είναι δεξιός διαιρέτης του μηδενός (δηλαδή  $zx = 0 \implies z = 0$ ), ναδειχθεί ότι το  $x$  είναι αντιστρέψιμο.
- (4) Αν το στοιχείο  $x$  είναι αριστερά αντιστρέψιμο, ναδειχθεί ότι το  $x$  δεν μπορεί να είναι αριστερός διαιρέτης του μηδενός.

Ένας δακτύλιος  $R$  καλείται **πεπερασμένος κατά Dedekind** αν,  $\forall x, y \in R$ :

$$xy = 1_R \implies yx = 1_R$$

Προφανώς μεταθετικοί δακτύλιοι και δακτύλιοι διαίρεσης είναι πεπερασμένοι κατά Dedekind. Όπως γνωρίζουμε από την Γραμμική Άλγεβρα, ο δακτύλιος  $M_n(\mathbb{K})$  των  $n \times n$  πινάκων υπεράνω ενός σώματος  $\mathbb{K}$  είναι πεπερασμένος κατά Dedekind.

**Άσκηση 1.35.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος.

- (1) Αν ο δακτύλιος  $R$  είναι πεπερασμένος, ναδειχθεί ότι ο  $R$  είναι πεπερασμένος κατά Dedekind.
- (2) Αν ο  $R$  δεν έχει διαιρέτες του μηδενός, ναδειχθεί ότι ο  $R$  είναι πεπερασμένος κατά Dedekind.
- (3) Έστω  $\mathcal{V}$  ένας  $\mathbb{K}$ -διανυσματικός χώρος άπειρης διάστασης υπεράνω ενός σώματος  $\mathbb{K}$ . Έστω ο δακτύλιος  $\text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V})$  των  $\mathbb{K}$ -γραμμικών απεικονίσεων  $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ . Ναδειχθεί ότι ο δακτύλιος  $\text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V})$  δεν είναι πεπερασμένος κατά Dedekind.

**Άσκηση 1.36.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος, και  $x, y$  δύο στοιχεία του. Ναδειχθεί ότι το  $1 - xy$  είναι αντιστρέψιμο αν και μόνον αν το στοιχείο  $1 - yx$  είναι αντιστρέψιμο.

Ένας δακτύλιος  $R$  καλείται **κανονικός με την έννοια του Von Neumann** αν για κάθε στοιχείο  $a$  του  $R$  υπάρχει στοιχείο  $x$  του  $R$  έτσι ώστε:  $a = axa$ . Αν το στοιχείο  $x$  (το οποίο γενικά εξαρτάται από το  $a$ ) μπορεί



πάντα να επιλεγεί να είναι αντιπρόσθετο, τότε ο  $R$  καλείται **αντισπρόσθετο κανονικός με την έννοια του Von Neumann**.

**Άσκηση 1.37.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος.

- (1) Αν ο  $R$  είναι αντισπρόσθετο κανονικός με την έννοια του Von Neumann, ναδειχθεί ότι ο  $R$  είναι πεπερασμένος κατά Dedekind.
- (2) Ναδειχθεί με ένα (αντι)παράδειγμα ότι αν ο  $R$  είναι κανονικός με την έννοια του Von Neumann, αλλά όχι αντισπρόσθετο κανονικός, τότε ο  $R$  δεν είναι απαραίτητα πεπερασμένος κατά Dedekind.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Δείξτε ότι ο δακτύλιος  $\text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V})$  των  $\mathbb{K}$ -γραμμικών απεικονίσεων  $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ , όπου  $\mathcal{V}$  είναι ένας διανυσματικός χώρος άπειρης διάστασης υπεράνω ενός σώματος  $\mathbb{K}$ , είναι κανονικός με την έννοια του Von Neumann και χρησιμοποιήστε την Άσκηση 1.35.

**Άσκηση 1.38.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος ο οποίος ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα<sup>2</sup>: αν

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \cdots$$

είναι μια αύξουσα ακολουθία δεξιών ιδεωδών του  $R$ , τότε υπάρχει  $m \in \mathbb{N}$ , έτσι ώστε:  $I_m = I_{m+1} = \cdots$ .

Ναδειχθεί ότι ο  $R$  είναι πεπερασμένος κατά Dedekind.

**Άσκηση 1.39.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος, και  $x, y$  δύο στοιχεία του.

- (1) Αν  $Rx = Ry$ , ναδειχθεί με ένα (αντι)παράδειγμα ότι δεν είναι απαραίτητο ότι θα έχουμε:  $xR = yR$ .
- (2) Αν  $Rx = Ry$ , ναδειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός ομάδων

$$f: xR \rightarrow yR, \quad \text{έτσι ώστε} \quad f(x) = y \quad \& \quad f(mr) = f(m)r, \quad \forall m \in xR$$

**Άσκηση 1.40.** Ένα στοιχείο  $r$  σε έναν δακτύλιο με μονάδα  $R$  καλείται **ταυτοδύναμο** αν  $r^2 = r$ . Το στοιχείο  $r$  καλείται **μηδενοδύναμο** αν υπάρχει θετικός ακέραιος  $k$  έτσι ώστε  $r^k = 0$ .

- (1) Να βρεθούν όλα τα ταυτοδύναμα στοιχεία του δακτυλίου  $\mathbb{Z}_n$ .
- (2) Δείξτε ότι αν ο δακτύλιος  $R$  είναι μεταθετικός, τότε το σύνολο

$$\sqrt{0} = \{r \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : r^n = 0\}$$

των μηδενοδύναμων στοιχείων του  $R$  είναι ένα ιδεώδες του  $R$ .

- (3) Να υπολογισθεί το ιδεώδες  $\sqrt{0}$  των μηδενοδύναμων στοιχείων του δακτυλίου  $\mathbb{Z}_n$ .

**Άσκηση 1.41.** Έστω  $\mathbb{K}$  ένα σώμα.

- (1) Να βρεθούν όλα τα ταυτοδύναμα στοιχεία του δακτυλίου  $M_2(\mathbb{K})$  των  $2 \times 2$  πινάκων με στοιχεία από το  $\mathbb{K}$ .
- (2) Να βρεθούν όλα τα ταυτοδύναμα στοιχεία του δακτυλίου  $T_2(\mathbb{K})$  των  $2 \times 2$  άνω τριγωνικών πινάκων με στοιχεία από το  $\mathbb{K}$ .
- (3) Να βρεθούν όλα τα μηδενοδύναμα στοιχεία του δακτυλίου  $T_2(\mathbb{K})$  των  $2 \times 2$  πινάκων με στοιχεία από το  $\mathbb{K}$ .
- (4) Αν  $I$  είναι το σύνολο όλων των μηδενοδύναμων στοιχείων του  $T_2(\mathbb{K})$ , ναδειχθεί ότι το  $I$  είναι ένα ιδεώδες του  $T_2(\mathbb{K})$  και ο δακτύλιος πηλίκο  $T_2(\mathbb{K})/I$  είναι ημιαπλός.

**Άσκηση 1.42.** Έστω  $\mathcal{C}([0, 1])$  ο δακτύλιος των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων επί του  $[0, 1]$ .

<sup>2</sup>Ένας δακτύλιος ο οποίος ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα καλείται **δεξιός δακτύλιος της Noether**.

- (1) Να δειχθεί ότι το στοιχείο  $f \in \mathcal{C}([0, 1])$  είναι διαφέτης του μηδενός αν και μόνον αν υπάρχει ανοιχτό διάστημα  $(a, b) \subseteq [0, 1]$  έτσι ώστε ο περιορισμός της  $f$  στο διάστημα  $(a, b)$  να είναι η μηδενική συνάρτηση:  $f|_{(a,b)} = 0$ .
- (2) Βρείτε όλα τα ταυτοδύναμο στοιχεία του δακτυλίου  $\mathcal{C}([0, 1])$ .
- (3) Βρείτε όλα τα μηδενοδύναμο στοιχεία του δακτυλίου  $\mathcal{C}([0, 1])$ .

**Άσκηση 1.43.** Έστω  $e^2 = e \in R$  ένα ταυτοδύναμο στοιχείο του δακτυλίου  $R$ .

- (1) Αν  $L$  είναι ένα αριστερό ιδεώδες του  $R$ , να δειχθεί ότι:

$$L \cap eR = eL$$

- (2) Αν  $I$  είναι ένα ιδεώδες του  $R$ , να δειχθεί ότι:

$$I \cap eRe = eIe$$

**Άσκηση 1.44.** Έστω  $e^2 = e \in R$  ένα ταυτοδύναμο στοιχείο του δακτυλίου  $R$ , και θεωρούμε τον δακτύλιο  $eRe$  με μονάδα  $1_{eRe} = e$ . Να δειχθεί ότι η απεικόνιση

$$\Phi : \{I \subseteq R \mid I : \text{ιδεώδες του } R\} \longrightarrow \{J \subseteq eRe \mid J : \text{ιδεώδες του } eRe\}, \quad \Phi(I) = eIe$$

είναι «επί».

Να δειχθεί ότι η απεικόνιση  $\Phi$  δεν είναι γενικά «1-1».

**Άσκηση 1.45.** Αν  $R$  είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα, και  $I$  είναι ένα ιδεώδες του  $R$ , δείξτε ότι το σύνολο

$$\sqrt{I} = \{r \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : r^n \in I\}$$

είναι ένα ιδεώδες του  $R$  το οποίο καλείται το **ριζικό του  $I$** . Ιδιαίτερα, αν  $I = 0$  είναι το μηδενικό ιδεώδες του  $R$ , τότε το σύνολο  $\sqrt{0}$  είναι το ιδεώδες των μηδενοδύναμων στοιχείων του  $R$ <sup>3</sup>.

Επιπλέον να δειχθεί ότι ο δακτύλιος-πηλίκο  $R/\sqrt{I}$  δεν έχει μη-μηδενικά μηδενοδύναμο στοιχεία.

**Άσκηση 1.46.** Έστω  $R$  ένας μεταθετικός δακτύλιος, και έστω  $R[x]$  ο δακτύλιος πολυωνύμων μιας μεταβλητής υπεράνω του  $R$ . Έστω  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \in R[x]$ . Να δειχθεί ότι:

$$p(x) \in \mathcal{U}(R[x]) \iff a_0 \in \mathcal{U}(R) \ \& \ a_i \in \sqrt{0}$$

όπου για έναν δακτύλιο  $S$ ,  $\mathcal{U}(S)$  συμβολίζει την ομάδα των αντιστρεψίμων στοιχείων του  $S$  και  $\sqrt{0}$  είναι το μηδενοριζικό του  $R$ , όπως ορίστηκε στην Άσκηση 1.45.

**Άσκηση 1.47.** Αν  $R$  είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα, και  $I, J$  είναι ιδεώδη του  $R$ . Τότε με τους συμβολισμούς της Άσκησης 1.45, να δειχθεί ότι:

$$\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}, \quad \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}, \quad \sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$$

**Άσκηση 1.48.** Έστω  $I$  και  $J$  δύο ιδεώδη σε έναν δακτύλιο  $R$ .

- (1) Να δειχθεί ότι  $I \cdot J \subseteq I \cap J$ .

- (2) Να δειχθεί ότι κάθε στοιχείο του ιδεώδους  $(I \cap J)/I \cdot J$  του δακτυλίου πηλίκο  $R/I \cdot J$  είναι μηδενοδύναμο.

<sup>3</sup>Το ιδεώδες  $\sqrt{0}$  καλείται το μηδενοριζικό (nilradical) ιδεώδες του  $R$  συμβολίζεται και με  $\text{nilrad}(R)$ .

- (3) Με ένα (αντι)παράδειγμα να δείχθει ότι γενικά  $I \cap J \not\subseteq I \cdot J$ .  
 (4) Αν  $I + J = R$ , να δείχθει ότι  $I \cdot J = I \cap J$  και επιπλέον υπάρχει ισομορφισμός δακτυλίων

$$R/(I \cdot J) \cong R/I \times R/J$$

**Άσκηση 1.49.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος με μονάδα, και έστω  $M_n(R)$  ο δακτύλιος των  $n \times n$  πινάκων υπεράνω του  $R$ .

- (1) Δείξτε ότι το σύνολο

$$T_n(R) = \{A = (a_{ij}) \in M_n(R) \mid a_{ij} = 0, \forall i > j\}$$

των άνω τριγωνικών πινάκων υπεράνω του  $R$  είναι ένας υποδακτύλιος του  $M_n(R)$ .

- (2) Βρείτε ένα ιδεώδες  $I$  του δακτυλίου  $T_n(R)$  το οποίο δεν είναι ιδεώδες του  $M_n(R)$ .  
 (3) Βρείτε ένα ιδεώδες  $J$  του δακτυλίου  $T_n(R)$  έτσι ώστε

$$T_n(R)/J \cong R \times R \times \cdots \times R \quad (n \text{ παράγοντες})$$

**Άσκηση 1.50.** Να εξετάσετε αν το υποσύνολο  $R$  είναι υποδακτύλιος του  $\mathbb{C}$ , στις παρακάτω περιπτώσεις:

- (1)  $R = \{m + ni \in \mathbb{C} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ .  
 (2)  $R = \{m + n\sqrt{d} \in \mathbb{C} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ , όπου  $d$  είναι ένας μη-αρνητικός ακέραιος ο οποίος δεν διαιρείται από τετράγωνο ακέραιου αριθμού.  
 (3)  $R = \{m + n\sqrt[3]{5} \in \mathbb{C} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ .

Σε περίπτωση κατά την οποία ο  $R$  είναι υποδακτύλιος του  $\mathbb{C}$ , να περιγραφεί η ομάδα  $U(R)$  των αντιστρεψίμων στοιχείων του.

**Άσκηση 1.51.** Να δείχθει ότι το ακόλουθο υποσύνολο

$$R = \left\{ \frac{a}{2^n} \in \mathbb{Q} \mid a = 0 \text{ ή } a : \text{ περιττός, } n \in \mathbb{Z} \right\}$$

είναι υποδακτύλιος του  $\mathbb{Q}$  και ακολογηθώς να βρεθεί η ομάδα  $U(R)$  των αντιστρέψιμων στοιχείων του  $R$ .

**Άσκηση 1.52.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος ο οποίος δεν έχει απαραίτητα μονάδα.

- (1) Να δείχθει ότι η αβελιανή ομάδα

$$\mathbb{Z} \times R = \{(n, r) \mid n \in \mathbb{Z} \text{ \& } r \in R\}$$

δηλαδή το ευθύ γινόμενο των προσθετικών ομάδων  $(\mathbb{Z}, +)$  και  $(R, +)$ , αποτελεί δακτύλιο με μονάδα αν εφοδιασθεί με την ακόλουθη πράξη πολλαπλασιασμού

$$(n, r) \cdot (m, s) = (nm, ns + rm + rs)$$

- (2) Να δείχθει ότι ο δακτύλιος χωρίς μονάδα  $R$  είναι ισόμορφος, ως δακτύλιος χωρίς μονάδα, με ένα ιδεώδες  $I$  του δακτυλίου με μονάδα  $\mathbb{Z} \times R$ , και έχουμε έναν ισομορφισμό δακτυλίων με μονάδα:

$$(\mathbb{Z} \times R)/I \cong \mathbb{Z}$$

- (3) Να δείχθει ότι ο δακτύλιος χωρίς μονάδα  $R$  εμφυτεύεται στον δακτύλιο με μονάδα  $\mathbb{Z} \times R$ , δηλαδή υπάρχει ένας μονομορφισμός δακτυλίων  $R \rightarrow \mathbb{Z} \times R$ .

**Άσκηση 1.53.** Με τους συμβολισμούς της προηγούμενης Άσκησης 1.52, να δείχθούν τα ακόλουθα:

- (1) Για κάθε πρώτο αριθμό  $p$ , να βρεθεί μέγιστο ιδεώδες  $\mathfrak{M}_p$  του δακτυλίου  $\mathbb{Z} \times R$  έτσι ώστε:

$$(\mathbb{Z} \times R)/\mathfrak{M}_p \cong \mathbb{Z}_p$$

- (2) Αν ο δακτύλιος χωρίς μονάδα  $R$  δεν έχει διαιρέτες του μηδενός, δηλαδή  $xy = 0 \Rightarrow x = 0$  ή  $y = 0$ , ναδειχθεί ότι ο  $R$  εμφυτεύεται σε έναν δακτύλιο με μονάδα ο οποίος δεν έχει διαιρέτες του μηδενός, ως εξής: το σύνολο

$$I = \{z \in \mathbb{Z} \times R \mid z(0, r) = 0, \forall r \in R\}$$

είναι ένα ιδεώδες του  $\mathbb{Z} \times R$  και ο δακτύλιος πηλίκο  $(\mathbb{Z} \times R)/I$  δεν έχει διαιρέτες του μηδενός. Επιπλέον η απεικόνιση  $f: R \rightarrow (\mathbb{Z} \times R)/I$  είναι ένα ομομορφισμός δακτυλίων.

- (3) Ποιά είναι η σχέση των δακτυλίων  $R$  και  $\mathbb{Z} \times R$ , αν ο δακτύλιος  $R$  έχει μονάδα;

**Άσκηση 1.54.** Αν  $R$  είναι ένας δακτύλιος, όχι απαραίτητα με μονάδα, ο οποίος έχει ακριβώς δύο δεξιά (ή αριστερά) ιδεώδη. Ναδειχθεί ότι: είτε ο  $R$  είναι δακτύλιος διαίρεσης είτε ο  $R$  έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων (ίσο με έναν πρώτο αριθμό  $p$ ) και τετριμμένο πολλαπλασιασμό:  $xy = 0, \forall x, y \in R$ .

**Άσκηση 1.55.** Έστω  $f: R \rightarrow S$  ένας ομομορφισμός μεταξύ μεταθετικών δακτυλίων με μονάδα.

- (1) Ναδειχθεί ότι για κάθε πρώτο ιδεώδες  $P$  του  $S$ , το ιδεώδες  $f^{-1}(P)$  είναι πρώτο ιδεώδες του  $R$ .
- (2) Ναδειχθεί ότι γενικά δεν είναι αληθές ότι για κάθε μέγιστο ιδεώδες  $M$  του  $S$ , το ιδεώδες  $f^{-1}(M)$  είναι μέγιστο ιδεώδες του  $R$ .
- (3) Ναδειχθεί ότι αν ο ομομορφισμός δακτυλίων  $f$  είναι επιμορφισμός, τότε για κάθε μέγιστο ιδεώδες  $M$  του  $S$ , το ιδεώδες  $f^{-1}(M)$  είναι μέγιστο ιδεώδες του  $R$ .

**Άσκηση 1.56.** Έστω  $\mathbb{K}$  ένας δακτύλιος. Θεωρούμε τον δακτύλιο  $M_2(\mathbb{K})$ , και τον υποδακτύλιο  $AT_2(\mathbb{K})$  των  $2 \times 2$  άνω τριγωνικών πινάκων υπεράνω του  $\mathbb{K}$ . Έστω  $\iota: AT_2(\mathbb{K}) \rightarrow M_2(\mathbb{K})$  η κανονική εισαγωγή η οποία είναι μονομορφισμός δακτυλίων.

- (1) Ναδειχθεί ότι το μηδενικό ιδεώδες  $\{0\}$  του  $M_2(\mathbb{K})$  είναι πρώτο ιδεώδες.
- (2) Το ιδεώδες  $\{0\} = \iota^{-1}(\{0\})$  δεν είναι πρώτο ιδεώδες του  $AT_2(\mathbb{K})$ .

Επομένως το μέρος (1) της Άσκησης 1.55 δεν ισχύει για μη-μεταθετικούς δακτυλίους.

**Άσκηση 1.57.** Έστω  $R$  ένας μεταθετικός δακτύλιος. Ναδειχθεί ότι οι δακτύλιοι  $R$  και  $M_n(R)$  είναι ισόμορφοι αν και μόνον αν  $n = 1$ .

Ισχύει το συμπέρασμα αν ο δακτύλιος  $R$  δεν είναι μεταθετικός;

**Άσκηση 1.58.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος με μονάδα και  $M$  ένα μέγιστο δεξιό ιδεώδες του  $R$ . Αν  $x \in R \setminus M$ , ναδειχθεί ότι το σύνολο

$$x^{-1}M := \{r \in R \mid xr \in M\}$$

είναι ένα μέγιστο δεξιό ιδεώδες του  $R$ . Τι συμβαίνει αν ο δακτύλιος είναι μεταθετικός ή γενικότερα αν το ιδεώδες  $M$  είναι μέγιστο διπλό ιδεώδες;

**Άσκηση 1.59.** Έστω  $\mathbb{Z}[i]$  ο δακτύλιος των ακεραίων του Gauss και  $p$  ένας πρώτος αριθμός. Στον  $\mathbb{Z}_p$ -διανυσματικό χώρο  $\mathbb{Z}_p^2 = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$  ορίζουμε πολλαπλασιασμό ως εξής:

$$(x, y) \cdot (z, w) = (xz - yw, xw + yz)$$

- (1) Ναδειχθεί ότι η τριάδα  $(\mathbb{Z}_p^2, +, \cdot)$  είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα  $1 = ([1]_p, [0]_p)$  ο οποίος συμβολίζεται ως εξής:  $\mathbb{Z}_p(i)$ . Εδώ  $i := ([0]_p, [1]_p)$  και τότε ισχύει  $i^2 = -1$ .

(2) Ναδειχθεί ότι υπάρχουν ισομορφισμοί δακτυλίων

$$\mathbb{Z}[i]/(p) \cong \mathbb{Z}_p(i) \cong \mathbb{Z}_p[x]/(x^2 + 1)$$

όπου  $(p)$  είναι το κύριο ιδεώδες του  $\mathbb{Z}[i]$  το οποίο παράγεται από το  $p \in \mathbb{Z}[i]$  και  $(x^2 + 1)$  το κύριο ιδεώδες του  $\mathbb{Z}_p[x]$  το οποίο παράγεται από το πολυώνυμο  $x^2 + 1$ .

(3) Να συμπεράνετε ότι το ιδεώδες  $(p)$  είναι μέγιστο ιδεώδες του  $\mathbb{Z}[i]$  αν και μόνον αν το πολυώνυμο  $x^2 + 1$  είναι ανάγωγο υπεράνω του  $\mathbb{Z}_p$  αν και μόνον αν ο δακτύλιος  $\mathbb{Z}_p(i)$  είναι σώμα.

Να εξετάσετε αν τα κύρια ιδεώδη (2) και (5) του  $\mathbb{Z}[i]$  είναι μέγιστα.

**Άσκηση 1.60.** (1) Έστω  $\mathcal{C}(X)$  ο δακτύλιος των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , επί ενός τοπολογικού χώρου  $X$ , π.χ.  $X = [0, 1]$ . Ναδειχθεί ότι η τομή όλων των μέγιστων ιδεωδών του  $\mathcal{C}(X)$  είναι το μηδενικό ιδεώδες.

(2) Ναδειχθεί ότι η τομή όλων των μέγιστων ιδεωδών του  $\mathbb{Z}$  είναι το μηδενικό ιδεώδες.

**Άσκηση 1.61.** Έστω  $p$  ένας πρώτος αριθμός και

$$\mathbb{Q}_{(p)} = \left\{ \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid m \right\}$$

Δείξτε ότι το σύνολο  $\mathbb{Q}_{(p)}$  είναι ένας υποδακτύλιος του  $\mathbb{Q}$ , και τα ιδεώδη του είναι τα ακόλουθα

$$\{0\}, \quad (p^k) = \{p^k x \in \mathbb{Q}_{(p)} \mid x \in \mathbb{Q}_{(p)}\}, \quad \forall k \geq 1$$

και μόνον αυτά.

Επίσης ναδειχθεί ότι ο δακτύλιος  $\mathbb{Q}_{(p)}$  έχει ακριβώς ένα μέγιστο ιδεώδες το οποίο και να προσδιορισθεί.

**Άσκηση 1.62.** Θεωρούμε τον δακτύλιο

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

των ακεραίων του Gauss. Θεωρούμε το κύριο ιδεώδες  $(1 + 3i)$  το οποίο παράγεται από το στοιχείο  $1 + 3i$ . Να προσδιορισθεί ο δακτύλιος πηλίκο  $\mathbb{Z}[i]/(1 + 3i)$ .

**Άσκηση 1.63.** Έστω  $M_2(\mathbb{Z})$  ο δακτύλιος των  $2 \times 2$  πινάκων υπεράνω του  $\mathbb{Z}$ ,  $p$  ένας πρώτος αριθμός, και θεωρούμε το υποσύνολό του:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \mid a, b, c, d \in p\mathbb{Z} \right\}$$

Ναδειχθεί ότι το  $M$  είναι ένα μέγιστο ιδεώδες του  $M_2(\mathbb{Z})$ , αλλά ο δακτύλιος πηλίκο  $M_2(\mathbb{Z})/M$  δεν είναι σώμα.

**Άσκηση 1.64.** Θεωρούμε τον δακτύλιο

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

των ακεραίων του Gauss.

(1) Ναδειχθεί ότι τα κύρια ιδεώδη (3) και  $(1 + i)$  είναι πρώτα και μέγιστα ιδεώδη του  $\mathbb{Z}[i]$ .

(2) Ναδειχθεί ότι το κύριο ιδεώδες (2) δεν είναι πρώτο ούτε μέγιστο ιδεώδες του  $\mathbb{Z}[i]$ .

**Άσκηση 1.65.** Έστω  $R$  ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα. Δείξτε ότι κάθε πρώτο ιδεώδες είναι μέγιστο σε κάθε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- (1) Ο δακτύλιος  $R$  είναι δακτύλιος του Boole, δηλαδή κάθε στοιχείο του  $R$  είναι ταυτοδύναμο.
- (2) Ο δακτύλιος  $R$  έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων ή γενικότερα αν ο  $R$  έχει πεπερασμένο πλήθος ιδεωδών.
- (3) Ο δακτύλιος  $R$  είναι μια περιοχή κυρίων ιδεωδών.

Βρείτε άφθιτες κλάσεις δακτυλίων  $R$  για τους οποίους κάθε πρώτο ιδεώδες είναι μέγιστο (δείτε και την παρακάτω Άσκηση 1.66).

**Άσκηση 1.66.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος ο οποίος ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη:

$$\forall x \in R, \exists n(x) > 1 : x^{n(x)} = x$$

Χρησιμοποιώντας ένα Θεώρημα του Jacobson το οποίο πιστοποιεί ότι κάθε τέτοιος δακτύλιος είναι μεταθετικός, ναδειχθεί ότι κάθε πρώτο ιδεώδες του  $R$  είναι μέγιστο.

**Άσκηση 1.67.** Θεωρούμε τον μεταθετικό δακτύλιο με μονάδα

$$\mathcal{C}([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f : \text{συνεχής}\}$$

Για κάθε υποσύνολο  $X \subseteq [0, 1]$ , ορίζουμε

$$Z_X = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid f(x) = 0, \forall x \in X\}$$

- (1) Δείξτε ότι για κάθε  $X \subseteq [0, 1]$ , το υποσύνολο  $Z_X$  είναι ιδεώδες του  $\mathcal{C}([0, 1])$ .
- (2) Δείξτε ότι αν το υποσύνολο  $X$  είναι μονοσύνολο, τότε το  $Z_X$  είναι μέγιστο ιδεώδες του  $\mathcal{C}([0, 1])$ .
- (3) Έστω  $X_1 = [0, \frac{1}{2}]$  και  $X_2 = [\frac{1}{2}, 1]$ , και έστω τα ιδεώδη  $I_1 = Z_{X_1}$  και  $I_2 = Z_{X_2}$ . Ναδειχθεί ότι:

$$I_1 I_2 = 0 = I_1 \cap I_2$$

**Άσκηση 1.68.** Βρείτε όλα τα ιδεώδη του δακτυλίου  $T_2(\mathbb{K})$  των  $2 \times 2$  άνω τριγωνικών πινάκων υπεράνω ενός σώματος  $\mathbb{K}$ . Ποιά από αυτά είναι μέγιστα και ποιά πρώτα ιδεώδη του  $T_2(\mathbb{K})$ ;

**Άσκηση 1.69.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος με μονάδα. Ναδειχθεί ότι αν το σύνολο

$$I = \{r \in R \mid r \in R \setminus U(R)\}$$

των μη-αντιστρεψίμων στοιχείων του είναι ιδεώδες του  $R$ , τότε ο πηλίκο  $R/I$  είναι δακτύλιος διαίρεσης. Σ' αυτή την περίπτωση δείξτε ότι για κάθε στοιχείο  $r \in R$ : είτε  $r \in U(R)$  ή  $1 - r \in U(R)$ .

Δείξτε ότι το σύνολο  $R \setminus U(R)$  είναι ιδεώδες, το οποίο να προσδιορισθεί, στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- (1)  $R = \mathbb{K}[[x]]$  είναι ο δακτύλιος των τυπικών δυναμοσειρών υπεράνω ενός σώματος  $\mathbb{K}$ .
- (2)  $R = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ , όπου  $p$  είναι ένας πρώτος αριθμός.
- (3)  $R = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ , όπου  $p$  είναι ένας πρώτος αριθμός,  $n \geq 3$ .
- (4)  $R = \mathbb{K}[x]/(x^2)$  όπου  $\mathbb{K}$  είναι ένα σώμα.

Είναι το σύνολο  $R \setminus U(R)$  ιδεώδες, όταν  $R = \mathbb{K}[x]/(x^n)$ ,  $n \geq 3$ ;

**Άσκηση 1.70.** Έστω  $\mathbb{K}$  ένα σώμα. Στον διανυσματικό χώρο  $\mathbb{K}^2$  ορίζουμε πράξη πολλαπλασιασμού ως εξής:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

- (1) Ναδειχθεί ότι με την παραπάνω πράξη πολλαπλασιασμού η αβελιανή ομάδα  $\mathbb{K}^2$  είναι δακτύλιος.
- (2) Ναδειχθεί ότι ο δακτύλιος  $\mathbb{K}^2$  είναι σώμα αν και μόνον αν δεν υπάρχει στοιχείο  $x \in \mathbb{K}$ :  $x^2 = -1$ .

- (3) Υποθέτουμε ότι υπάρχει στοιχείο  $x \in \mathbb{K}$ :  $x^2 = -1$ , και επιπλέον ότι η χαρακτηριστική του  $\mathbb{K}$  είναι 2, να δειχθεί ότι ο δακτύλιος  $\mathbb{K}^2$  είναι ισόμορφος με το ευθύ γινόμενο  $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ .

**Άσκηση 1.71.** Στον  $\mathbb{Z}_3$ -διανυσματικό χώρο  $\mathbb{Z}_3^2 = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$  ορίζουμε πράξη πολλαπλασιασμού ως εξής:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Να δειχθεί ότι η τριάδα  $(\mathbb{Z}_3^2, +, \cdot)$  είναι ένα σώμα με 9 στοιχεία.

- Άσκηση 1.72.** (1) Να περιγράψετε όλες τις  $\mathbb{C}$ -άλγεβρες<sup>4</sup> οι οποίες ως  $\mathbb{C}$ -διανυσματικοί χώροι έχουν διάσταση 2.  
 (2) Είναι η  $\mathbb{R}$ -άλγεβρα των τετρανίων του Hamilton μια  $\mathbb{C}$ -άλγεβρα;  
 (3) Να περιγράψετε όλες τις  $\mathbb{R}$ -άλγεβρες οι οποίες ως  $\mathbb{R}$ -διανυσματικοί χώροι έχουν διάσταση 2.

**Άσκηση 1.73.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος με μονάδα. Να δειχθεί ότι, για ένα στοιχείο  $a \in R$ , τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1)  $a \in U(R)$ .  
 (2)  $a \notin M$ , για κάθε μέγιστο (αριστερό ή δεξιό) ιδεώδες  $M$  του  $R$ .

**Άσκηση 1.74.** Έστω  $R, S$ , και  $T$  δακτύλιοι με μονάδα. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ομομορφισμοί δακτυλίων  $\varphi_R: T \rightarrow R$  και  $\varphi_S: T \rightarrow S$ , οι οποίοι ικανοποιούν την ακόλουθη ιδιότητα:

(\*) «Αν  $P$  είναι ένας δακτύλιος και  $\psi_R: P \rightarrow R$  και  $\psi_S: P \rightarrow S$ , είναι ομομορφισμοί δακτυλίων, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός δακτυλίων  $\psi: P \rightarrow T$  έτσι ώστε:  $\varphi_R \circ \psi = \psi_R$  και  $\varphi_S \circ \psi = \psi_S$ ».

Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός δακτυλίων  $\varphi: T \rightarrow R \times S$  έτσι ώστε:  $\pi_R \circ \varphi = \varphi_R$  και  $\pi_S \circ \varphi = \varphi_S$ . όπου  $\pi_R: R \times S \rightarrow R$  και  $\pi_S: R \times S \rightarrow S$  είναι οι κανονικές προβολές.

**Άσκηση 1.75.** Έστω  $\{R_i\}_{i \in I}$  μια οικογένεια δακτυλίων με μονάδα, και θεωρούμε τον δακτύλιο ευθύ γινόμενο

$$\prod_{i \in I} R_i = \{(r_i)_{i \in I} \mid r_i \in R_i, \forall i \in I\}$$

ο οποίος είναι εφοδιασμένος με επιμορφισμούς δακτυλίων,  $\forall j \in I$ :

$$\pi_j: \prod_{i \in I} R_i \rightarrow R_j, \quad \pi_j((r_i)_{i \in I}) = r_j$$

- (1) Ο δακτύλιος ευθύ γινόμενο  $\prod_{i \in I} R_i$  μαζί με την οικογένεια ομομορφισμών  $\{\pi_i: \prod_{i \in I} R_i \rightarrow R_i\}_{i \in I}$  ικανοποιεί την ακόλουθη «καθολική ιδιότητα»:

(\*) Αν  $T$  είναι ένας δακτύλιος και  $\phi_i: T \rightarrow R_i, i \in I$ , είναι μια οικογένεια ομομορφισμών δακτυλίων, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός δακτυλίων  $\phi: T \rightarrow \prod_{i \in I} R_i$  έτσι ώστε:  $\pi_i \circ \phi = \phi_i, \forall i \in I$ .

<sup>4</sup>Υπενθυμίζουμε ότι ένας δακτύλιος  $R = (R, +, \cdot)$  καλείται  $\mathbb{K}$ -άλγεβρα, όπου  $\mathbb{K}$  είναι ένα σώμα, αν υπάρχει απεικόνιση

$$\star: \mathbb{K} \times R \rightarrow R, \quad (k, r) \mapsto k \star r$$

έτσι ώστε η τριάδα  $(R, +, \star)$  είναι  $\mathbb{K}$ -διανυσματικός χώρος και επιπλέον:

$$\forall k \in \mathbb{K}, \forall r, s \in R: \quad k \star (r \cdot s) = (k \star r) \cdot s = r \cdot (k \star s)$$

- (2) Έστω  $S$  ένας δακτύλιος ο οποίος είναι εφοδιασμένος με μια οικογένεια ομομορφισμών δακτυλίων  $\{\phi_i: S \rightarrow R_i\}_{i \in I}$ , έτσι ώστε για κάθε άλλο δακτύλιο  $T$  και οικογένεια ομομορφισμών δακτυλίων  $\{\psi_i: T \rightarrow R_i\}_{i \in I}$ , υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός δακτυλίων  $\psi: T \rightarrow S$  έτσι ώστε:  $\phi_i \circ \psi = \psi_i$ ,  $\forall i \in I$ , δηλαδή ο  $T$  ικανοποιεί την ίδια «καθοδική» ιδιότητα την οποία ικανοποιεί ο δακτύλιος ευθύ γινόμενο  $\prod_{i \in I} R_i$ . Να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός δακτυλίων  $\phi: S \rightarrow \prod_{i \in I} R_i$ , έτσι ώστε:  $\pi_i \circ \phi = \phi_i$ ,  $\forall i \in I$ .

**Άσκηση 1.76.** Έστω το σώμα  $\mathbb{Z}_p$ , όπου  $p$  είναι ένας πρώτος αριθμός. Έχοντας ως μοντέλο την κατασκευή του δακτυλίου των τετρανίων του Hamilton, να ορίσετε πολλαπλασιασμό « $\cdot$ » στον  $\mathbb{Z}_p$ -διανυσματικό χώρο

$$\mathbb{Z}_p^4 = \{(a_0, a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in \mathbb{Z}_p, 0 \leq i \leq 3\}$$

έτσι ώστε, αν:

$$\mathbf{1} = ([1]_p, [0]_p, [0]_p, [0]_p), \quad \mathbf{i} = ([0]_p, [1]_p, [0]_p, [0]_p), \quad \mathbf{j} = ([0]_p, [0]_p, [1]_p, [0]_p), \quad \mathbf{k} = ([0]_p, [0]_p, [0]_p, [1]_p),$$

είναι η συνήθης βάση του  $\mathbb{Z}_p^4$  υπεράνω του  $\mathbb{Z}_p$ , να ισχύει:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1}, \quad \mathbf{ij} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{ji} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{kj} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{ik} = -\mathbf{j}$$

και η τριάδα  $\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p) = (\mathbb{Z}_p^4, +, \cdot)$  να είναι δακτύλιος με μονάδα.

- (1) Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος  $\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)$  είναι ένας απλός δακτύλιος με πλήθος στοιχείων  $p^4$ .
- (2) Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος  $\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)$  δεν είναι δακτύλιος διαίρεσης.

**Άσκηση 1.77.** Αν  $\mathbb{H}$  είναι ο δακτύλιος διαίρεσης των τετρανίων του Hamilton, να δειχθεί ότι το σύνολο  $Q = \{\pm \mathbf{1}, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\}$  είναι μια μη-αβελιανή υποομάδα της πολλαπλασιαστικής ομάδα  $\mathbb{H}^* = U(\mathbb{H})$ , η οποία έχει την ιδιότητα ότι κάθε γνήσια υποομάδα της είναι αβελιανή και κανονική.

**Άσκηση 1.78.** Έστω  $\mathbb{H} := \mathbb{H}(\mathbb{R}) = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$  ο δακτύλιος διαίρεσης των τετρανίων του Hamilton, όπου  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ . Θεωρούμε τα υποσύνολα

$$\mathbb{H}(\mathbb{Q}) = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\} \quad \text{και} \quad \mathbb{H}(\mathbb{Z}) = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$$

- (1) Να δειχθεί ότι το υποσύνολο  $\mathbb{H}(\mathbb{Q})$  είναι μια άλγεβρα διαίρεσης διάστασης 4 υπεράνω του  $\mathbb{Q}$ .
- (2) Να δειχθεί ότι το υποσύνολο  $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$  είναι ένας υποδακτύλιος του  $\mathbb{H}(\mathbb{Q})$  ο οποίος δεν είναι δακτύλιος διαίρεσης.
- (3) Να δειχθεί ότι η ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων  $U(\mathbb{H}(\mathbb{Z}))$  του υποδακτυλίου  $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$  είναι η ομάδα των τετρανίων του Hamilton:

$$U(\mathbb{H}(\mathbb{Z})) = \{\pm \mathbf{1}, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\}$$

**Άσκηση 1.79.** Με τους συμβολισμούς της Άσκησης 1.76, θεωρούμε το υποσύνολο

$$R = \left\{ \frac{a + bi + cj + dk}{2} \in \mathbb{H}(\mathbb{Q}) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ είναι όλοι άρτιοι ή είναι όλοι περιττοί} \right\}$$

- (1) Να δειχθεί ότι το υποσύνολο  $R$  είναι υποδακτύλιος του  $\mathbb{H}(\mathbb{Q})$ .
- (2) Να δειχθεί ότι η ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων  $U(R)$  είναι η ακόλουθη ομάδα τάξης 24:

$$U(R) = \left\{ \pm \mathbf{1}, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}, \frac{(\pm \mathbf{1} \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k})}{2} \right\}$$

- (3) Να δειχθεί ότι η ομάδα πηλίκου  $U(R)/\{\pm \mathbf{1}\}$  είναι ισόμορφη με την εναλλασσουσα ομάδα  $A_4$ .



**Άσκηση 1.80.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος με μονάδα.

(1) Ναδειχθεί ότι:

$o R$  δεν έχει διαιρέτες του μηδενός  $\iff o R$  είναι πρώτος και δεν έχει μη-μηδενικά μηδενοδύναμα στοιχεία

(2) Αν  $P$  είναι ένα πρώτο ιδεώδες του  $R$  και ο δακτύλιος πηλίκο  $R/P$  δεν έχει μηδενοδύναμα στοιχεία, ναδειχθεί ότι ο δακτύλιος  $R/P$  δεν έχει διαιρέτες του μηδενός.

**Άσκηση 1.81.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος με μονάδα. Ναδειχθεί ότι οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(1) Όλα τα γνήσια ιδεώδη του  $R$  είναι πρώτα.

(2) (α) Το σύνολο όλων των ιδεωδών του  $R$  είναι οητικά διατεταγμένο, όταν εφοδιασθεί με την σχέση εγκλεισης, δηλαδή, αν  $I$  και  $J$  είναι ιδεώδη του  $R$ , τότε: είτε  $I \subseteq J$  ή  $J \subseteq I$ .

(β) Όλα τα ιδεώδη  $I$  του  $R$  είναι ταυτοδύναμα, δηλαδή:  $I^2 = I$ .

Αν ο δακτύλιος είναι μεταθετικός, ναδειχθεί ότι οι παραπάνω συνθήκες είναι ισοδύναμες με την συνθήκη

(3) Ο δακτύλιος  $R$  είναι σώμα.

**Άσκηση 1.82.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος και  $I, J$  δύο ιδεώδη του  $R$ . Ναδειχθεί ότι ο κανονικός ομομορφισμός δακτυλίων

$$f: R \longrightarrow R/I \times R/J, \quad f(r) = (r + I, r + J)$$

είναι επιμορφισμός αν και μόνον αν  $I + J = R$ , δηλαδή αν τα  $I, J$  είναι συμμέγιστα<sup>5</sup>. Αν τα  $I, J$  είναι συμμέγιστα, ναδειχθεί ότι ο  $f$  επάγει έναν ισομορφισμό δακτυλίων

$$R/I \cap J \xrightarrow{\cong} R/I \times R/J$$

(1) Να γενικεύσετε το παραπάνω αποτέλεσμα για μια πεπερασμένη οικογένεια ιδεωδών  $\{I_k\}_{k=1}^n$ , δείχνοντας ότι η απεικόνιση

$$f: R \longrightarrow R/I_1 \times R/I_2 \times \cdots \times R/I_n, \quad f(r) = (r + I_1, r + I_2, \dots, r + I_n)$$

επάγει έναν ισομορφισμό δακτυλίων

$$R / \bigcap_{k=1}^n I_k \xrightarrow{\cong} R/I_1 \times R/I_2 \times \cdots \times R/I_n$$

αν και μόνον αν τα ιδεώδη της οικογένειας  $\{I_k\}_{k=1}^n$  είναι ανά δύο συμμέγιστα.

Ο ισχυρισμός του (1) είναι γνωστός στην Θεωρία Δακτυλίων ως το ΚΙΝΕΖΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ.

(2) Μπορεί να γενικευτεί το (1) για άπειρο πλήθος ιδεωδών;

**Άσκηση 1.83.** Θεωρούμε το σύνολο

$$R = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \ \& \ 2 \nmid b \right\}$$

(1) Ναδειχθεί ότι ο  $R$  είναι ένας υποδακτύλιος του  $\mathbb{Q}$ .

(2) Να προσδιοριστεί η ομάδα  $U(R)$  των αντιστρεψίμων στοιχείων του  $R$ .

(3) Ναδειχθεί ότι το σύνολο  $R \setminus U(R)$  είναι ένα μέγιστο ιδεώδες του  $R$ .

**Άσκηση 1.84.** Να βρεθούν όλα τα ιδεώδη  $I$  του δακτυλίου πινάκων  $M_2(\mathbb{Z})$  και ασκοιούτως να περιγραφούν οι αντιστοιχοί δακτύλιοι πηλίκα  $M_2(\mathbb{Z})/I$ . Ποιά από τα ιδεώδη  $I$  του  $M_2(\mathbb{Z})$  είναι μέγιστα;

<sup>5</sup>Δύο ιδεώδη  $I, J$  ενός δακτυλίου  $R$  καλούνται **συμμέγιστα** αν  $I + J = R$ .

**Άσκηση 1.85.** Έστω  $R$  και  $S$  δύο δακτύλιοι διαίρεσης, και υποθέτουμε ότι οι δακτύλιοι πινάκων  $M_n(R)$  και  $M_m(S)$ , όπου  $n, m \in \mathbb{N}$ , είναι ισόμορφοι. Να δειχθεί ότι  $n = m$  και οι δακτύλιοι  $R$  και  $S$  είναι ισόμορφοι.

**Άσκηση 1.86.** Να δειχθεί ότι το πλήθος των στοιχείων ενός πεπερασμένου δακτυλίου διαίρεσης είναι δύναμη ενός πρώτου αριθμού.

**Άσκηση 1.87.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος χωρίς διαρέτες του μηδενός. Να δειχθεί ότι ο  $R$  είναι δακτύλιος διαίρεσης αν και μόνον αν κάθε φθίνουσα ακολουθία  $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$  αριστερών (ή δεξιών) κύριων ιδεωδών του  $R$  «σταματά» με την έννοια ότι υπάρχει  $n \in \mathbb{N}$  έτσι ώστε:  $I_k = I_{k+1} = \dots, \forall k \geq n$ .

**Άσκηση 1.88.** Θεωρούμε το ακόλουθο υποσύνολο του  $\mathbb{Q}$ :

$$R = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid (6, b) = 1 \right\}$$

Να δειχθεί ότι το υποσύνολο  $R$  είναι ένας υποδακτύλιος του  $\mathbb{Q}$  με ακριβώς 2 μέγιστα ιδεώδη  $I$  και  $J$ , και ακολουθώς να δειχθεί ότι ο δακτύλιος πηλίκο  $R/I \cap J$  είναι ισόμορφος με ένα ευθύ γινόμενο απλών δακτυλίων.

**Άσκηση 1.89.** Θεωρούμε το ακόλουθο σύνολο  $3 \times 3$  πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα  $\mathbb{K}$ :

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K}) \mid a, b, c \in \mathbb{K} \right\}$$

Να δειχθεί ότι ο  $R$  είναι ένας μεταθετικός συνεκτικός<sup>6</sup> δακτύλιος.

**Άσκηση 1.90.** Έστω  $R$  ένας μεταθετικός δακτύλιος και  $I$  ένα ιδεώδες του  $R$ . Να δειχθεί ότι το σύνολο

$$I_0 = \{ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n \in R[t] \mid a_0 \in I \}$$

είναι ένα ιδεώδες του  $R[t]$ . Επιπλέον να δειχθεί ότι το ιδεώδες  $I_0$  του  $R[t]$  είναι πρώτο, αντίστοιχα μέγιστο, αν και μόνον αν το ιδεώδες  $I$  του  $R$  είναι πρώτο, αντίστοιχα μέγιστο.

**Άσκηση 1.91.** Να εξετασθεί αν ο δακτύλιος  $R$  περιέχει ελάχιστα (δεξιά ή αριστερά) ιδεώδη στις παρακάτω περιπτώσεις:

(1)

$$R = \mathbb{Z}, \quad R = \mathbb{K}[t] \quad (\mathbb{K} : \text{σώμα}), \quad R = \mathbb{Z}_n, \quad R = \mathbb{K}[t]/I \quad (\mathbb{K} : \text{σώμα}, I : \text{ιδεώδες του } \mathbb{K}[t])$$

(2)

$$R = \text{ο δακτύλιος της Άσκησης 1.89}$$

(3)

$$R = T_n(\mathbb{K}) \quad (\mathbb{K} : \text{σώμα}, T_n(\mathbb{K}) : \text{δακτύλιος των } n \times n \text{ άνω τριγωνικών πινάκων υπεράνω του } \mathbb{K})$$

(4)

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & d & e \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K}) \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{K} \right\}$$

<sup>6</sup>Υπενθυμίζουμε ότι ένας δακτύλιος  $R$  καλείται συνεκτικός αν τα μόνα κεντρικά ταυτοδύναμα στοιχεία του είναι τα τετριμμένα: 0 και 1.

(5)

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & e \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K}) \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{K} \right\}$$

**Άσκηση 1.92.** Έστω  $X$  ένας τοπολογικός χώρος, π.χ.  $X = [0, 1]$ , και έστω ο δακτύλιος  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων επί του  $X$ . Να δειχθεί ότι ο τοπολογικός χώρος  $X$  είναι συνεκτικός αν και μόνον αν ο δακτύλιος  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  είναι συνεκτικός.

**Άσκηση 1.93.** Έστω  $R$  ένας μεταθετικός δακτύλιος. Θεωρούμε το σύνολο

$$\text{Spec}(R) = \{P \subseteq R \mid P : \text{είναι πρώτο ιδεώδες του } R\}$$

Να δειχθεί ότι το σύνολο  $\text{Spec}(R)$  είναι ένας τοπολογικός χώρος όταν εφοδιασθεί με την τοπολογία<sup>7</sup> της οποίας τα κλειστά υποσύνολα είναι της μορφής

$$\{V(I) \subseteq \text{Spec}(R) \mid I : \text{είναι ιδεώδες του } R\}, \quad \text{όπου} \quad V(I) = \{P \in \text{Spec}(R) \mid I \subseteq P\}$$

**Άσκηση 1.94.** Έστω  $R$  ένας μεταθετικός δακτύλιος. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) Ο δακτύλιος  $R$  είναι συνεκτικός.
- (2) Ο τοπολογικός χώρος  $\text{Spec}(R)$ , εφοδιασμένος με την τοπολογία του Zariski, είναι συνεκτικός.

**Άσκηση 1.95.** Θεωρούμε τον δακτύλιο  $\text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$  των γραμμικών απεικονίσεων επί του  $\mathbb{K}$ -διανυσματικού χώρου  $\mathcal{E}$ . Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1)  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$ .
- (2) Ο δακτύλιος  $\text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$  είναι απλός.

Υπόδειξη: Αν  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$ , χρησιμοποιείτε ότι ο  $R$  είναι ισομορφος με κατάλληλο δακτύλιο πινάκων υπεράνω του  $\mathbb{K}$ . Αν  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \infty$ , δείξτε ότι το ακόλουθο σύνολο

$$I = \{f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}) \mid \mathbf{r}(f) < \infty\}$$

είναι ένα γνήσιο ιδεώδες του  $\text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$ , όπου  $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f)$  είναι η βαθμίδα της  $f$ .

**Άσκηση 1.96.** Θεωρούμε τον δακτύλιο  $\text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$  των γραμμικών απεικονίσεων επί του  $\mathbb{K}$ -διανυσματικού χώρου  $\mathcal{E}$ .

- (1) Αν το στοιχείο  $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$  είναι ταυτοδύναμο, τότε να δειχθεί ότι:

$$\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \quad \text{όπου} \quad \mathcal{V} = \text{Ker}(f) = \text{Im}(\text{Id}_{\mathcal{E}} - f) \quad \& \quad \mathcal{W} = \text{Ker}(\text{Id}_{\mathcal{E}} - f) = \text{Im}(f) \quad (\text{ευθύ άθροισμα υπόχωρων})$$

- (2) Αντίστροφα αν υπάρχουν υπόχωροι  $\mathcal{V}$  και  $\mathcal{W}$  του  $\mathcal{E}$  έτσι ώστε:  $\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ , τότε να δειχθεί ότι υπάρχει ένα ταυτοδύναμο στοιχείο  $f$  του  $\text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$  έτσι ώστε:

$$\mathcal{V} = \text{Ker}(f) = \text{Im}(\text{Id}_{\mathcal{E}} - f) \quad \& \quad \mathcal{W} = \text{Ker}(\text{Id}_{\mathcal{E}} - f) = \text{Im}(f)$$

- (3) Αν  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$ , να δειχθεί ότι για κάθε  $0 \neq f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$ , υπάρχει στοιχείο  $g \in \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$  έτσι ώστε το στοιχείο  $g \circ f$  να είναι ταυτοδύναμο.
- (4) Είναι ο δακτύλιος  $\text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$  συνεκτικός;

<sup>7</sup>Η τοπολογία αυτή καλείται τοπολογία του Zariski.

Η επόμενη Άσκηση περιγράφει την δομή των δεξιών ή αριστερών ιδεωδών του δακτυλίου  $\text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$ , όπου  $\mathcal{E}$  είναι ένας  $\mathbb{K}$ -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος  $\mathbb{K}$ .

**Άσκηση 1.97.** Έστω  $\mathcal{E}$  ένας  $\mathbb{K}$ -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος  $\mathbb{K}$ , και έστω  $R = \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$  ο δακτύλιος των γραμμικών απεικονίσεων επί του  $\mathcal{E}$ .

(1) Για κάθε υπόχωρο  $\mathcal{V}$  του  $\mathcal{E}$ , το σύνολο

$$\Psi(\mathcal{V}) = \{f \in R \mid \mathcal{V} \subseteq \text{Ker}(f)\}$$

είναι ένα αριστερό ιδεώδες του  $R$ .

(2) Για κάθε αριστερό ιδεώδες  $I$  του  $R$ , το σύνολο

$$\Phi(I) = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = \vec{0}, \forall f \in I\}$$

είναι ένας υπόχωρος του  $\mathcal{E}$ .

(3) Η απεικόνιση

$$\Phi : \{\text{αριστερά ιδεώδη του } R\} \longrightarrow \{\text{υπόχωροι του } \mathcal{E}\}, \quad I \longmapsto \Phi(I)$$

είναι «1-1» και «επί» με αντίστροφη την απεικόνιση  $\mathcal{V} \longmapsto \Psi(\mathcal{V})$ .

**Άσκηση 1.98.** Έστω  $\mathcal{E}$  ένας  $\mathbb{K}$ -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος  $\mathbb{K}$ , και έστω  $R = \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$  ο δακτύλιος των γραμμικών απεικονίσεων επί του  $\mathcal{E}$ .

(1) Για κάθε υπόχωρο  $\mathcal{V}$  του  $\mathcal{E}$ , το σύνολο

$$\Sigma(\mathcal{V}) = \{f \in R \mid \text{Im}(f) \subseteq \mathcal{V}\}$$

είναι ένα δεξιό ιδεώδες του  $R$ .

(2) Για κάθε δεξιό ιδεώδες  $I$  του  $R$ , το σύνολο

$$\Omega(I) = \{f(\vec{x}) \in \mathcal{E} \mid f \in I \ \& \ \vec{x} \in \mathcal{E}\}$$

είναι ένας υπόχωρος του  $\mathcal{E}$ .

(3) Η απεικόνιση

$$\Sigma : \{\text{δεξιά ιδεώδη του } R\} \longrightarrow \{\text{υπόχωροι του } \mathcal{E}\}, \quad I \longmapsto \Sigma(I)$$

είναι «1-1» και «επί» με αντίστροφη την απεικόνιση  $\mathcal{V} \longmapsto \Omega(\mathcal{V})$ .

Η επόμενη Άσκηση συνδυάζει τις Ασκήσεις 1.97 και 1.98:

**Άσκηση 1.99.** Έστω  $\mathcal{E}$  ένας  $\mathbb{K}$ -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος  $\mathbb{K}$ , και έστω  $R = \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$  ο δακτύλιος των γραμμικών απεικονίσεων επί του  $\mathcal{E}$ .

Ναδειχθεί ότι υπάρχει μια «1-1» και «επί» αντιστοιχία μεταξύ των αριστερών ιδεωδών του  $R$  και των δεξιών ιδεωδών του  $R$ , η οποία και να περιγραφεί αναλυτικά.

Ένα ταυτοδύναμο στοιχείο  $e \in R$  ενός δακτυλίου  $R$  καλείται **πρωταρχικό** αν  $e \neq 0$  και το  $e$  δεν μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο ορθογώνιων μη-μηδενικών ταυτοδύναμων στοιχείων.

**Άσκηση 1.100.** Έστω  $0 \neq e \in R$  ένα μη-μηδενικό ταυτοδύναμο στοιχείο ενός δακτυλίου  $R$ . Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) Το ταυτοδύναμο στοιχείο  $e$  είναι πρωταρχικό.

(2) Τα μόνα ταυτοδύναμα στοιχεία του δακτυλίου  $eRe$  είναι τα τεττιμμένα:  $0$  και  $1_{eRe} = e$ .

Ιδιαίτερα αν ο δακτύλιος  $R$  είναι μεταθετικός, τότε και ο δακτύλιος  $eRe$  είναι μεταθετικός, τότε το ταυτοδύναμο στοιχείο  $e$  είναι πρωταρχικό αν και μόνον αν ο δακτύλιος  $eRe$  είναι συνεκτικός.

**Άσκηση 1.101.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος ο οποίος είναι κανονικός με την έννοια του von Neumann. Ναδειχθεί ότι αν  $e$  είναι ένα πρωταρχικό ταυτοδύναμο στοιχείο του  $R$ , τότε ο δακτύλιος  $eRe$  είναι δακτύλιος διαίρεσης. Ισχύει το αντίστροφο;

**Άσκηση 1.102.** Έστω  $e^2 = e \in R$  ένα ταυτοσύναμο στοιχείο του δακτυλίου  $R$ .

- (1) Αν  $f$  είναι ένα ταυτοδύναμο στοιχείο του  $R$  και ισχύει  $Rf \subseteq Re$ , τότε υπάρχει ένα ταυτοδύναμο στοιχείο  $g$  του  $R$  έτσι ώστε:  $Rf = Rg$  και τα στοιχεία  $g$  και  $e - g$  είναι ορθογώνια.
- (2) Το ταυτοδύναμο στοιχείο  $e$  είναι πρωταρχικό αν και μόνον αν για κάθε ταυτοδύναμο στοιχείο  $f$  του  $R$ , αν  $Rf \subseteq Re$  τότε  $f = 0$ .

Αν  $e^2 = e \in R$  είναι ένα ταυτοδύναμο στοιχείο ενός δακτυλίου  $R$ , τότε έχουμε δει τις εξής αποσυνθέσεις του δακτυλίου  $R$ :

(1)

$$R = eR \oplus (1 - e)R \quad (\text{αποσύνθεση δεξιών ιδεωδών})$$

(2)

$$R = Re \oplus R(1 - e) \quad (\text{αποσύνθεση αριστερών ιδεωδών})$$

(3) Αν το ταυτοδύναμο στοιχείο  $e$  είναι κεντρικό (δηλαδή  $e \in Z(R)$ ), τότε:

$$R = eR \oplus (1 - e)R = Re \oplus R(1 - e) \quad (\text{αποσύνθεση ιδεωδών - ευθύ γινόμενο δακτυλίων})$$

Η επόμενη άσκηση περιγράφει μια ακόμα αποσύνθεση του  $R$  αυτή τη φορά θεωρώντας μόνο αβελιανές ομάδες.

**Άσκηση 1.103.** Έστω  $e^2 = e \in R$  ένα ταυτοδύναμο στοιχείο ενός δακτυλίου  $R$ . Ναδειχθεί ότι έχουμε μια αποσύνθεση (προσθετικών) αβελιανών ομάδων:

$$R = eRe \oplus eR(1 - e) \oplus (1 - e)Re \oplus (1 - e)R(1 - e) \quad (\text{αποσύνθεση Pierce})$$

όπου  $eRe$  και  $(1 - e)R(1 - e)$  είναι δακτύλιοι με μονάδα  $e$  και  $1 - e$  αντίστοιχα<sup>8</sup>.

Ιδιαίτερα: αν  $e \in Z(R)$ , τότε  $1 - e \in Z(R)$  και η αποσύνθεση Pierce είναι η αποσύνθεση ιδεωδών του  $R = eR \oplus (1 - e)R = Re \oplus R(1 - e)$ .

Γενικότερα αν  $\{e_k\}_{k \in \mathcal{K}}$  είναι ένα σύνολο ανά δύο ορθογώνιων ταυτοδύναμων στοιχείων του  $R$ , και αν ισχύει ότι  $1_R = \sum_{k \in \mathcal{K}} e_k$  τότε:

$$R = \bigoplus_{k, l \in \mathcal{K}} e_k R e_l$$

<sup>8</sup>Όπως θα δούμε αργότερα η αβελιανή ομάδα  $eR(1 - e)$  είναι ένα  $(eRe, (1 - e)R(1 - e))$ -«διπρότυπο», και η αβελιανή ομάδα  $(1 - e)Re$  είναι ένα  $((1 - e)R(1 - e), eRe)$ -«διπρότυπο», και ο δακτύλιος  $R$  μπορεί να παρασταθεί μέσω της αποσύνθεσης Pierce ως ο γενικευμένος δακτύλιος πινάκων:

$$R = \begin{pmatrix} eRe & eR(1 - e) \\ (1 - e)Re & (1 - e)R(1 - e) \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 1.104.** Θεωρούμε την διάσπαση της μονάδας  $\{E_{ii}\}_{i=1}^n$  του δακτυλίου πινάκων  $M_n(R)$  υπεράνω του δακτυλίου  $R$ . Να δειχθεί ότι υπάρχουν ισομορφισμοί δακτυλίων

$$R \cong E_{11}M_n(R)E_{11} \quad \& \quad M_{n-1}(R) \cong (I_n - E_{11})M_n(R)(I_n - E_{11})$$

Να περιγραφούν οι αβελιανές ομάδες  $E_{11}M_n(R)(I_n - E_{11})$  και  $(I_n - E_{11})M_n(R)E_{11}$  στην αποσύνθεση Pierce του δακτυλίου  $M_n(R)$ .

**Άσκηση 1.105.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος και  $I$  ένα μηδενοδύναμο ιδεώδες του  $R$ . Να δειχθεί ότι για κάθε πρώτο ιδεώδες  $P$  του  $R$  ισχύει ότι  $I \subseteq P$ , και επομένως:

$$I \subseteq \bigcap_{P: \text{πρώτο ιδεώδες του } R} P$$

Ιδιαίτερα, αν ο δακτύλιος  $R$  είναι μεταθετικός, να δειχθεί ότι:

$$\bigcap_{P: \text{πρώτο ιδεώδες του } R} P = \text{Nil}(R) := \{x \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : x^n = 0\}$$

Η επόμενη Άσκηση περιγράφει την δομή των δακτυλίων του Boole με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων.

**Άσκηση 1.106.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος με μονάδα.

- (1) Αν ο  $R$  είναι δακτύλιος του Boole, τότε να δειχθεί ότι κάθε υποδακτύλιος  $S$  του  $R$  και κάθε δακτύλιος πηλίκο  $R/I$ , όπου  $I$  είναι ένα ιδεώδες του  $R$ , είναι επίσης δακτύλιος του Boole.
- (2) Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος ευθύ γινόμενο (άπειρα αντίγραφα του σώματος  $\mathbb{Z}_2$ )

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots$$

είναι δακτύλιος του Boole.

- (3) Αν ο δακτύλιος  $R$  είναι δακτύλιος του Boole και έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, τότε, αντίστροφα, υπάρχει  $n \geq 1$  και ένας ισομορφισμός:

$$R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2 \quad (n\text{-παράγοντες})$$

Ιδιαίτερα από την παραπάνω Άσκηση προκύπτει ότι κάθε πεπερασμένος δακτύλιος του Boole έχει πλήθος στοιχείων ίσο με  $2^n$  για κάποιο  $n \geq 1$ . Παράδειγμα δακτυλίου Boole με πλήθος στοιχείων ίσο με  $2^n$ , για κάποιο  $n \geq 1$ , αποτελεί ο δακτύλιος  $(\mathcal{P}(X), +, \cdot)$ , όπου  $X$  είναι ένα πεπερασμένο σύνολο με  $n$  το πλήθος στοιχεία,  $\mathcal{P}(X)$  είναι το σύνολο των υποσυνόλων του  $X$ ,  $+$  είναι η συμμετρική διαφορά υποσυνόλων, και  $\cdot$  είναι η τομή υποσυνόλων. Αυτή η σύμπτωση δεν είναι τυχαία.

Η επόμενη (απαιτητική) Άσκηση περιγράφει μια ειδική περίπτωση του σημαντικού Θεωρήματος Αναπαράστασης του Stone, το οποίο πιστοποιεί ότι κάθε δακτύλιος του Boole είναι ισόμορφος με έναν υποδακτύλιο του δακτυλίου  $\mathcal{P}(X)$  για κατάλληλο σύνολο  $X$ . Ειδικότερα είναι ισόμορφος με την άλγεβρα<sup>9</sup> των ανοιχτών και κλειστών υποσυνόλων του χώρου Stone ο οποίος αντιστοιχεί στον  $R$ . Ο χώρος Stone του δακτυλίου Boole  $R$  είναι ένας τοπολογικός χώρος τα σημεία του οποίου είναι οι ομομορφισμοί δακτυλίων  $R \rightarrow \mathbb{Z}_2$ , και μια βάση κλειστών υποσυνόλων για την τοπολογία του αποτελούν τα υποσύνολα  $\{f \in \text{Hom}(R, \mathbb{Z}_2) \mid f(r) = [0]_2, r \in R \in R\}$ .

<sup>9</sup>Μια *άλγεβρα υποσυνόλων* ενός συνόλου  $X$  είναι μια συλλογή υποσυνόλων του  $X$  η οποία είναι κλειστή στις τομές, ενώσεις και συμπληρώματα υποσυνόλων του  $X$ .

**Άσκηση 1.107.** Έστω  $R$  ένας πεπερασμένος δακτύλιος του Boole. Τότε υπάρχει ένα σύνολο  $X$  και ένας ισομορφισμός δακτυλίων

$$R \cong \mathcal{P}(X)$$

Ως σύνολο  $X$  μπορούμε να θεωρήσουμε το σύνολο  $\text{Hom}(R, \mathbb{Z}_2)$  των ομομορφισμών δακτυλίων  $f: R \rightarrow \mathbb{Z}_2$ .

Ένα ιδεώδες  $I$  ενός δακτυλίου  $R$  **ανυψώνει ταυτοδύναμα στοιχεία** αν για κάθε ταυτοδύναμο στοιχείο  $e + I$  του δακτυλίου πηλίκου  $R/I$ , υπάρχει ταυτοδύναμο στοιχείο  $f$  του  $R$ , έτσι ώστε:  $f + I = e + I$ . Το ιδεώδες  $I$  του  $R$  **ανυψώνει διασπάσεις της μονάδας** αν για κάθε διάσπαση της μονάδας  $\{e_i + I\}_{i=1}^n$  του δακτυλίου πηλίκου  $R/I$ , υπάρχει μια διάσπαση της μονάδας  $\{f_i\}_{i=1}^n$  του  $R$  έτσι ώστε:  $f_i + I = e_i + I$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ .

Η ακόλουθη Άσκηση πιστοποιεί ότι αν το ιδεώδες  $I$  είναι **αμελητέο** με την έννοια ότι κάθε στοιχείο του  $I$  είναι μηδενοδύναμο, δηλαδή:  $\forall x \in I, \exists n = n(x) \in \mathbb{N}: x^n = 0$ , τότε το ιδεώδες  $I$  ανυψώνει ταυτοδύναμα στοιχεία και διασπάσεις της μονάδας.

**Άσκηση 1.108.** Έστω  $I$  ένα αμελητέο ιδεώδες του δακτυλίου  $R$ .

- (1) Το ιδεώδες  $I$  ανυψώνει ταυτοδύναμα στοιχεία.
- (2) Το ιδεώδες  $I$  ανυψώνει διασπάσεις της μονάδας.

Ιδιαίτερα αν ο δακτύλιος  $R/I$  είναι το ευθύ άθροισμα  $R/I = A_1/I \oplus A_2/I \oplus \dots \oplus A_n/I$  αριστερών (δεξιών) ιδεωδών του, τότε υπάρχουν αριστερά (δεξιά) ιδεώδη  $B_1, B_2, \dots, B_n$  του  $R$  έτσι ώστε:  $R = B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_n$  και  $B_n/I = A_n/I, 1 \leq i \leq n$ .

**Άσκηση 1.109.** Έστω ότι  $D_1, D_2, \dots, D_k$  είναι δακτύλιοι διαίρεσης, και θεωρούμε τον δακτύλιο

$$R = M_{n_1}(D_1) \times M_{n_2}(D_2) \times \dots \times M_{n_k}(D_k)$$

- (1) Ναδειχθεί ότι κάθε δεξιό (αντίστοιχα αριστερό) ιδεώδες του  $R$  είναι της μορφής:  $eR$  (αντίστοιχα  $Re$ ), όπου  $e$  είναι κατάλληλο ταυτοδύναμο στοιχείο του  $R$ .
- (2) Ναδειχθεί ότι κάθε ιδεώδες του  $R$  είναι της μορφής  $\tilde{e}R$ , για κατάλληλο κεντρικό ταυτοδύναμο στοιχείο  $\tilde{e}$  του  $R$ .

**Άσκηση 1.110.** Έστω  $X = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$  το σύνολο των θετικών διαιρετών του 30.

- (1) Να ορισθούν κατάλληλες πράξεις πρόσθεσης «+» και πολλαπλασιασμού «·» επί του συνόλου  $X$  έτσι ώστε η τριάδα  $(X, +, \cdot)$  να είναι ένας δακτύλιος με μονάδα ο οποίος είναι δακτύλιος του Boole.
- (2) Να προσδιορισθούν τα πρώτα και μέγιστα ιδώδη του δακτυλίου  $X$ .
- (3) Με ποιόν γνωστό σας δακτύλιο είναι ισόμορφος ο δακτύλιος  $X$ ;

**Άσκηση 1.111.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος με μονάδα. Τότε τα ακόλουθα είναι ισόδύναμα:

- (1) Υπάρχει αποσύνθεση

$$R = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_n$$

όπου  $L_k, 1 \leq k \leq n$ , είναι ελάχιστα αριστερά ιδεώδη του  $R$ .

- (2) Υπάρχει αποσύνθεση

$$R = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_n$$

όπου  $T_k, 1 \leq k \leq n$ , είναι ελάχιστα δεξιά ιδεώδη του  $R$ .

Αν  $R, S$  είναι δακτύλιοι, τότε συμβολίζουμε

$$\text{Hom}_{\text{Rings}}(R, S) = \{f: R \rightarrow S \mid f: \text{ομομορφισμός δακτυλίων}\}$$

**Άσκηση 1.112.** Έστω  $R$  ένας μεταθετικός δακτύλιος και  $S$  ένας τυχόν δακτύλιος. Θεωρούμε τον δακτύλιο πολυωνύμων  $R[t]$  υπεράνω του  $R$ , και ως συνήθως ταυτίζουμε τον δακτύλιο  $R$  με τον υποδακτύλιο του  $R[t]$  ο οποίος αποτελείται από τα σταθερά πολυώνυμα.

- (1) Έστω  $f: R \rightarrow S$  ένας ομομορφισμός δακτυλίων έτσι ώστε  $\text{Im}(f) \subseteq Z(S)$ , και έστω  $s \in S$ . Ναδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός δακτυλίων  $f_s: R[t] \rightarrow S$  έτσι ώστε:  $f_s|_R = f$  και  $f_s(t) = s$ .
- (2) Για κάθε δακτύλιο  $S$ , θέτουμε

$$\text{Hom}_{\text{Rings}}(\mathbb{Z}[t], S) = \{f: \mathbb{Z}[t] \rightarrow S \mid f: \text{ομομορφισμός δακτυλίων}\}$$

Ναδειχθεί ότι η απεικόνιση

$$\Phi: \text{Hom}_{\text{Rings}}(\mathbb{Z}[t], S) \rightarrow S, \quad \Phi(f) = f(t)$$

είναι «1-1» και «επί».

**Άσκηση 1.113.** Έστω  $R_1, R_2$  δύο δακτύλιος και έστω  $R_1 \times R_2$  ο δακτύλιος ευθύ-γινόμενο. Ναδειχθεί ότι για κάθε δακτύλιο  $S$ , υπάρχει μια «1-1» και «επί» απεικόνιση

$$\text{Hom}_{\text{Rings}}(S, R_1 \times R_2) = \text{Hom}_{\text{Rings}}(S, R_1) \times \text{Hom}_{\text{Rings}}(S, R_2)$$

Να γενικευθεί το συμπέρασμα για δακτύλιους  $\{R_i\}_{i=1}^n$ ,  $n \geq 3$ . Ισχύει το συμπέρασμα για μια άπειρη οικογένεια δακτυλίων  $\{R_a\}_{a \in A}$ :

**Άσκηση 1.114.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος με μονάδα. Ναδειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) Ο  $R$  είναι δακτύλιος διαίρεσης.
- (2) Ο  $R$  είναι (αριστερός ή δεξιός) δακτύλιος του Artin και ο  $R$  δεν περιέχει διαιρέτες του μηδενός.

**Άσκηση 1.115.** Έστω  $R$  ένας (αριστερός ή δεξιός) δακτύλιος του Artin. Αν ο  $R$  είναι πρώτος δακτύλιος, τότε ο  $R$  είναι ισόμορφος με έναν δακτύλιο πινάκων  $M_n(D)$  υπεράνω ενός δακτυλίου διαίρεσης  $D$ .

Υπενθυμίζουμε ότι ένα αριστερό ή δεξιό ιδεώδες  $I$  ενός δακτυλίου  $R$  καλείται **αμελητέο** αν κάθε στοιχείο του  $I$  είναι μηδενόδυναμο, δηλαδή:  $\forall x \in I, \exists n = n(x) \in \mathbb{N}: x^n = 0$ .

**Άσκηση 1.116.** Έστω  $D$  ένας δακτύλιος διαίρεσης. Ναδειχθεί ότι ο δακτύλιος  $M_n(D)$  δεν περιέχει μηδενόδυναμο ή αμελητέα αριστερά ή δεξιά ιδεώδη.

**Άσκηση 1.117.** Έστω  $\{R_i\}_{i=1}^\infty$  μια οικογένεια δακτυλίων έτσι ώστε για κάθε  $i \geq 1$ , ο δακτύλιος  $R_i$  είναι υποδακτύλιος του  $R_{i+1}$ :

$$R_1 \subseteq R_2 \subseteq \dots \subseteq R_i \subseteq R_{i+1} \subseteq \dots$$

- (1) Ναδειχθεί ότι το σύνολο  $R = \bigcup_{i=1}^\infty R_i$  είναι ένας δακτύλιος.
- (2) Αν κάθε δακτύλιος  $R_i$  είναι απλός, ναδειχθεί ότι ο δακτύλιος  $R$  είναι απλός.
- (3) Αν κάθε δακτύλιος  $R_i$  είναι ημιαπλός, είναι ο δακτύλιος  $R$  ημιαπλός;

Έστω  $R$  ένας δακτύλιος. Ένα σύνολο στοιχείων  $\{e_{ij} \in R \mid 1 \leq i, j \leq n\}$  του  $R$  καλείται **σύνολο μονάδων  $n \times n$  πινάκων** αν:

$$\sum_{k=1}^n e_{kk} = 1 \quad \text{και} \quad e_{ik}e_{lj} = \delta_{kl}e_{ij}, \quad 1 \leq i, j, k, l \leq n$$



**Άσκηση 1.118.** Αν  $R$  είναι ένας δακτύλιος, ναδειχθεί ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- (1) Ο  $R$  είναι ισόμορφος με έναν δακτύλιο πινάκων, δηλαδή υπάρχει δακτύλιος  $S$ , ένας θετικός ακέραιος  $n \geq 1$ , και ένας ισομορφισμός δακτυλίων

$$R \xrightarrow{\cong} M_n(S)$$

- (2) Ο δακτύλιος  $R$  περιέχει ένα σύνολο μονάδων  $n \times n$  πινάκων  $\{e_{ij} \in R \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ .

**Άσκηση 1.119.** Έστω ότι  $R$  και  $S$  είναι δύο δακτύλιοι.

- (1) Με χρήση της παραπάνω Άσκησης 1.118, ναδειχθεί ότι αν  $f: R \rightarrow M_n(S)$  είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων, τότε υπάρχει ένας δακτύλιος  $T$ , ένας θετικός ακέραιος  $n \geq 1$ , και ένας ισομορφισμός δακτυλίων

$$R \xrightarrow{\cong} M_n(T)$$

- (2) Αν υπάρχει ένας ισομορφισμός δακτυλίων  $M_n(R) \cong M_m(S)$ , είναι αληθές ότι  $n = m$  και  $R \cong S$ ;

**Άσκηση 1.120.** Έστω ότι  $R$  είναι μια άλγεβρα<sup>10</sup> υπεράνω ενός σώματος  $k$ . Υποθέτουμε ότι για κάθε στοιχείο  $r \in R \setminus \{0\}$ , υπάρχει μη-μηδενικό πολυώνυμο  $P(x)$  έτσι ώστε  $P(r) = 0$ <sup>11</sup>.

- (1) Ναδειχθεί ότι η άλγεβρα  $R$  είναι πεπερασμένη με την έννοια του Dedekind.  
 (2) Ναδειχθεί ότι κάθε αριστερός (δεξιός) διαιρέτης του μηδενός είναι και δεξιός (αριστερός) διαιρέτης του μηδενός.  
 (3) Ναδειχθεί ότι ένα μη-μηδενικό στοιχείο του  $R$  είναι αντιστρέψιμο αν και μόνον αν δεν είναι διαιρέτης του μηδενός.

<sup>10</sup>Υπενθυμίζουμε ένας δακτύλιος  $R$  ο οποίος είναι και διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος  $k$  έτσι ώστε  $a \cdot (xy) = (a \cdot x)y = x(a \cdot y)$ ,  $\forall a \in k, \forall x, y \in R$ , όπου με « $\cdot$ » συμβολίζουμε τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό, καλείται  $k$ -**άλγεβρα**.

<sup>11</sup>Μια τέτοια άλγεβρα καλείται **αλγεβρική**.

## 2. Βασική Θεωρία Προτύπων και Ημιαπλοί Δακτύλιοι

**Άσκηση 2.1.** Ναδειχθεί ότι υπάρχει ακριβώς ένας τρόπος έτσι ώστε μια αβελιανή ομάδα να αποκτήσει δομή (αριστερού)  $\mathbb{Z}$ -προτύπου.

**Άσκηση 2.2.** Ναδειχθεί ότι υπάρχει το πολύ ένας τρόπος έτσι ώστε μια αβελιανή ομάδα  $M$  να αποκτήσει δομή (αριστερού)  $\mathbb{Q}$ -προτύπου.

**Άσκηση 2.3.** Να εξετασθεί αν μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα  $M$  μπορεί να αποκτήσει δομή  $\mathbb{Q}$ -προτύπου.

**Άσκηση 2.4.** Έστω  $\mathbb{Z}_n$ , όπου  $n \geq 2$ , ο δακτύλιος των κλάσεων υπολοίπων mod  $n$ , και  $M$  μια αβελιανή ομάδα. Ναδειχθεί ότι η  $M$  αποκτά δομή  $\mathbb{Z}_n$ -προτύπου αν και μόνον αν  $\forall x \in M: n \mid o(x)$ .

**Άσκηση 2.5.** Μια αβελιανή ομάδα  $M$  καλείται **διααιρετή**, αν:

$$\forall y \in M, \forall n \in \mathbb{Z}^*, \exists x \in M: nx = y$$

- (1) Ναδειχθεί ότι η προσθετική αβελιανή ομάδα  $\mathbb{Q}$  είναι διααιρετή.
- (2) Υπάρχει μη-μηδενική πεπερασμένη διααιρετή αβελιανή ομάδα;
- (3) Ναδειχθεί ότι ομάδες-πηλίκια διααιρετών αβελιανών ομάδων είναι διααιρετές αβελιανές ομάδες.
- (4) Ναδειχθεί ότι το ευθύ γινόμενο και το ευθύ άθροισμα διααιρετών αβελιανών ομάδων είναι διααιρετή αβελιανή ομάδα.

**Άσκηση 2.6.** Έστω  $p$  ένας πρώτος αριθμός. Θέτουμε

$$M = \left\{ \frac{a}{p^n} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ \& } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Ναδειχθεί ότι το σύνολο  $M$  είναι μια υποομάδα της προσθετικής ομάδας  $(\mathbb{Q}, +)$  η οποία περιέχει την προσθετική ομάδα  $\mathbb{Z}$  των ακεραίων, και η ομάδα-πηλίκιο

$$\mathbb{Z}(p^\infty) = M/\mathbb{Z}$$

είναι διααιρετή.

**Άσκηση 2.7.** Ναδειχθεί ότι, για μια αβελιανή ομάδα  $M$ , τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) Η αβελιανή ομάδα  $M$  μπορεί να αποκτήσει δομή  $\mathbb{Q}$ -διανυσματικού χώρου.
- (2) Η αβελιανή ομάδα  $M$  είναι διααιρετή και κάθε στοιχείο της  $M$ , εκτός του ουδετέρου, έχει άπειρη τάξη.

**Άσκηση 2.8** (Θεώρημα Cayley για Δακτύλιους). Ναδειχθεί ότι κάθε δακτύλιος είναι ισόμορφος με έναν υποδακτύλιο του δακτυλίου ενδομορφισμών κατάλληλης αβελιανής ομάδας.

**Άσκηση 2.9.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος και  ${}_R M$  ένα αριστερό  $R$ -πρότυπο. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ιδεώδες  $I$  του  $R$  και ένας μονομορφισμός δακτυλίων

$$\phi: R/I \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(M)$$

Να περιγραφεί ο υποδακτύλιος  $\text{Im}(\phi)$ .

**Άσκηση 2.10.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος και  $f: M \longrightarrow N$  ένας ομομορφισμός (αριστερών)  $R$ -πρωτύπων. Να δείχθει ότι:

- (1) ο  $f$  είναι μονομορφισμός, δηλαδή «1-1», αν και μόνον αν για κάθε (αριστερό)  $R$ -πρότυπο  $K$  και για κάθε δύο ομομορφισμούς  $g, h: K \longrightarrow M$  έχουμε:  $f \circ g = f \circ h \implies g = h$ . Διαγραμματικά:

$$K \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} M \xrightarrow{f} N \quad \& \quad f \circ g = f \circ h \implies g = h$$

- (2) ο  $f$  είναι επιμορφισμός, δηλαδή «επί», αν και μόνον αν για κάθε (αριστερό)  $R$ -πρότυπο  $L$  και για κάθε δύο ομομορφισμούς  $g, h: N \longrightarrow L$  έχουμε:  $g \circ f = h \circ f \implies g = h$ . Διαγραμματικά:

$$M \xrightarrow{f} N \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} L \quad \& \quad g \circ f = h \circ f \implies g = h$$

**Άσκηση 2.11.** Έστω  $f: R \longrightarrow S$  ένας ομομορφισμός δακτυλίων. Αν  ${}_S M$ , αντίστοιχα  $M_S$ , είναι ένα αριστερό, αντίστοιχα δεξιό,  $S$ -πρότυπο, τότε η αβελιανή ομάδα  $M$  μπορεί με φυσικό τρόπο να αποκτήσει δομή αριστερού, αντίστοιχα δεξιού,  $R$ -πρωτύπου.

**Άσκηση 2.12.** Έστω  $f: R \longrightarrow S$  ένας ομομορφισμός δακτυλίων. Αν  ${}_R M$ , αντίστοιχα  $M_R$ , είναι ένα αριστερό, αντίστοιχα δεξιό,  $R$ -πρότυπο, να εξετασθεί αν, και υπό ποιές συνθήκες, η αβελιανή ομάδα  $M$  μπορεί με φυσικό τρόπο να αποκτήσει δομή αριστερού, αντίστοιχα δεξιού,  $S$ -πρωτύπου.

**Άσκηση 2.13.** Έστω  $R$  μια (μεταθετική) ακέραια περιοχή. Να δείχθει ότι ο  $R$  είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών αν και μόνον αν κάθε μη-μηδενικό (αριστερό) υποπρότυπο του  $R$  είναι ισόμορφο με το (αριστερό)  $R$ -πρότυπο  $R\bar{R}$ .

**Άσκηση 2.14.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος και  ${}_R M$  ένα αριστερό  $R$ -πρότυπο. Θεωρούμε το ακόλουθο υποσύνολο του  $R$ , όπου  $r \cdot m$  συμβολίζει την αριστερή δράση του  $R$  επί του  $M$ :

$$\text{Ann}_R(M) = \{r \in R \mid r \cdot m = 0, \forall m \in M\}$$

Να δείχθει ότι το υποσύνολο  $\text{Ann}_R(M)$  είναι ένα ιδεώδες του  $R$  και η αβελιανή ομάδα μπορεί να αποκτήσει με φυσικό τρόπο δομή αριστερού  $R/\text{Ann}_R(M)$ -πρωτύπου.

Το ιδεώδες  $\text{Ann}_R(M)$  καλείται ο **μηδενιστής** του αριστερού  $R$ -πρωτύπου  $M$ .

Υπενθυμίζουμε ότι αν  $\mathcal{E}$  είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος  $\mathbb{K}$  και  $f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$  είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε η αβελιανή ομάδα  $\mathcal{E}$  αποκτά δομή (αριστερού)  $\mathbb{K}[t]$ -πρωτύπου, αν ορίσουμε αριστερή δράση:

$$\cdot: \mathbb{K}[t] \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (P(t), \vec{x}) \longmapsto P(t) \cdot \vec{x} = P(f)(\vec{x})$$

όπου αν  $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \in \mathbb{K}[t]$ , τότε  $P(f)$  είναι η γραμμική απεικόνιση

$$P(f): \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad P(f)(\vec{x}) = a_0 \vec{x} + a_1 f(\vec{x}) + a_2 f^2(\vec{x}) + \cdots + a_n f^n(\vec{x})$$

**Άσκηση 2.15.** Έστω η γραμμική απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_n, x_1, \dots, x_{n-1})$$

και θεωρούμε την αβελιανή ομάδα  $\mathbb{R}^n$  ως  $\mathbb{R}[t]$ -πρότυπο. Αν  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , να προσδιορισθούν τα διανύσματα του  $\mathbb{R}^n$ :

$$t \cdot \vec{x}, \quad (t^2 + 2) \cdot \vec{x}, \quad (t^2 - 1) \cdot \vec{x}, \quad (t^{n-1} + t^{n-2} + \dots + t + 1) \cdot \vec{x}$$

Τέλος να προσδιορισθεί το ιδεώδες  $\text{Ann}_{\mathbb{R}[t]}(\mathbb{R}^n)$  του δακτυλίου  $\mathbb{R}[t]$ .

Υπενθυμίζουμε ότι αν  $n \geq 1$ , και  $A \in M_n(\mathbb{K})$  είναι ο δακτύλιος των  $n \times n$  πινάκων υπεράνω ενός σώματος  $\mathbb{K}$ , τότε ο διανυσματικός χώρος

$$\mathbb{K}_n = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n \times 1}(\mathbb{K}) \mid x_i \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n \right\}$$

των στηλών με  $n$  στοιχεία από το  $\mathbb{K}$ , είναι (αριστερό)  $\mathbb{K}[t]$ -πρότυπο, αν ορίσουμε (αριστερή) δράση

$$\star: \mathbb{K}[t] \times \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_n, \quad (P(t), X) \longmapsto P(t) \star X = P(A) \cdot X$$

όπου « $\cdot$ » συμβολίζει πολλαπλασιασμό πινάκων και αν  $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_m t^m \in \mathbb{K}[t]$ , τότε  $P(A)$  είναι ο  $n \times n$  πίνακας

$$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_m A^m$$

Το  $\mathbb{K}[t]$ -πρότυπο  $\mathbb{K}_n$  θα συμβολίζεται από τώρα και στο εξής με  $M_A$ . Σημειώνουμε ότι αν  $B \in M_n(\mathbb{K})$ , και  $B \neq A$ , τότε σαν αβελιανές ομάδες, ακόμα περισσότερο ως  $\mathbb{K}$ -διανυσματικοί χώροι, έχουμε  $M_A = \mathbb{K}_n = M_B$ , αλλά γενικά,  $M_A \neq M_B$  ως  $\mathbb{K}[t]$ -πρότυπα, διότι οι δράσεις ορίζονται μέσω των πινάκων  $A$  και  $B$ .

**Άσκηση 2.16.** Θεωρούμε τον πίνακα  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ , και έστω, όπως παραπάνω,  $M_A$  το επαγόμενο  $\mathbb{R}[t]$ -πρότυπο.

(1) Να δειχθεί ότι για κάθε πολυώνυμο  $P(t) \in \mathbb{R}[t]$ , ισχύει ότι:

$$P(A) = \begin{pmatrix} P(1) & P'(1) \\ 0 & P(1) \end{pmatrix}$$

(2) Να υπολογισθεί το ακόλουθο στοιχείο του  $\mathbb{R}[t]$ -πρότυπου  $M_A$ :

$$(t^3 - 2t^2 + 3t + 1) \star \begin{pmatrix} 2017 \\ 2018 \end{pmatrix}$$

(3) Έστω  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ , και έστω, όπως παραπάνω,  $M_B$  το επαγόμενο  $\mathbb{R}[t]$ -πρότυπο.

Να δειχθεί ότι αν και οι αβελιανές ομάδες  $M_A$  και  $M_B$  είναι ισόμορφες, και οι  $\mathbb{R}$ -διανυσματικοί χώροι  $M_A$  και  $M_B$  είναι ισόμορφοι, τα  $\mathbb{R}[t]$ -πρότυπα  $M_A$  και  $M_B$  δεν είναι ισόμορφα.

**Άσκηση 2.17.** Έστω  $\mathbb{R}[t]$  ο δακτύλιος πολυωνύμων υπεράνω του  $\mathbb{R}$ , και έστω

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f: \text{λεία} \}$$

υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  καλείται λεία, αν έχει συνεχείς παραγώγους κάθε τάξης.

Θεωρούμε την απεικόνιση η οποία στέλνει κάθε λεία απεικόνιση  $f$  στην παράγωγό της  $f'$ .

$$D: \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad D(f) = f'$$

Για παράδειγμα οι συναρτήσεις  $f_1(t) = \sin(t)$ ,  $f_2(t) = \cos(t)$ ,  $f_3(t) = e^t$ , είναι λείες, αλλήλ η συνάρτηση  $g(t) = |t|$  δεν είναι λεία.

- (1) Να δειχθεί ότι το σύνολο  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  είναι ένας διανυσματικός χώρος άπειρης διάστασης υπεράνω του  $\mathbb{R}$  και η απεικόνιση  $D$  είναι  $\mathbb{R}$ -γραμμική.  
 (2) Να δειχθεί ότι η απεικόνιση

$$\Phi: \mathbb{R}[t] \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})), \quad \Phi(P(t)) = P(D)$$

όπου αν  $P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n \in \mathbb{R}[t]$ , τότε  $P(D)$  είναι η  $\mathbb{R}$ -γραμμική απεικόνιση  $P(D): \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $P(D)(f) = a_0f + a_1D(f) + a_2D^2(f) + \dots + a_nD^n(f) =$   
 $= a_0f + a_1f' + a_2f'' + \dots + a_nf^{(n)}$

είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων.

- (3) Ο υποδακτύλιος  $\text{Im}(\Phi)$  του δακτυλίου  $\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$  είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος, ο οποίος συμβολίζεται με  $\mathbb{R}[D]$  και καλείται ο **δακτύλιος των γραμμικών διαφορικών τελεστών επί του  $\mathbb{R}$** . Επιπλέον υπάρχει ένας ισομορφισμός δακτυλίων

$$\mathbb{R}[t]/I \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}[D]$$

για κατάλληλο ιδεώδες  $I$  του  $\mathbb{R}[t]$ , το οποίο και να περιγραφεί.

- (4) Να δειχθεί ότι

$$\mathbb{R}[D] = \{P(D) \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \mid P(t) \in \mathbb{R}[t]\}$$

- (5) Η αβελιανή ομάδα  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  αποκτά δομή  $\mathbb{R}[D]$ -προτύπου αν ορίσουμε (αριστερή) δράση:

$$\cdot: \mathbb{R}[D] \times \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad P(D) \cdot f = P(D)(f)$$

**Άσκηση 2.18.** (1) Θεωρούμε το σύνολο:

$$M = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) = f(-1) = 0\}$$

Να εξετασθεί αν το  $M$  είναι ένα  $\mathbb{R}[D]$ -υποπρότυπο του  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

- (2) Αν  $d \geq 0$ , έστω  $\mathbb{R}_d[t]$  ο διανυσματικός χώρος υπεράνω του  $\mathbb{R}$  ο οποίος αποτελείται από όλα τα πολυώνυμα με βαθμό  $\leq d$  μαζί με το μηδενικό πολυώνυμο:

$$\mathbb{R}_d[t] = \{P(t) \in \mathbb{R}[t] \mid \deg P(t) \leq d\} \cup \{0\}$$

Να δειχθεί ότι το  $\mathbb{R}_d[t]$  είναι με φυσικό τρόπο ένα  $\mathbb{R}[D]$ -πρότυπο, το οποίο είναι επιπρόσθετα κυκλικό, δηλαδή υπάρχει πολυώνυμο  $R(t) \in \mathbb{R}_d[t]$  έτσι ώστε:

$$\mathbb{R}_d[t] = \mathbb{R}[D] \cdot R(t) = \{P(D) \cdot R(t) \in \mathbb{R}_d[t] \mid P(D) \in \mathbb{R}[D]\}$$

όπου « $\cdot$ » είναι η (αριστερή) δράση του  $\mathbb{R}[D]$  επί του  $\mathbb{R}_d[t]$ .

- (3) Έστω  $\mathcal{V}$  το εξής σύνολο λείων συναρτήσεων

$$\mathcal{V} = \{a \sin(t) + b \cos(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Να δειχθεί ότι το  $\mathcal{V}$  είναι ένα  $\mathbb{R}[D]$ -πρότυπο και επιπλέον δεν υπάρχει μη-μηδενικός ομομορφισμός  $\mathbb{R}[D]$ -προτύπων  $\mathbb{R}_d[t] \longrightarrow \mathcal{V}$ .

Υπενθυμίζουμε ότι αν  $R$  και  $S$  είναι δακτύλιοι, τότε ένα  $(R, S)$ -**διπρότυπο** είναι μια αβελιανή ομάδα  $M$  η οποία είναι: (a) αριστερό  $R$ -πρότυπο (με αριστερή δράση “ $\cdot$ ”), (b) δεξιό  $S$ -πρότυπο (με δεξιά δράση “ $\star$ ”), και (c) ισχύει ότι:  $r \cdot (m \star s) = r \cdot (m \star s)$ ,  $\forall r \in R, \forall s \in S, \forall m \in M$ .

**Άσκηση 2.19.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος και  ${}_R M$  και  ${}_R N$  αριστερά  $R$ -πρότυπα, και έστω  $\text{End}_R(M)$  και  $\text{End}_R(N)$  οι δακτύλιοι ενδομορφισμών των  $M$  και  $N$  αντίστοιχα.

- (1) Να δειχθεί ότι το  $N$  αποκτά με φυσικό τρόπο δομή  $(\text{End}_R(N), R)$ -διπρότυπου και το  $M$  αποκτά με φυσικό τρόπο δομή  $(\text{End}_R(M), R^{\text{op}})$ -διπρότυπου:

$$\text{End}_R(N) N_R \quad \& \quad \text{End}_R(M) M_{R^{\text{op}}}$$

- (2) Ναδειχθεί ότι η αβελιανή ομάδα  $\text{Hom}_R(M, N)$  αποκτά με φυσικό τρόπο δομή  $(\text{End}_R(M), \text{End}_R(N))$ -διπρότυπου:

$$\text{End}_R(M) \text{ Hom}_R(M, N) \text{ End}_R(N)$$

**Άσκηση 2.20.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος και  ${}_R M_R$  ένα  $(R, R)$ -διπρότυπο. Στην αβελιανή ομάδα

$$R \times M = \{(r, m) \mid r \in R \ \& \ m \in M\}$$

ορίζουμε πράξη πολλαπλασιασμού ως εξής:

$$(r_1, m_1) \cdot (r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + m_1 r_2)$$

- (1) Ναδειχθεί ότι η τριάδα  $R \times M = (R \times M, +, \cdot)$  είναι δακτύλιος με μονάδα.  
 (2) Ναδειχθεί ότι το υποσύνολο  $\widetilde{M} = \{(0, m) \mid m \in M\}$  είναι ένα ιδεώδες του  $R \times M$ , για το οποίο ισχύει  $\widetilde{M}^2 = 0$ , και υπάρχει ένας ισομορφισμός

$$(R \times M) / \widetilde{M} \cong R$$

- (3) Ναδειχθεί ότι υπάρχουν ομομορφισμοί δακτυλίων  $\phi: R \longrightarrow R \times M$  και  $\psi: R \times M \longrightarrow R$  έτσι ώστε:  $\psi \circ \phi = \text{Id}_R$ .

Ο δακτύλιος  $R \times M$  καλείται η **τετριμμένη επέκταση** του δακτυλίου  $R$  ως προς το  $(R, R)$ -διπρότυπο  $M$ .

**Άσκηση 2.21.** Έστω  $R$  και  $S$  δύο δακτύλιος με μονάδα και  ${}_R M_S$  ένα  $(R, S)$ -διπρότυπο.

- (1) Ναδειχθεί ότι ορίζοντας

$$(R \times S) \times M \longrightarrow M, ((r, s), m) \longmapsto (r, s) \cdot m = rm \quad \text{και} \quad M \times (R \times S) \longrightarrow M, (m, (r, s)) \longmapsto m \cdot (r, s) = ms$$

η αβελιανή ομάδα  $M$  αποκτά δομή  $(R \times S, R \times S)$ -διπρότυπου.

- (2) Χρησιμοποιώντας «γενικευμένους πίνακες», συμβολίζουμε την αβελιανή ομάδα  $R \times S \times M = \{(r, s, m) \mid r \in R, s \in S, m \in M\}$ , ως εξής

$$\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \mid r \in R, s \in S, m \in M \right\}$$

Έτσι με τον παραπάνω συμβολισμό, το άθροισμα  $(r, s, m) + (r', s', m') = (r + r', s + s', m + m')$ , αντιστοιχεί στο άθροισμα των αντιστοιχών «πινάκων»  $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r' & m' \\ 0 & s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r+r' & m+m' \\ 0 & s+s' \end{pmatrix}$ .

Ορίζουμε πολλαπλασιασμό στα στοιχεία της αβελιανής ομάδας  $\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$  ως το «γινόμενο πινάκων»:

$$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r' & m' \\ 0 & s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rr' & rm' + ms' \\ 0 & ss' \end{pmatrix}$$

- (3) Ναδειχθεί ότι η τριάδα  $(\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}, +, \cdot)$  είναι ένας δακτύλιος με μονάδα ο οποίος είναι ισόμορφος με την τετριμμένη επέκταση  $(R \times S) \times M$ , βλέπε την Άσκηση 2.20.

Ο δακτύλιος  $\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$  καλείται ο **γενικευμένος (άνω) τριγωνικός δακτύλιος πινάκων** των δακτυλίων  $R$  και  $S$  ως προς το  $(R, S)$ -διπρότυπο  $M$ .

**Άσκηση 2.22.** Έστω ο γενικευμένος (άνω) τριγωνικός δακτύλιος πινάκων  $\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$  των δακτυλίων  $R$  και  $S$  ως προς το  $(R, S)$ -διπρότυπο  $M$ , βλέπε την Άσκηση 2.21.

Ναδειχθεί ότι τα δεξιά ιδεώδη του δακτυλίου  $\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$  είναι της μορφής

$$\left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix} \mid r \in I, (m, s) \in N \right\}$$

όπου  $I$  είναι ένα δεξιά ιδεώδες του  $R$ , και  $N$  είναι ένα υποπρότυπο του  $S$ -πρότυπου  $M \times S$  έτσι ώστε  $IM := \{rm \in M \mid r \in I\} \subseteq N$ . Τι μορφή έχουν τα αριστερά ιδεώδη του δακτυλίου  $\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ ;

**Άσκηση 2.23.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος και  ${}_R M$  ένα δεξιό  $R$ -πρότυπο. Θεωρούμε τον μηδενιστή

$$\text{Ann}_R(M) = \{r \in R \mid mr = 0, \forall m \in M\}$$

του  $M$ , ο οποίος είναι διπλό ιδεώδες του  $R$ , βλ. Άσκηση 2.14. Το  $R$ -πρότυπο  $M$  καλείται **πιστό** αν  $\text{Ann}_R(M) = 0$ .

(1) Ναδειχθεί ότι το  $M$  είναι πιστό πρότυπο υπεράνω του δακτυλίου πηλίκο  $R/\text{Ann}_R(M)$ .

(2) Το  $M$  είναι πιστό ως πρότυπο υπεράνω του δακτυλίου  $\text{End}_R(M)$ .

**Άσκηση 2.24.** Έστω  $(\mathcal{V}, f)$  ένα ζεύγος αποτελούμενο από έναν διανυσματικό χώρο  $\mathcal{V}$  υπεράνω ενός σώματος  $\mathbb{K}$ , και από μια γραμμική απεικόνιση  $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ . Θεωρούμε το ζεύγος  $(\mathcal{V}, f)$  ως  $\mathbb{K}[t]$ -πρότυπο, όπως στην ανάλυση πριν την Άσκηση 2.15. Να περιγραφούν τα υποπρότυπα του  $\mathbb{K}[t]$ -προτύπου  $(\mathcal{V}, f)$ .

Ποιά είναι τα υποπρότυπα του  $\mathbb{R}[t]$ -προτύπου  $(\mathbb{R}^2, f)$ , όπου  $f(x, y) = (-y, x)$ ;

Ποιά είναι τα υποπρότυπα του  $\mathbb{R}[t]$ -προτύπου  $(\mathbb{R}^3, f)$ , όπου  $f(x, y, z) = (y, z, x)$ ;

**Άσκηση 2.25.** Έστω  $\mathbb{K}$  ένα σώμα και  $k, l \in \mathbb{K}$ , όπου  $k \neq l$ . Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση

$$f: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2, \quad f(x, y) = (kx, ly)$$

Να βρεθούν όλα τα υποπρότυπα του  $\mathbb{K}[t]$ -προτύπου  $(\mathbb{K}^2, f)$ .

**Άσκηση 2.26.** Θεωρούμε τον πίνακα πραγματικών αριθμών

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

και έστω  $M_A = \mathbb{R}_2$  το επαγόμενο  $\mathbb{R}[t]$ -πρότυπο, Θεωρούμε τα υποσύνολα

$$N_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2 \mid x = -3y \right\} \quad \text{και} \quad N_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2 \mid x = -4y \right\}$$

Είναι τα υποσύνολα  $N_1$  και  $N_2$  υποπρότυπα του  $M_A$ ;

**Άσκηση 2.27.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος χωρίς διαίρετες του μηδενός. Ναδειχθεί ότι αν ο  $R$  έχει ένα ελάχιστο αριστερό ιδεώδες (ή ένα ελάχιστο δεξιό ιδεώδες), τότε ο  $R$  είναι δακτύλιος διαίρεσης.

**Άσκηση 2.28.** Έστω  $M_n(\mathbb{K})$  ο δακτύλιος των  $n \times n$  πινάκων υπεράνω του σώματος  $\mathbb{K}$ . Ναδειχθεί ότι ο χώρος των στηλών  $\mathbb{K}_n$  είναι ένα δεξιό κυκλικό  $M_n(\mathbb{K})$ -πρότυπο και ο χώρος γραμμών  $\mathbb{K}^n$  είναι ένα αριστερό κυκλικό  $M_n(\mathbb{K})$ -πρότυπο.

**Άσκηση 2.29.** Να προσδιορισθούν όλα τα απλά δεξιά ή αριστερά  $M_n(\mathbb{K})$ -πρότυπα, όπου  $M_n(\mathbb{K})$  ο δακτύλιος των  $n \times n$  πινάκων υπεράνω ενός σώματος  $\mathbb{K}$ .

**Άσκηση 2.30.** Να προσδιορισθούν όλα τα απλά δεξιά ή αριστερά  $\text{AT}_2(\mathbb{K})$ -πρότυπα, όπου  $\text{AT}_2(\mathbb{K})$  ο δακτύλιος των  $2 \times 2$  άνω τριγωνικών πινάκων υπεράνω ενός σώματος  $\mathbb{K}$ .

**Άσκηση 2.31.** Ναδειχθεί ότι το  $\mathbb{Z}$ -πρότυπο  $\mathbb{Q}$  δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο, και κάθε πεπερασμένα παραγόμενο υποπρότυπό του είναι κυκλικό.

**Άσκηση 2.32.** Θεωρούμε τον δακτύλιο  $M_2(\mathbb{K})$  των  $2 \times 2$  πινάκων υπεράνω ενός σώματος  $\mathbb{K}$ .

(1) Ναδειχθεί ότι τα σύνολα

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x \\ y & 2y \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}) \mid x, y \in \mathbb{K} \right\} \quad \text{και} \quad J = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}) \mid x, y \in \mathbb{K} \right\}$$

είναι αριστερά  $M_2(\mathbb{K})$ -πρότυπα και υπάρχει ένας ισομορφισμός αριστερών  $M_2(\mathbb{K})$ -προτύπων

$$M_2(\mathbb{K})/I \cong J$$

(2) Ναδειχθεί ότι τα σύνολα

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} -x & 3x \\ -y & 3y \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}) \mid x, y \in \mathbb{K} \right\} \quad \text{και} \quad J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}) \mid x, y \in \mathbb{K} \right\}$$

είναι αριστερά  $M_2(\mathbb{K})$ -πρότυπα και υπάρχει ένας ισομορφισμός αριστερών  $M_2(\mathbb{K})$ -προτύπων

$$M_2(\mathbb{K})/I \cong J$$

**Άσκηση 2.33.** Έστω  $K, L, N$  υποπρότυπα ενός αριστερού  $R$ -προτύπου  $M$ . Αν  $L \subseteq N$ , ναδειχθεί ότι

$$(N \cap K) + L = N \cap (K + L)$$

Ισχύει η παραπάνω ισότητα αν  $L \not\subseteq N$ ;

**Άσκηση 2.34.** Έστω  $\{N_i\}_{i \in I}$  μια οικογένεια υποπροτύπων του αριστερού  $R$ -προτύπου  $M$ . Ναδειχθεί ότι η ένωση  $\bigcup_{i \in I} N_i$  δεν είναι υποπρότυπο του  $M$ . Ποιό είναι το μικρότερο υποπρότυπο του  $M$  το οποίο περιέχει όλα τα υποπρότυπα  $N_i$ ;

**Άσκηση 2.35.** Έστω  $M$  ένα  $R$ -πρότυπο και  $\{M_i\}_{i=1}^n$  ένα σύνολο υποπροτύπων του  $M$  έτσι ώστε:  $M = \sum_{i=1}^n M_i$ .

(1) Αν:

$$M_1 \cap M_2 = 0, \quad (M_1 + M_2) \cap M_3 = 0, \quad \dots, \quad (M_1 + \dots + M_{n-1}) \cap M_n = 0$$

τότε:  $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ .

(2) Αν  $M = M_1 \oplus M_2$ , τότε:  $M/M_1 \cong M_2$  και  $M/M_2 \cong M_1$ .

**Άσκηση 2.36.** Έστω  $f: R \rightarrow S$  ένας επιμορφισμός δακτυλίων και  $M$  μια αβελιανή ομάδα.

(1) Αν η αβελιανή ομάδα  $M$  είναι ένα αριστερό  $S$ -πρότυπο, ναδειχθεί ότι το  $M$  αποκτά με φυσικό τρόπο δομή αριστερού  $R$ -προτύπου έτσι ώστε  $\text{Ker}(f) \subseteq \text{Ann}_R(M)$ .

(2) Αν η αβελιανή ομάδα  $M$  είναι ένα αριστερό  $R$ -πρότυπο και  $\text{Ker}(f) \subseteq \text{Ann}_R(M)$ , τότε η αβελιανή ομάδα  $M$  αποκτά με φυσικό τρόπο δομή αριστερού  $S$ -προτύπου.

**Άσκηση 2.37.** Έστω  ${}_R M \neq 0$  ένα πεπερασμένα παραγόμενο (αριστερό)  $R$ -πρότυπο υπεράνω του δακτυλίου  $R$ . Ναδειχθεί ότι υπάρχει γνήσιο υποπρότυπο  $N$  του  $M$  έτσι ώστε το πρότυπο πηλίκο  $M/N$  είναι απλό.

Ως εφαρμογή ναδειχθεί ότι: για κάθε δακτύλιο  $R$  υπάρχει ένα αριστερό (δεξιό) ιδεώδες  $I$  του  $R$ , έτσι ώστε το πρότυπο πηλίκο  $R/I$  είναι απλό αριστερό (δεξιό)  $R$ -πρότυπο.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Λήμμα του Zorn.



**Άσκηση 2.38.** Έστω  $R$  μια ακέραια περιοχή. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) Ο ακέραια περιοχή  $R$  είναι σώμα.
- (2) Το (αριστερό)  $R$ -πρότυπο  $R$  είναι απλό.
- (3) Για κάθε (αριστερό) υποπρότυπο  $X$  του  $R$ -προτύπου  $R$ , υπάρχει ένα  $R$ -υποπρότυπο  $Y$  του  $R$  έτσι ώστε:  
 $X \oplus Y = R$ .

**Σχόλιο 1.** Με βάση το αποτέλεσμα της Άσκησης 2.37 μπορεί να δοθεί μια διαφορετική απόδειξη του ισχυρισμού της Άσκησης 2.31 ότι το  $\mathbb{Z}$ -πρότυπο  $\mathbb{Q}$  δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο ως εξής. Αν το  $\mathbb{Q}$  ήταν πεπερασμένα παραγόμενο, τότε σύμφωνα με την Άσκηση 2.37 θα υπήρχε γνήσια υποομάδα  $H$  της προσθετικής ομάδας  $\mathbb{Q}$  έτσι ώστε η ομάδα πηλίκο  $\mathbb{Q}/H$  να είναι απλή. Γνωρίζουμε όμως ότι οι απλές αβελιανές ομάδες είναι οι κυκλικές με τάξη έναν πρώτο αριθμό, έστω  $p$ . Επομένως  $|\mathbb{Q}/H| = p < \infty$ . Τότε  $\forall x + H \in \mathbb{Q}/H$ :  $p(x + H) = px + H = H$  και άρα  $px \in H$ . Για κάθε ρητό αριθμό  $y \in \mathbb{Q}$ , θα έχουμε  $y = p \frac{y}{p} \in H$ , το οποίο σημαίνει ότι  $\mathbb{Q} = H$ , και αυτό είναι άτοπο διότι η υποομάδα  $H$  είναι γνήσια. Άρα η αβελιανή ομάδα  $\mathbb{Q}$  δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενη. ✓

Υπενθυμίζουμε ότι ένας δακτύλιος  $R$  καλείται **αριστερός (αντ. δεξιός) δακτύλιος του Artin** αν κάθε φθίνουσα ακολουθία αριστερών (αντ. δεξιών) ιδεωδών

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_k \supseteq I_{k+1} \supseteq \dots$$

του  $R$  σταματά, δηλαδή υπάρχει  $n \in \mathbb{N}$ :  $I_{k+n} = I_n, \forall n \geq 1$ .

Ο δακτύλιος  $R$  καλείται **αριστερός (αντ. δεξιός) δακτύλιος της Noether** αν κάθε αύξουσα ακολουθία αριστερών (αντ. δεξιών) ιδεωδών

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_k \subseteq I_{k+1} \subseteq \dots$$

του  $R$  σταματά, δηλαδή υπάρχει  $n \in \mathbb{N}$ :  $I_{k+n} = I_n, \forall n \geq 1$ .

**Άσκηση 2.39.** Έστω  $D$  ένας δακτύλιος διαίρεσης και  $n \in \mathbb{N}$ . Ναδειχθεί ότι ο δακτύλιος πινάκων  $M_n(D)$  είναι (δεξιός και αριστερός) δακτύλιος του Artin και της Noether.

**Άσκηση 2.40.** Ναδειχθεί ότι ένας αριστερός, αντ. δεξιός, δακτύλιος του Artin  $R$  έχει πεπερασμένο πλήθος μέγιστων αριστερών, αντ. δεξιών, ιδεωδών και επομένως έχει πεπερασμένο πλήθος απλών αριστερών, αντ. δεξιών,  $R$ -προτύπων.

Ναδειχθεί με ένα αντιπαράδειγμα ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει αν ο δακτύλιος  $R$  είναι αριστερός, αντ. δεξιός, δακτύλιος της Noether, αλλιά όχι του Artin.

**Άσκηση 2.41.** Έστω  $f: R \rightarrow S$  ένας ομομορφισμός δακτυλίων. Για κάθε αριστερό  $S$ -πρότυπο  ${}_S M$ , θεωρούμε πάντα την αβελιανή ομάδα  $M$  ως αριστερό  $R$ -πρότυπο  ${}_R M$  με αριστερή δράση:  $r \cdot m = f(r) \cdot m, \forall r \in R, \forall m \in M$ .

- (1) Ναδειχθεί ότι αν  ${}_S M$  και  ${}_S N$  είναι αριστερά  $S$ -πρότυπα, τότε:  ${}_R(M \oplus N) = {}_R M \oplus {}_R N$ .
- (2) Ναδειχθεί ότι  $\text{Hom}_S({}_S M, {}_S N) \subseteq \text{Hom}_R({}_R M, {}_R N)$ , και η ισότητα ισχύει αν ο ομομορφισμός δακτυλίων  $f$  είναι επιμορφισμός.
- (3) Αν  ${}_S N$  είναι ένα υποπρότυπο του αριστερού  $S$ -προτύπου  ${}_S M$ , τότε το αριστερό  $R$ -πρότυπο  ${}_R N$  είναι υποπρότυπο του  ${}_R M$ . Αν επιπλέον ο ομομορφισμός δακτυλίων  $f$  είναι επιμορφισμός, τότε κάθε υποπρότυπο του  ${}_R M$  είναι αυτής της μορφής.

Μια (προσθετική) αβελιανή ομάδα  $(M, +)$  καλείται **διααιρετή** αν για κάθε  $n \in \mathbb{Z}^*$  ισχύει ότι:

$$nM = M, \quad \text{δηλαδή: } \forall n \in \mathbb{Z}^*, \forall y \in M \exists x \in M : nx = y$$

- Άσκηση 2.42.** (1) Ναδειχθεί ότι κάθε πηλίκο μιας διααιρετής αβελιανής ομάδας είναι διααιρετή.  
 (2) Είναι υποομάδες διααιρετών αβελιανών ομάδων διααιρετές αβελιανές ομάδες;  
 (3) Ναδειχθεί ότι οι αβελιανές ομάδες  $\mathbb{Q}$  και  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  είναι διααιρετές.  
 (4) Έστω  $\{M_i\}_{i \in I}$  μια οικογένεια διααιρετών αβελιανών ομάδων. Ναδειχθεί ότι οι αβελιανές ομάδες  $\bigoplus_{i \in I} M_i$  και  $\prod_{i \in I} M_i$  είναι διααιρετές.

**Άσκηση 2.43.** Αν  $(M, +)$  είναι μια αβελιανή ομάδα, ναδειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) Υπάρχει (αριστερή) δράση  $\cdot : \mathbb{Q} \times M \rightarrow M$ , έτσι ώστε η τριάδα  $(M, +, \cdot)$  είναι (αριστερό)  $\mathbb{Q}$ -πρότυπο.  
 (2) Η αβελιανή ομάδα  $M$  είναι διααιρετή και ελεύθερης στρέψης<sup>12</sup>.

**Σχόλιο 2.** Η παραπάνω Άσκηση 2.43 δείχνει ότι κάθε διααιρετή αβελιανή ομάδα ελεύθερης στρέψης είναι  $\mathbb{Q}$ -διανυσματικός χώρος και επομένως, με χρήση Γραμμικής Άλγεβρας, θα είναι ισόμορφη με το ευθύ άθροισμα από αντίγραφα της αβελιανής ομάδας  $\mathbb{Q}$ .

**Άσκηση 2.44.** Έστω  $M$  ένα αριστερό  $R$ -πρότυπο και έστω ότι  $M_i, 1 \leq i \leq n$ , είναι υποπρότυπα του  $M$  έτσι ώστε:

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$$

Έστω ότι  $N_i, 1 \leq i \leq n$ , είναι υποπρότυπα των  $M_i, 1 \leq i \leq n$ , αντίστοιχα. Ναδειχθεί ότι:

$$N_1 + N_2 + \cdots + N_n = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_n$$

και να εξετασθεί αν κάθε υποπρότυπο του  $M$  είναι ευθύ άθροισμα υποπρωτύπων των  $M_i, 1 \leq i \leq n$ .

**Άσκηση 2.45.** Έστω  $N$  ένα υποπρότυπο του αριστερού  $R$ -πρωτύπου  $M$ . Αποδείξτε τους παρακάτω ισχυρισμούς (αν αυτοί είναι αληθείς) ή δώστε αντιπαραδείγματα (αν οι ισχυρισμοί δεν είναι αληθείς).

- (1) Αν το  $M$  είναι πεπερασμένα παραγόμενο, τότε το  $N$  είναι πεπερασμένα παραγόμενο.  
 (2) Αν το  $M$  είναι πεπερασμένα παραγόμενο, τότε το  $M/N$  είναι πεπερασμένα παραγόμενο.  
 (3) Αν τα  $N$  και  $M/N$  είναι πεπερασμένα παραγόμενα, τότε το  $M$  είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

Έστω  $R$  ένας δακτύλιος και  $X$  ένα μη-κενό υποσύνολο του  $R$ . Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο

$$\text{ann}_r(X) = \{r \in R \mid xr = 0, \forall x \in X\}$$

καλείται ο **δεξιός μηδενιστής** του  $X$  στον  $R$ , και το σύνολο

$$\text{ann}_l(X) = \{r \in R \mid rx = 0, \forall x \in X\}$$

καλείται ο **αριστερός μηδενιστής** του  $X$  στον  $R$ .

**Άσκηση 2.46.** Έστω  $R$  ένας ημιαπλός δακτύλιος,  $I$  ένα αριστερό ιδεώδες του  $R$  και  $J$  ένα δεξιό ιδεώδες του  $R$ . Ναδειχθεί ότι:

$$I = \text{ann}_l(\text{ann}_r(I)) \quad \text{και} \quad J = \text{ann}_r(\text{ann}_l(J))$$

<sup>12</sup>Υπενθυμίζουμε ότι μια αβελιανή ομάδα καλείται ελεύθερης στρέψης αν όλα τα στοιχεία της, εκτός του ουδετέρου, έχουν άπειρη τάξη.

**Άσκηση 2.47.** Να βρεθούν όλα τα (αριστερά) απλά  $R$ -πρότυπα, στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- (1)  $R = \left\{ \frac{a}{n} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, 2 \nmid n \right\}$ .
- (2)  $\mathbb{C}[x, y]/I$ , όπου  $I$  είναι το κύριο ιδεώδες του δακτυλίου πολυωνύμων  $\mathbb{C}[x, y]$  το οποίο παράγεται από το πολυώνυμο  $x^2 + y^2 - 1$ .
- (3)  $R = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f: \text{συνεχής}\}$ .

Υπενθυμίζουμε ότι ένα αριστερό  $R$ -πρότυπο  $M$  καλείται **πρότυπο της Noether**, αν κάθε αύξουσα ακολουθία υποπρωτύπων

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_k \subseteq M_{k+1} \subseteq \cdots$$

του  $M$  σταματά, δηλαδή υπάρχει  $n \in \mathbb{N}$ :  $M_{k+n} = M_n, \forall n \geq 1$ .

Το αριστερό  $R$ -πρότυπο  $M$  καλείται **πρότυπο του Artin**, αν κάθε φθίνουσα ακολουθία υποπρωτύπων

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_k \supseteq M_{k+1} \supseteq \cdots$$

του  $M$  σταματά, δηλαδή υπάρχει  $n \in \mathbb{N}$ :  $M_{k+n} = M_n, \forall n \geq 1$ .

**Άσκηση 2.48.** Έστω  $M$  ένα αριστερό  $R$ -πρότυπο, και  $f: M \rightarrow M$  ένας ομομορφισμός προτύπων.

- (1) Ναδειχθεί ότι αν  $M$  είναι πρότυπο της Noether, τότε ο  $f$  είναι επιμορφισμός αν και μόνον αν ο  $f$  είναι ισομορφισμός.
- (2) Ναδειχθεί ότι αν  $M$  είναι πρότυπο του Artin, τότε ο  $f$  είναι μονομορφισμός αν και μόνον αν ο  $f$  είναι ισομορφισμός.

**Άσκηση 2.49.** Έστω  $M$  ένα αριστερό  $R$ -πρότυπο το οποίο είναι πρότυπο του Artin και της Noether, και έστω  $f: M \rightarrow M$  ένας ομομορφισμός προτύπων.

- (1) Ναδειχθεί ότι υπάρχουν υποπρότυπα  $M_0$  και  $M_1$  του  $M$  έτσι ώστε:

$$M = M_0 \oplus M_1$$

και ισχύει ότι:  $f(M_0) \subseteq M_0$  και  $f(M_1) \subseteq M_1$ .

- (2) Ναδειχθεί ότι για τους επαγόμενους ομομορφισμούς προτύπων

$$f_0 = f|_{M_0}: M_0 \rightarrow M_0 \quad \text{και} \quad f_1 = f|_{M_1}: M_1 \rightarrow M_1$$

ισχύει ότι: ο ομομορφισμός  $f_1$  είναι ισομορφισμός, και ο ομομορφισμός  $f_0$  είναι μηδενοδύναμος, δηλαδή  $f_0^k = 0$ , για κάποιον θετικό ακέραιο  $k$ .

**Άσκηση 2.50.** Έστω  $f: M \rightarrow N$  και  $g: N \rightarrow M$  δύο ομομορφισμοί αριστερών  $R$ -πρωτύπων.

- (1) Αν  $f \circ g = \text{Id}_N$ , τότε:

$$M = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$$

- (2) Αν  $g \circ f = \text{Id}_M$ , τότε:

$$M = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(g)$$

**Άσκηση 2.51.** Έστω  $M$  ένα (αριστερό)  $\mathbb{K}[t]$ -πρότυπο, όπου  $\mathbb{K}$  είναι ένα σώμα, και υποθέτουμε ότι το  $M$  ως  $\mathbb{K}$ -διανυσματικός χώρος έχει πεπερασμένη διάσταση. Ναδειχθεί ότι υπάρχει θετικός ακέραιος  $n$  και τετραγωνικός πίνακας  $A \in M_n(\mathbb{K})$  έτσι ώστε το  $M$  είναι ισόμορφο ως  $\mathbb{K}[t]$ -πρότυπο με το  $M_A$ , βλέπε την ανάληψη πριν την Άσκηση 2.16.

**Άσκηση 2.52.** Έστω πίνακες πραγματικών αριθμών:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί ο μηδενιστής

$$\text{Ann}_{\mathbb{R}[t]}(K) := \{P(t) \in \mathbb{R}[t] \mid P(t) \cdot x = 0, \forall x \in K\}$$

του  $\mathbb{R}[t]$ -προτύπου  $K$ , όπου  $K$  είναι ένα εκ των  $\mathbb{R}[t]$ -προτύπων  $M_A, M_B, M_C$ , και  $M_D$ , και ακολούθως να εξετασθεί αν το  $K$  είναι κυκλικό ή απλό  $\mathbb{R}[t]$ -πρότυπο.

**Άσκηση 2.53.** Θεωρούμε τα  $\mathbb{K}[t]$ -πρότυπα  $M_X$ , όπου  $X$  είναι ένας εκ των πινάκων  $A, B, C, D$  της Άσκησης 2.52. Να βρείτε όλους τους ομομορφισμούς  $\mathbb{K}[t]$ -προτύπων  $M_A \rightarrow M_D$  και  $M_C \rightarrow M_D$ , και να περιγράψετε όσο καλύτερα μπορείτε τους δακτυλίους  $\text{End}_{\mathbb{K}[t]}(M_A)$  και  $\text{End}_{\mathbb{K}[t]}(M_C)$ .

**Άσκηση 2.54.** Έστω  $R$  το σύνολο των πολυωνύμων υπεράνω του  $\mathbb{Q}$  των οποίων ο σταθερός όρος είναι μηδέν. Τότε, με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού πολυωνύμων, το σύνολο  $R$  αποτελεί μεταθετικό δακτύλιο χωρίς μονάδα. Ναδειχθεί ότι δεν υπάρχουν απλά  $R$ -πρότυπα.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείτε ότι, λόγω του Σχολίου 1, δεν υπάρχει απλό  $\mathbb{Z}$ -πρότυπο της μορφής  $\mathbb{Q}/H$ , όπου  $H$  είναι  $\mathbb{Z}$ -υποπρότυπο του  $\mathbb{Q}$ .

Έστω  $R$  ένας μεταθετικός δακτύλιος. Μια (προσεταιριστική με μονάδα)  $R$ -**άλγεβρα** είναι ένα  $R$ -πρότυπο  $\Lambda = (\Lambda, +, \cdot)$ , όπου η αριστερή δράση του του  $R$  επί του  $\Lambda$  συμβολίζεται με « $\cdot$ » και η πρόσθεση της υποκείμενης αβελιανής ομάδας συμβολίζεται με « $+$ », το εφοδιασμένο με μια απεικόνιση:

$$\circ : \Lambda \times \Lambda \longrightarrow \Lambda, \quad (x, y) \longmapsto x \circ y$$

έτσι ώστε:

(1) Η τριάδα  $(\Lambda, +, \circ)$  είναι ένας (προσεταιριστικός) δακτύλιος με μονάδα.

(2)  $\forall r \in R, \forall x, y \in \Lambda$ :

$$r \cdot (x \circ y) = (r \cdot x) \circ y = x \circ (r \cdot y)$$

Αν  $\Lambda$  και  $\Gamma$  είναι  $R$ -άλγεβρες υπεράνω ενός μεταθετικού δακτυλίου  $R$ , τότε ένας ομομορφισμός δακτυλίων  $f: \Lambda \rightarrow \Gamma$  καλείται **ομομορφισμός  $R$ -αλγεβρών** αν:

$$\forall r \in R, \forall x \in \Lambda : f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$$

**Άσκηση 2.55.** Ναδειχθεί ότι αν  $\Lambda$  είναι μια  $R$ -άλγεβρα, τότε η απεικόνιση

$$\alpha : R \longrightarrow \Lambda, \quad \alpha(r) = r \cdot 1_\Lambda$$

είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων και:  $\text{Im}(\alpha) \subseteq Z(\Lambda)$ .

Αντίστροφα, αν  $(\Lambda, +, \circ)$  είναι ένας δακτύλιος, και  $\alpha: R \rightarrow \Lambda$  είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων έτσι ώστε  $\text{Im}(\alpha) \subseteq Z(\Lambda)$ , τότε ο δακτύλιος  $\Lambda$  αποκτά δομή  $R$ -άλγεβρας, ορίζοντας δράση του  $R$  επί του  $\Lambda$  ως εξής:

$$\cdot : R \times \Lambda \longrightarrow \Lambda, \quad r \cdot x = \alpha(r) \circ x$$

Μια  $R$ -άλγεβρα  $\Lambda$  καλείται **πιστή  $R$ -άλγεβρα** αν:

$$\text{Ann}_R(\Lambda) := \{r \in R \mid r \cdot \lambda = 0, \forall \lambda \in \Lambda\} = 0$$

Σημειώνουμε ότι  $\text{Ann}_R(\Lambda) = \{r \in R \mid r \cdot 1_\Lambda = 0\}$ .

**Άσκηση 2.56.** Έστω  $R$  ένας μεταθετικός δακτύλιος.

- (1) Ο δακτύλιος πολυωνύμων  $R[t]$  είναι  $R$ -άλγεβρα.
- (2) Ο δακτύλιος πινάκων  $M_n(R)$  είναι  $R$ -άλγεβρα.
- (3) Το σώμα  $\mathbb{C}$  των μιγαδικών αριθμών είναι μια  $\mathbb{R}$ -άλγεβρα.
- (4) Ο δακτύλιος διαίρεσης  $\mathbb{H}$  των τετρανίων του Hamilton είναι μια  $\mathbb{R}$ -άλγεβρα.  
Είναι ο δακτύλιος  $\mathbb{H}$ , με φυσικό τρόπο, μια  $\mathbb{C}$ -άλγεβρα;

**Άσκηση 2.57.** Έστω  $G$  μια ομάδα με ουδέτερο στοιχείο  $e$ , για την οποία ισχύει ότι  $x^2 = e, \forall x \in G$ . Ναδειχθεί ότι το σύνολο  $G$  αποκτά με φυσικό τρόπο δομή  $\mathbb{Z}_2$ -διανυσματικού χώρου, και επομένως υπάρχει κατάλληλο σύνολο δεικτών  $I$  και ένας ισομορφισμός  $\mathbb{Z}_2$ -διανυσματικός χώρων:

$$G \cong \bigoplus_{i \in I} G_i, \quad \text{όπου} \quad G_i = \mathbb{Z}_2, \quad \forall i \in I$$

Ιδιαίτερα αν  $|G| = n < \infty$ , τότε  $n = 2^m$  για κατάλληλο θετικό ακέραιο  $m$  και η αβελιανή ομάδα  $G$  είναι ισόμορφη με την ομάδα ευθύ γινόμενο

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2 \quad (m \text{ παράγοντες})$$

**Άσκηση 2.58.** (1) Έστω  $\Lambda$  μια  $R$ -άλγεβρα υπεράνω ενός μεταθετικού δακτυλίου  $R$ . Αν  ${}_{\Lambda}M$  είναι ένα αριστερό  $\Lambda$ -πρότυπο, τότε το  $M$  αποκτά με φυσικό τρόπο δομή  $R$ -πρωτύπου.

- (2) Κάθε δακτύλιος  $\Lambda$  είναι με φυσικό τρόπο πιστή  $Z(\Lambda)$ -άλγεβρα.
- (3) Κάθε δακτύλιος είναι  $\mathbb{Z}$ -άλγεβρα.
- (4) Πότε ένας δακτύλιος  $\Lambda$  μπορεί να αποκτήσει δομή  $\mathbb{Z}_n$ -άλγεβρας;

**Άσκηση 2.59.** Έστω  $\mathbb{K}$  ένα σώμα. Ναδειχθεί ότι κάθε  $\mathbb{K}[t]$ -πρότυπο της μορφής  $M_{(\lambda)}$ , όπου  $(\lambda)$  είναι ο  $1 \times 1$  πίνακας με μοναδικό στοιχείο το  $\lambda \in \mathbb{K}$ , είναι απλό  $\mathbb{K}[t]$ -πρότυπο.

Αντίστροφα, αν το σώμα  $\mathbb{K}$  είναι αλγεβρικά κλειστό, ναδειχθεί ότι κάθε απλό  $\mathbb{K}[t]$ -πρότυπο είναι ισόμορφο με ένα  $\mathbb{K}[t]$ -πρότυπο της μορφής  $M_{(\lambda)}$ , για κάποιο  $\lambda \in \mathbb{K}$ .<sup>13</sup>

**Άσκηση 2.60.** Έστω  $A \in M_n(\mathbb{K})$  ένας διαγώνιος πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα  $\mathbb{K}$ .

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Να δείξετε ότι:

- (1) Για κάθε  $\lambda \in \mathbb{K}$ , κάθε  $\mathbb{K}[t]$ -πρότυπο της μορφής  $M_{(\lambda)}$ , όπου  $(\lambda)$  είναι ο  $1 \times 1$  πίνακας με μοναδικό στοιχείο το  $\lambda \in \mathbb{K}$ , είναι απλό  $\mathbb{K}[t]$ -πρότυπο.
- (2) Υπάρχει μια αποσύνθεση:

$$M_A = M_{(\lambda_1)} \oplus M_{(\lambda_2)} \oplus \cdots \oplus M_{(\lambda_n)}$$

του  $\mathbb{K}[t]$ -πρωτύπου  $M_A$  σε ευθύ άθροισμα των απλών  $\mathbb{K}[t]$ -πρωτύπων  $M_{(\lambda_i)}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

<sup>13</sup>Υπόδειξη για το Αντίστροφο: Για κάθε σώμα  $\mathbb{K}$  τα απλά  $\mathbb{K}[t]$ -πρότυπα  $S$  είναι ισόμορφα με  $\mathbb{K}[t]$ -πρότυπα της μορφής  $\mathbb{K}[t]/(f(t))$ , όπου  $f(t)$  είναι ένα ανάγωγο πολυώνυμο υπεράνω του  $\mathbb{K}$ . Αν το σώμα  $\mathbb{K}$  είναι αλγεβρικά κλειστό, τότε το  $f(t)$  είναι της μορφής  $f(t) = t - \lambda$ , για κάποιο  $\lambda \in \mathbb{K}$ , και άρα  $S \cong \mathbb{K}[t]/(t - \lambda)$ . Κατασκευάστε έναν ισομορφισμό  $\alpha: \mathbb{K}[t]/(t - \lambda) \rightarrow M_{(\lambda)}$ .

- (3) Να συμπεράνετε ότι διαγωνοποιήσιμοι πίνακες ορίζουν, με ακρίβεια ισομορφισμού  $\mathbb{K}[t]$ -προτύπων, (πεπερασμένα παραγόμενα) ημιαπλά<sup>14</sup>  $\mathbb{K}[t]$ -πρότυπα.

**Άσκηση 2.61.** Έστω  $A \in M_n(\mathbb{K})$  και  $B \in M_m(\mathbb{K})$  δύο τετραγωνικοί πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα  $\mathbb{K}$ . Το **ευθύ άθροισμα** των πινάκων  $A$  και  $B$  είναι ο ακόλουθος  $(n+m) \times (n+m)$  πίνακας:

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & O_{n \times m} \\ O_{m \times n} & B \end{pmatrix}$$

όπου  $O_{n \times m}$  είναι ο μηδενικός  $n \times m$  πίνακας και  $O_{m \times n}$  είναι ο μηδενικός  $m \times n$  πίνακας.

Να δειχθεί ότι για τα επαγόμενα  $\mathbb{K}[t]$ -πρότυπα  $M_A, M_B, M_{A \oplus B}$  ισχύει ότι:

$$M_A \oplus M_B \cong M_{A \oplus B}$$

**Άσκηση 2.62.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος και  ${}_R M$  ένα αριστερό  $R$ -πρότυπο. Το στοιχείο  $m \in M$  καλείται **στοιχείο στρέψης**, αν υπάρχει στοιχείο  $r \in R$  το οποίο  $r$  δεν είναι (αριστερός ή δεξιό) διαφέτης του μηδενός, έτσι ώστε:  $r \cdot m = 0$ . Το  $M$  καλείται  **$R$ -πρότυπο στρέψης** αν κάθε στοιχείο του είναι στοιχείο στρέψης. Το  $M$  καλείται  **$R$ -πρότυπο ελεύθερης στρέψης** αν το μόνο στοιχείο στρέψης του  $M$  είναι το μηδέν.

- (1) Να δοθούν μη-τετριμμένα παραδείγματα  $R$ -πρότυπων στρέψης και  $R$ -προτύπων ελεύθερης στρέψης, όταν  $R = \mathbb{Z}$  ή  $R = \mathbb{K}$  (σώμα).
- (2) Να δειχθεί ότι κάθε  $\mathbb{K}[t]$ -πρότυπο το οποίο ως  $\mathbb{K}$ -διανυσματικός χώρος έδει πεπερασμένη διάσταση, είναι πρότυπο στρέψης.

**Άσκηση 2.63.** Θεωρούμε το σύνολο  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  ως  $\mathbb{R}[D]$ -πρότυπο. Να δειχθεί ότι το  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  δεν είναι  $\mathbb{R}[D]$ -πρότυπο στρέψης ούτε  $\mathbb{R}[D]$ -πρότυπο ελεύθερης στρέψης. βλ. Άσκηση 2.62. Επίσης να δειχθεί ότι το  $\mathbb{R}[D]$ -πρότυπο  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

**Άσκηση 2.64.** Έστω  $R$  ένας μεταθετικός δακτύλιος και  $M$  ένα  $R$ -πρότυπο.

- (1) Το σύνολο

$$t(M) = \{m \in M \mid m : \text{στοιχείο στρέψης}\}$$

είναι ένα υποπρότυπο του  $M$  το οποίο είναι πρότυπο στρέψης.

- (2) Το  $R$ -πρότυπο  $M$  είναι πρότυπο στρέψης αν και μόνον αν  $M = t(M)$ .
- (3) Το  $R$ -πρότυπο πηλίκο  $M/t(M)$  είναι ελεύθερης στρέψης.

**Άσκηση 2.65.** Θεωρούμε τον  $\mathbb{R}$ -διανυσματικό χώρο

$$\mathcal{E} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' = f\}$$

Να δειχθεί ότι:

- (1) Ο  $\mathbb{R}$ -διανυσματικός χώρος  $\mathcal{E}$  είναι ένα  $\mathbb{R}[D]$ -υποπρότυπο του  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
- (2) Τα υποσύνολα

$$\mathcal{V} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f' = f\} \quad \& \quad \mathcal{W} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f' = -f\}$$

είναι  $\mathbb{R}[D]$ -υποπρότυπα του  $\mathcal{E}$

- (3) Ισχύει ότι:

$$\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$$

<sup>14</sup>Υπενθυμίζουμε ότι ένα  $R$ -πρότυπο καλείται **ημιαπλό** αν είναι ισόμορφο με το ευθύ άθροισμα απλών  $R$ -προτύπων.

**Άσκηση 2.66.** Έστω  $M$  ένα αριστερό  $R$ -πρότυπο υπεράνω του δακτυλίου  $R$ . Αν  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , είναι στοιχεία του  $M$ , τότε να δειχθεί ότι ορίζοντας<sup>15</sup>

$$f: R^n \longrightarrow M, \quad f(r_1, r_2, \dots, r_n) = r_1 m_1 + r_2 m_2 + \dots + r_n m_n$$

αποκτούμε έναν ομομορφισμό (αριστερών)  $R$ -προτύπων, και επιπλέον κάθε ομομορφισμός  $R^n \longrightarrow M$  είναι αυτής της μορφής, δηλαδή καθορίζεται μοναδικά από μια  $n$ -άδα στοιχείων του  $M$ .

Τι συμπέρασμα προκύπτει αν  $M = R^m$  (το οποίο θεωρούμε ως αριστερό  $R$ -πρότυπο);

**Άσκηση 2.67.** Θεωρούμε τα  $\mathbb{R}[t]$ -πρότυπα  $(\mathbb{R}^2, f)$  και  $(\mathbb{R}^3, g)$ , όπου:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (y, x)$$

$$g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(x, y, z) = (y, z, x)$$

Να δειχθεί ότι υπάρχει ομομορφισμός  $\mathbb{R}[t]$ -προτύπων  $h: (\mathbb{R}^2, f) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, g)$ , έτσι ώστε:

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}[t]}((\mathbb{R}^2, f), (\mathbb{R}^3, g)) = \{\lambda \cdot h \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

δηλαδή κάθε ομομορφισμός  $\mathbb{R}[t]$ -προτύπων  $\alpha: (\mathbb{R}^2, f) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, g)$  είναι της μορφής  $\alpha = \lambda \cdot h$ , για κάποιο  $\lambda \in \mathbb{R}$ , και  $(\lambda \cdot h)(x, y) = \lambda h(x, y)$ .

**Άσκηση 2.68.** Θεωρούμε το  $\mathbb{R}[D]$ -πρότυπο  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  των λείων απεικονίσεων  $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ . Να δειχθεί ότι η απεικόνιση

$$\alpha: \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \alpha(f): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha(f)(x) = f(x+1)$$

είναι ομομορφισμός  $\mathbb{R}[D]$ -προτύπων.

**Άσκηση 2.69.** Θεωρούμε το σύνολο των συναρτήσεων

$$\mathcal{A} = \{f_{a,b}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_{a,b}(t) = a \cos(t) + b \sin(t), \quad a, b \in \mathbb{R}\}$$

(1) Να δειχθεί ότι το σύνολο  $\mathcal{A}$  είναι κατά φυσικό τρόπο  $\mathbb{R}[D]$ -πρότυπο.

(2) Έστω  $I = (D^2 + 1)$  το κύριο ιδεώδες του δακτυλίου  $\mathbb{R}[D]$  το οποίο παράγεται από το στοιχείο  $D^2 + 1$ . Να δειχθεί ότι το  $\mathbb{R}[D]$ -πρότυπο  $\mathcal{A}$  είναι με φυσικό τρόπο  $\mathbb{R}[D]/I$ -πρότυπο.

**Άσκηση 2.70.** Για κάθε μιγαδικό αριθμό  $\lambda \in \mathbb{C}$  και για κάθε θετικό ακέραιο  $k$ , θεωρούμε το  $\mathbb{C}[t]$ -πρότυπο

$$B(\lambda, k) = \mathbb{C}[t]/(t - \lambda)^k$$

(1) Να δειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός  $\mathbb{C}[t]$ -προτύπων:

$$B(\lambda, 1) \cong M_{(\lambda)}$$

(2) Αν  $k \geq 2$ , να δειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός  $\mathbb{C}[t]$ -προτύπων:

$$B(\lambda, k) \cong M_{J_{\lambda, k}}$$

<sup>15</sup>Η αβελιανή ομάδα είναι αριστερό  $R$ -πρότυπο, αν ορίσουμε αριστερή δράση:

$$r \star (r_1, r_2, \dots, r_n) = (r \cdot r_1, r \cdot r_2, \dots, r \cdot r_n)$$

όπου  $J_{\lambda,k}$  είναι ο  $k \times k$  πίνακας<sup>16</sup>

$$J_{\lambda,k} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 2.71.** Με τους συμβολισμούς της παραπάνω Άσκησης 2.70, αν

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ναδειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός  $\mathbb{C}[t]$ -πρότυπων

$$M_A \cong B(2,3) \cong \mathbb{C}[t]/(t-2)^3$$

Ιδιαίτερα το  $\mathbb{C}[t]$ -πρότυπο  $M_A$  είναι κυκλικό.

**Άσκηση 2.72.** Θεωρούμε τον δακτύλιο

$$\mathbb{C}([0,1], \mathbb{R}) = \{f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f: \text{συνεχής}\}$$

Είναι ο δακτύλιος  $\mathbb{C}([0,1], \mathbb{R})$  ημιαπλός;

**Άσκηση 2.73.** (1) Είναι κάθε υποδακτύλιος ενός ημιαπλού δακτυλίου, ημιαπλός δακτύλιος;  
 (2) Είναι κάθε δακτύλιος πηλίκο ενός ημιαπλού δακτυλίου, ημιαπλός δακτύλιος;  
 (3) Μπορεί κάθε δακτύλιος να εμψυτευθεί σε έναν ημιαπλό δακτύλιο;

**Άσκηση 2.74.** Έστω  $\{F_i\}_{i \in I}$  μια οικογένεια σωμάτων, και θεωρούμε τον δακτύλιο ευθύ γινόμενο  $\prod_{i \in I} F_i$ .  
 Ναδειχθεί ότι ο δακτύλιος  $\prod_{i \in I} F_i$  είναι ημιαπλός αν και μόνον αν  $|I| < \infty$ .

**Άσκηση 2.75.** Ποιοί από τους ακόλουθους δακτύλιους είναι ημιαπλοί ( $\mathbb{K}$  είναι ένα σώμα);

$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{H}, \quad M_2(\mathbb{Q}) \times \mathbb{R}, \quad \mathbb{Z}_{p^2}, \quad \mathbb{K}[t], \quad \mathbb{K}[t]/(t^2)$$

**Άσκηση 2.76.** Θεωρούμε τον δακτύλιο  $T_n(\mathbb{K})$  των  $n \times n$  άνω τριγωνικών πινάκων υπεράνω ενός σώματος  $\mathbb{K}$ .

- (1) Ναδειχθεί ότι ο δακτύλιος  $T_n(\mathbb{K})$  δεν είναι ημιαπλός.
- (2) Ναβρεθεί ένα ιδεώδες  $I$  του  $T_n(\mathbb{K})$  έτσι ώστε ο δακτύλιος πηλίκο  $T_n(\mathbb{K})/I$  να είναι ημιαπλός.
- (3) Ναγραφεί ο δακτύλιος  $T_n(\mathbb{K})$  ως ευθύ άθροισμα  $n$  το πηλίκος αριστερών (δεξιών) ιδεωδών.

**Άσκηση 2.77.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος. Ναδειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) Το αριστερό  $R$ -πρότυπο  $R$  είναι απλό.

<sup>16</sup>Ο πίνακας  $J_{\lambda,k}$  καλείται ο  $k \times k$  στοιχειώδης πίνακας Jordan ο οποίος αντιστοιχεί στον αριθμό  $\lambda$ .



- (2) Το δεξιό  $R$ -πρότυπο  $R$  είναι απλό.  
 (3) Ο δακτύλιος  $R$  είναι δακτύλιος διαίρεσης.

**Άσκηση 2.78.** Θεωρούμε το σύνολο

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{C})$$

- (1) Ναδειχθεί ότι το υποδύνηλο  $R$  είναι υποδακτύλιος του  $M_2(\mathbb{C})$ .  
 (2) Ναδειχθεί ότι ο δακτύλιος  $R$  δεν είναι απλός.  
 (3) Ναδειχθεί ότι ο δακτύλιος  $R$  είναι ημιαπλός.

Ποιοί από τους παραπάνω ισχυρισμούς είναι αληθείς για το υποσύνολο;

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$$

**Άσκηση 2.79.** Έστω  $R$  ένας ημιαπλός δακτύλιος.

- (1) Ναδειχθεί ότι αν  $M$  είναι ένα απλό αριστερό  $R$ -πρότυπο, τότε υπάρχει ένα ελάχιστο αριστερό ιδεώδες  $I$  του  $R$  και ένας ισομορφισμός αριστερών  $R$ -πρωτύπων  $M \cong I$ .  
 (2) Έστω  $I$  και  $J$  δύο ελάχιστα αριστερά ιδεώδη του  $R$ .  
 (α) Αν  $I \cong J$  ως αριστερά  $R$ -πρότυπα, ναδειχθεί ότι υπάρχει ένα στοιχείο  $r \in R$  έτσι ώστε:  $J = Ir = \{xr \in R \mid x \in R\}$ .  
 (β) Αν  $I \not\cong J$  ως αριστερά  $R$ -πρότυπα, ναδειχθεί ότι  $I \cdot J = \{0\}$ .

**Άσκηση 2.80.** Έστω  $I$  ένα ελάχιστο αριστερό ιδεώδες του δακτυλίου  $R$ . Ναδειχθεί ότι είτε  $I^2 = \{0\}$  είτε  $I = Re$ , όπου  $e^2 = e \in R$ .

**Άσκηση 2.81.** Έστω  $I$  ένα ελάχιστο αριστερό ιδεώδες του δακτυλίου  $R$ , και  $x \in R$ . Ναδειχθεί ότι είτε  $Ix = 0$  είτε  $Ax \cong A$  ως αριστερά  $R$ -πρότυπα.

**Άσκηση 2.82.** Έστω  $R$  ένας (αριστερά ή δεξιά) ημιαπλός δακτύλιος.

- (1) Ναδειχθεί ότι ο  $R$  περιέχει πεπερασμένο πλήθος μέγιστων αριστερών ή δεξιών ιδεωδών.  
 (2) Ναδειχθεί ότι η τομή όλων των μέγιστων (αριστερών ή δεξιών) ιδεωδών του  $R$  είναι το μηδενικό ιδεώδες.  
 (3) Ναδειχθεί ότι ο δακτύλιος  $R$  είναι (αριστερός και δεξιός) δακτύλιος του Artin και (αριστερός και δεξιός) δακτύλιος της Noether.

**Άσκηση 2.83.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος με μονάδα και  $I$  ένα ιδεώδες τω  $R$ . Θεωρούμε<sup>17</sup> τον δακτύλιο πηλίκο  $R/I$  ως  $R$ -πρότυπο, μέσω του επιμορφισμού δακτυλίων  $\pi: R \rightarrow R/I$ . Υποθέτουμε ότι το αριστερό  $R$ -πρότυπο  $R/I$  είναι ημιαπλό. Ναδειχθεί ότι το αριστερό  $R/I$ -πρότυπο  $R/I$  είναι ημιαπλό και επομένως ο δακτύλιος  $R/I$  είναι ημιαπλός.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα στοιχείο  $x$  σε έναν δακτύλιο  $R$  καλείται *μηδενοδύναμο*, αν  $x^n = 0$ , για κάποιο  $n \in \mathbb{N}$ . Ένα (αριστερό ή δεξιό) ιδεώδες  $I$  του  $R$  καλείται *αμελητέο* αν κάθε στοιχείο του  $I$  είναι μηδενοδύναμο. Ένα (αριστερό ή δεξιό) ιδεώδες  $I$  του  $R$  καλείται *μηδενοδύναμο*, αν  $I^n = \{0\}$ , για κάποιο  $n \in \mathbb{N}$ . Προφανώς κάθε μηδενοδύναμο (αριστερό ή δεξιό) ιδεώδες  $I$  είναι αμελητέο αλλά το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει.

<sup>17</sup> Δηλαδή η αριστερή δράση του  $R$  επί της αβελιανής ομάδας  $R/I$  δίνεται ως  $r \cdot (x+I) = \pi(r) \cdot (x+I) = (r+I) \cdot (x+I) = rx+I$ .

**Άσκηση 2.84.** Έστω  $R$  ένας ημιαπλός δακτύλιος.

- (1) Ναδειχθεί ότι ο  $R$  είναι (δεξιός και αριστερός) δακτύλιος του Artin και της Noether.
- (2) Ναδειχθεί ότι ο  $R$  δεν περιέχει μη-μηδενικά μηδενοδύναμα ιδεώδη.
- (3) Ναδειχθεί ότι ο  $R$  δεν περιέχει μη-μηδενικά αμελητέα ιδεώδη.

**Άσκηση 2.85.** Έστω  $D$  ένας δακτύλιος διαίρεσης, και  $n \geq 1$ .

- (α) Ναδειχθεί ότι ο δακτύλιος  $M_n(D)$  είναι απλός.
- (β) Ναβρεθεί το κέντρο του δακτυλίου  $M_n(D)$ .
- (γ) Ναβρεθεί ένα ελάχιστο αριστερό ιδεώδες του  $M_n(D)$ .
- (δ) Ναδειχθεί ότι τα ελάχιστα αριστερά ιδεώδη του  $M_n(D)$  είναι ανά δύο ισόμορφα.
- (ε) Ναδειχθεί ότι ο δακτύλιος  $M_n(D)$  είναι δακτύλιος του Artin και της Noether.
- (ζ) Ναδειχθεί ότι ο δακτύλιος  $M_n(D)$  είναι ημιαπλός.

**Άσκηση 2.86.** Ναδοθεί παράδειγμα απλού δακτυλίου ο οποίος δεν είναι ημιαπλός.

**Άσκηση 2.87.** (1) Ναεξετασθεί αν ο δακτύλιος  $\mathbb{Z}_n$  είναι ημιαπλός.

- (2) Έστω  $\mathbb{K}$  ένα σώμα, και  $I$  ένα ιδεώδες του δακτυλίου πολυωνύμων  $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ . Ναεξετασθεί αν ο δακτύλιος πηλίκο  $\mathbb{K}[\mathbf{x}]/I$  είναι ημιαπλός.

**Άσκηση 2.88.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος του Boole, δηλαδή ο  $R$  έχει μονάδα και ισχύει ότι:  $x^2 = x, \forall x \in R$ .

1. Ναδειχθεί ότι ο  $R$  είναι μεταθετικός, η χαρακτηριστική του είναι 2, και η αβελιανή ομάδα  $(R, +)$  μπορεί να θεωρηθεί ως διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος  $\mathbb{Z}_2$ .
2. Ναδειχθεί ότι ο δακτύλιος  $R$  είναι ημιαπλός αν και μόνον αν το σύνολο  $R$  είναι πεπερασμένο.
3. Ναδειχθεί ότι ο δακτύλιος  $R$  είναι ημιαπλός αν και μόνον αν ο  $R$  είναι δακτύλιος του Artin.

**Άσκηση 2.89.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος με μονάδα.

1. Αν ο  $R$  δεν έχει διαιρέτες του μηδενός, ναδειχθεί ότι ο  $R$  είναι αριστερός (ή δεξιός) δακτύλιος του Artin, αν και μόνον αν ο  $R$  είναι δακτύλιος διαίρεσης.
2. Ναδειχθεί ότι αν ο δακτύλιος  $R$  είναι αριστερός δακτύλιος του Artin και  $I$  είναι ένα ιδεώδες του  $R$ , τότε ο δακτύλιος πηλίκο  $R/I$  είναι αριστερός δακτύλιος του Artin.
3. Αν ο  $R$  είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος του Artin, τότε ναδειχθεί ότι κάθε πρώτο ιδεώδες του  $R$  είναι μέγιστο.

Αν ο δακτύλιος  $R$  είναι δακτύλιος της Noether, είναι κάθε πρώτο ιδεώδες του  $R$  μέγιστο;

Έστω  $R$  ένας δακτύλιος και  $M$  ένα αριστερό  $R$ -πρότυπο. Υπενθυμίζουμε ότι ένα υποσύνολο  $X \subseteq M$  καλείται **σύνολο γεννητόρων** του  $M$  αν  $\langle X \rangle = M$ , δηλαδή το υποπρότυπο του  $X$  το οποίο παράγεται από το  $X$  συμπίπτει με το  $M$ . Το υποσύνολο  $X$  καλείται  **$R$ -γραμμικά ανεξάρτητο**, αν,  $\forall r_i \in R, \forall x_i \in X, i = 1, 2, \dots, n$ :

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \dots + r_nx_n = 0 \implies r_1 = \dots = r_n = 0$$

Το υποσύνολο  $X$  καλείται **βάση** του αριστερού  $R$ -προτύπου  $M$  αν το  $X$  είναι ένα  $R$ -γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο γεννητόρων του  $M$ . Το  $R$ -αριστερό  $R$ -πρότυπο  $M$  καλείται **ελεύθερο**, αν έχει μια βάση. Συμβατικά θεωρούμε το μηδενικό  $R$ -πρότυπο ως ελεύθερο με βάση το κενό σύνολο.

**Άσκηση 2.90.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος και  $M$  ένα αριστερό  $R$ -πρότυπο. Ναδειχθεί ότι το  $M$  είναι ελεύθερο αν και μόνον αν το  $M$  είναι ισόμορφο με το ευθύ άθροισμα  $\bigoplus_{i \in I} R_i$  της οικογένειας  $\{R_i\}_{i \in I}$  αριστερών  $R$ -πρότυπων  $R_i$ , όπου  $R_i = R, \forall i \in I$ , και όπου  $I$  είναι (κατάλληλο) σύνολο δεικτών.

**Άσκηση 2.91.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος. Ναδειχθεί ότι αν ο δακτύλιος  $R$  είναι δακτύλιος διαίρεσης, τότε κάθε μη-μηδενικό (αριστερό ή δεξιό)  $R$ -πρότυπο έχει μια βάση.  
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το Λήμμα του Zorn).

**Άσκηση 2.92.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος. Ναδειχθεί ότι αν κάθε αριστερό  $R$ -πρότυπο είναι ελεύθερο, τότε ο δακτύλιος  $R$  είναι δακτύλιος διαίρεσης.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα αριστερό  $R$ -πρότυπο  $M$  καλείται **μη-αναλύσιμο** αν

$$M = M_1 \oplus M_2 \implies M_1 = \{0\} \text{ ή } M_2 = \{0\}$$

Προφανώς κάθε απλό  $R$ -πρότυπο είναι μη-αναλύσιμο.

**Άσκηση 2.93.** Έστω ότι  $R$  είναι ένας ημιαπλός δακτύλιος. Ναδειχθεί ότι ένα (αριστερό ή δεξιό)  $R$ -πρότυπο  $M$  είναι μη-αναλύσιμο αν και μόνον αν το  $M$  είναι απλό.

**Άσκηση 2.94.** Έστω  $\mathbb{K}$  ένα σώμα και  $n \in \mathbb{N}$ . Αν  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , ναδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός δακτυλίων

$$\varphi: \mathbb{K}[t] \longrightarrow M_n(\mathbb{K}), \quad \text{έτσι ώστε } \varphi(t) = A$$

Θέτουμε  $\mathbb{K}[A] = \text{Im}(\varphi)$ .

(1) Ναδειχθεί ότι

$$\mathbb{K}[A] = \{k_0 I_n + k_1 A + k_2 A^2 + \dots + k_n A^m \in M_n(\mathbb{K}) \mid m \geq 0, k_i \in \mathbb{K}, 0 \leq i \leq m\}$$

(2) Να προσδιοριστεί το ιδεώδες  $\text{Ker}(\varphi)$ , έτσι ώστε:

$$\mathbb{K}[t] / \text{Ker}(\varphi) \cong \mathbb{K}[A]$$

(3) Αν  $P$  είναι ένας αντιστρέψιμος  $n \times n$  πίνακας, ναδειχθεί ότι η απεικόνιση

$$f: \mathbb{K}[A] \longrightarrow \mathbb{K}[PAP^{-1}], \quad f(X) = PXP^{-1}$$

είναι ένας ισομορφισμός δακτυλίων.

**Άσκηση 2.95.** Έστω  $\mathbb{K}$  ένα σώμα και  $A \in M_n(\mathbb{K})$ .

(1) Αν ο πίνακας  $A$  είναι διαγωνοποιήσιμος, ναδειχθεί ότι ο δακτύλιος, βλέπε την Άσκηση 2.94,  $\mathbb{K}[A]$  είναι ημιαπλός.

(2) Αν το σώμα  $\mathbb{K}$  είναι αλγεβρικά κλειστό και ο δακτύλιος  $\mathbb{K}[A]$  είναι ημιαπλός, ναδειχθεί ότι ο πίνακας  $A$  είναι διαγωνοποιήσιμος.

(3) Για τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

ναδειχθεί ότι ο δακτύλιος  $\mathbb{R}[A]$  είναι ημιαπλός αλλά ο πίνακας  $A$  δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

**Άσκηση 2.96.** (1) Να εξετασθεί αν υποδακτύλιοι ημιαπλών δακτυλίων είναι ημιαπλοί δακτύλιοι.

(2) Να εξετασθεί αν δακτύλιοι πηλικά ημιαπλών δακτυλίων είναι ημιαπλοί δακτύλιοι.

**Άσκηση 2.97.** Έστω  $R$  ένας ημιαπλός δακτύλιος.

- (1) Αν ο δακτύλιος  $R$  είναι συνεκτικός, ναδειχθεί ότι ο  $R$  είναι δακτύλιος διαίρεσης.
- (2) Αν ο δακτύλιος  $R$  δεν έχει διαίρετες του μηδενός, ναδειχθεί ότι ο  $R$  είναι δακτύλιος διαίρεσης.

**Άσκηση 2.98.** Έστω  $R$  ένας ημιαπλός δακτύλιος και  $I$  ένα αριστερό ή δεξιό ιδεώδες του  $R$ . Αν  $xy = 0$ , για κάθε  $x, y \in I$ , ναδειχθεί ότι  $I = \{0\}$ .

**Άσκηση 2.99.** Έστω  $R$  ένας μεταθετικός ημιαπλός δακτύλιος. Ναδειχθεί ότι το πλήθος των ταυτοδύναμων στοιχείων του καθώς και το πλήθος των ιδεωδών του  $R$  είναι πεπερασμένο.

Ισχύει το συμπέρασμα αν ο δακτύλιος δεν είναι απαραίτητα μεταθετικός;

**Άσκηση 2.100.** Ναδειχθεί ότι η τομή όλων των (αριστερών ή δεξιών) μέγιστων ιδεωδών ενός ημιαπλού δακτύλιου  $R$  είναι το μηδενικό ιδεώδες του  $R$ .

Ένα αριστερό (δεξιό) ιδεώδες  $I$  ενός δακτυλίου  $R$  καλείται *μη-αναλύσιμο*, αν το  $I$  ως αριστερό (δεξιό)  $R$ -πρότυπο είναι μη-αναλύσιμο, βλέπε τέλος σελίδας 35.

**Άσκηση 2.101.** Έστω ότι

$$R = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n = J_1 \oplus J_2 \oplus \cdots \oplus J_m$$

όπου τα  $I_k$ ,  $1 \leq k \leq n$  και τα  $J_l$ ,  $1 \leq l \leq m$ , είναι μη-αναλύσιμα αριστερά (ή δεξιά) ιδεώδη του  $R$ . Ναδειχθεί ότι  $n = m$  και μετά από ενδεχόμενη αναδιάταξη των αριστερών ιδεωδών, έχουμε  $I_k \cong J_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

Υπενθυμίζουμε ότι ένα σώμα  $\mathbb{K}$  καλείται *αλγεβρικά κλειστό*, αν κάθε μη-σταθερό πολυώνυμο υπεράνω του  $\mathbb{K}$  έχει μια ρίζα στο  $\mathbb{K}$ .

Υπενθυμίζουμε επίσης ότι ένας δακτύλιος  $R = (R, +, \cdot)$  καλείται  $\mathbb{K}$ -*άλγεβρα*, όπου  $\mathbb{K}$  είναι ένα σώμα, αν υπάρχει απεικόνιση

$$\star: \mathbb{K} \times R \longrightarrow R, \quad (k, r) \longmapsto k \star r$$

έτσι ώστε η τριάδα  $(R, +, \star)$  είναι  $\mathbb{K}$ -διανυσματικός χώρος και επιπλέον:

$$\forall k \in \mathbb{K}, \forall r, s \in R: \quad k \star (r \cdot s) = (k \star r) \cdot s = r \cdot (k \star s)$$

Για μια  $\mathbb{K}$ -άλγεβρα  $R$ , κάθε αριστερό  $R$ -πρότυπο  $M$ , με αριστερή δράση του  $R$  στο  $M$   $(r, m) \longmapsto r \cdot m$ , είναι με φυσικό τρόπο  $\mathbb{K}$ -διανυσματικός χώρος, ορίζοντας  $k \star m = (k \star 1_R) \cdot m$ .

**Άσκηση 2.102.** Έστω  $\mathbb{K}$  ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα και  $R$  μια  $\mathbb{K}$ -άλγεβρα η οποία ως  $\mathbb{K}$ -διανυσματικός χώρος έχει πεπερασμένη διάσταση.

- (1) Αν ο δακτύλιος  $R$  είναι δακτύλιος διαίρεσης, ναδειχθεί ότι  $R = \mathbb{K}$ .
- (2) Ναδειχθεί ότι αν ο δακτύλιος  $R$  είναι ημιαπλός, τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός δακτυλίων

$$R \cong M_{n_1}(\mathbb{K}) \times M_{n_2}(\mathbb{K}) \times \cdots \times M_{n_k}(\mathbb{K})$$

$$\text{και ιδιαίτερα: } \dim_{\mathbb{K}} R = n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_k^2.$$

**Άσκηση 2.103.** Ναδειχθεί ότι αν  $R$  είναι ένας ημιαπλός δακτύλιος, τότε ο δακτύλιος πινάκων  $M_n(R)$  είναι ημιαπλός,  $\forall n \geq 1$ .

**Άσκηση 2.104.** Ναδειχθεί ότι αν  $R$  είναι ένας δακτύλιος χωρίς διαίρετες του μηδενός. Αν ο δακτύλιος πινάκων  $M_n(R)$  είναι ημιαπλός, για κάποιο  $n \geq 1$ , ναδειχθεί ότι ο  $R$  είναι δακτύλιος διαίρεσης.

**Άσκηση 2.105.** Ποιά η δομή ενός μεταθετικού ημιαπλού δακτυλίου  $R$ ; (περιγραφή δακτυλίου με τον οποίο είναι ισόμορφος ο  $R$ , περιγραφή αριστερών ή δεξιών ιδεωδών του  $R$ , περιγραφή ταυτοδύναμων στοιχείων και διααιρετών του μηδενός, κλπ).

**Άσκηση 2.106.** Ναδειχθεί ότι κάθε ημιαπλός δακτύλιος είναι πεπερασμένος με την έννοια του Dedekind, δηλαδή:

$$\forall x, y \in R: \quad xy = 1 \implies yx = 1$$

**Άσκηση 2.107.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος και  $M$  ένα πεπερασμένο παραγόμενο δεξιό  $R$ -πρότυπο με σύνολο γεννητόρων  $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Θεωρούμε τον δακτύλιο ενδομορφισμών  $\text{End}_R(M)$  και θέτουμε:

$$S := \left\{ A = (a_{ij}) \in M_n(R) \mid \exists f = f_A \in \text{End}_R(M) : f_A(x_j) = \sum_{i=1}^n x_i a_{ij}, \forall j = 1, 2, \dots, n \right\}$$

- (1) Ναδειχθεί ότι το σύνολο  $S$  είναι ένας δακτύλιος με μονάδα, ο οποίος είναι υποδακτύλιος του  $M_n(R)$ .
- (2) Ναδειχθεί ότι η απεικόνιση

$$\Phi: S \longrightarrow \text{End}_R(M), \quad \Phi(A) = f_A$$

είναι ένας επιμορφισμός δακτυλίων.

- (3) Αν το σύνολο γεννητόρων  $\mathcal{B}$  είναι ελεύθερο, δηλαδή ισχύει ότι

$$\forall r_1, r_2, \dots, r_n \in R: \quad x_1 r_1 + x_2 r_2 + \dots + x_n r_n = 0 \implies r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0$$

ναδειχθεί ότι  $S = M_n(R)$  και η απεικόνιση  $\Phi$  είναι ένας ισομορφισμός δακτυλίων

$$M_n(R) \xrightarrow{\cong} \text{End}_R(M)$$

Η επόμενη Άσκηση δείχνει ότι κάθε άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος  $k$  είναι υποδακτύλιος<sup>18</sup> του (ημι-)απλού δακτυλίου πινάκων  $M_n(k)$ .

**Άσκηση 2.108.** Έστω  $S$  ένας υποδακτύλιος ενός δακτυλίου  $R$ .

- (1) Ναδειχθεί ότι, θεωρώντας τον δακτύλιο  $R$  ως δεξιό  $S$ -πρότυπο, ο δακτύλιος  $R$  είναι ισόμορφος με έναν υποδακτύλιο του δακτυλίου ενδομορφισμών  $\text{End}_S(R)$ .
- (2) Αν το δεξιό  $S$ -πρότυπο  $R$  είναι πεπερασμένο παραγόμενο και έχει ένα ελεύθερο σύνολο γεννητόρων με την έννοια της παραπάνω Άσκησης, ναδειχθεί ότι ο δακτύλιος  $R$  είναι ισόμορφος με έναν υποδακτύλιο του δακτυλίου πινάκων  $M_n(S)$  για κάποιο  $n \geq 1$ .
- (3) Να συμπεράνετε<sup>19</sup> ότι μια άλγεβρα  $R$  πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος  $k$ , είναι ισόμορφη με μια υποάλγεβρα της (ημι-)απλής άλγεβρας πινάκων  $M_n(k)$ .

<sup>18</sup>Ακριβέστερα είναι υποάλγεβρα, δηλαδή είναι ταυτόχρονα υπόχωρος και υποδακτύλιος.

<sup>19</sup>Υπόδειξη: Αν  $R$  είναι μια άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος  $k$ , τότε, θεωρώντας το  $k$  ως υποδακτύλιο του  $R$  μέσω του μονομορφισμού δακτυλίων  $k \longrightarrow R, a \longmapsto a \cdot 1$ , προκύπτει ότι η άλγεβρα  $R$  είναι πεπερασμένο παραγόμενο  $k$ -πρότυπο με ελεύθερο σύνολο γεννητόρων μια βάση του  $k$ -διανυσματικού χώρου  $R$ .

Μια άλγεβρα  $R$  πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος  $\mathbb{K}$  καλείται *ημιαπλή άλγεβρα*, αν ο δακτύλιος  $R$  δεν περιέχει μη-μηδενικά μηδενοδύναμα ιδεώδη.

**Άσκηση 2.109.** Ναδειχθεί ότι μια άλγεβρα  $R$  πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος  $\mathbb{K}$  είναι ημιαπλή άλγεβρα αν και μόνον αν ο δακτύλιος  $R$  είναι ημιαπλός (δηλαδή το αριστερό  $R$ -πρότυπο  $R$  είναι ευθύ άθροισμα ελάχιστων αριστερών ιδεωδών ή ισοδύναμα το δεξιό  $R$ -πρότυπο  $R$  είναι ευθύ άθροισμα ελάχιστων δεξιών ιδεωδών).

**Άσκηση 2.110.** Έστω  $P(t)$  ένα πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές. Ναδειχθεί ότι η άλγεβρα  $\mathbb{C}[t]/(P(t))$  είναι ημιαπλή αν και μόνον αν το πολυώνυμο  $P(t)$  δεν έχει πολλαπλές ρίζες.

**Άσκηση 2.111.** Ναδειχθεί ότι μια μεταθετική άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος είναι ισόμορφη με ένα ευθύ γινόμενο σωμάτων.

**Άσκηση 2.112.** Έστω  $R$  μια ημιαπλή άλγεβρα  $R$  πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος. Αν όλα τα ταυτοδύναμα στοιχεία του  $R$  είναι κεντρικά, ναδειχθεί ότι η άλγεβρα  $R$  είναι ισόμορφη με το ευθύ γινόμενο δακτυλίων διαίρεσης.