Νίκος Μαρμαρίδης

Σημειώσεις στη

Θεωρία Δακτυλίων

Ιωάννινα 2014

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Αρχικές Έννοιες Δακτυλίων

Οι ακόλουθοι ορισμοί και οι συνέπειές τους θεωρούνται γνωστοί· παρατίθενται εδώ μόνο για λόγους πληρότητος. Ο αναγνώστης μπορεί να προστρέξει στα [*] και [*] για περισσότερες λεπτομέρειες.

1.1 Δακτύλιοι

Ορισμός 1.1.1. *Ένας δακτύλιος* $(R, +, \cdot)$ *αποτελείται από ένα μη κενό σύνολο* R *εφοδιασμένο με δύο πράξεις, την πρόσθεση*

$$+ : R \times R \to R, (a, b) \mapsto a + b$$

και τον πολλαπλασιασμό

$$\cdot : R \times R \to R, (a, b) \mapsto a \cdot b,$$

έτσι ώστε

(α′) *το ζεύγος* $(R, +)$ *να είναι μια αβελιανή (μεταθετική) ομάδα, όπου το ουδέτερο στοιχείο παριστάνεται με* 0_R *ή απλώς* 0 *και ονομάζεται το μηδενικό στοιχείο ή το μηδέν τού* R,

(β′) *το ζεύγος* $(R, \cdot)$ *να είναι ένα μονοειδές*[1], *όπου το ουδέτερο στοιχείο παριστάνεται με* 1_R *ή απλώς* 1 *και ονομάζεται το μοναδιαίο στοιχείο ή η μονάδα τού* R.

(γ′) *Η πράξη «·» επιμερίζει την πράξη «+», δηλαδή* $\forall a, b, c, d \in R$ *ισχύει:*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$
$$(b + c) \cdot d = b \cdot d + c \cdot d.$$

[1] δηλαδή ένα σύνολο κλειστό ως προς τη δοθείσα πράξη και το οποίο διαθέτει ως προς την πράξη αυτή ένα ουδέτερο στοιχείο

Ορισμός 1.1.2. *Ένας δακτύλιος* $(R, +, \cdot)$ *ονομάζεται μεταθετικός, εάν* $\forall a, b \in R$ *ισχύει:* $a \cdot b = b \cdot a$.

Παρατήρηση 1.1.3. *Η έννοια «δακτύλιος» αποτελεί γενίκευση τού συνόλου των ακέραιων αριθμών* $\mathbb{Z}$ *και των γνωστών πράξεων τής πρόσθεσης και τού πολλαπλασιασμού ακεραίων. Γι' αυτό και οι πράξεις «+» και «·» που ορίζονται επί ενός δακτυλίου* R *ονομάζονται αντιστοίχως «πρόσθεση» και «πολλαπλασιασμός».*

Συνήθως, δηλώνουμε ένα δακτύλιο μόνο με κάποιο σύμβολο R *αντί τής τριάδος* $(R, +, \cdot)$· *οφείλουμε όμως να αναφέρουμε πάντοτε ποιες είναι οι πράξεις «+» και «·», όταν αυτό δεν προκύπτει από τα συμφραζόμενα.*
Από τα αξιώματα που ορίζουν την έννοια τού δακτυλίου έπονται τα ακόλουθα:

(α′) *Τα* 0 *και* 1 *οποιουδήποτε δακτυλίου προσδιορίζονται μονοσήμαντα.*

(β′) *Η προσεταιρεστικότητα τής πρόσθεσης, δηλαδή ότι* $\forall a, b, c \in R : (a + b) + c = a + (b + c)$, *επεκτείνεται και σε αθροίσματα που έχουν περισσότερους από τρεις προσθετέους, επί παραδείγματι* $(a+b)+(c+d) = (a+(b+c+d))$ *και γι' αυτό κατά την πρόσθεση των στοιχείων ενός δακτυλίου δεν είναι απαραίτητη η ένθεση παρενθέσεων, οι οποίες προσδιορίζουν τη σειρά με την οποία εκτελούνται οι πράξεις.*

(γ′) *Τα ίδια ισχύουν και στην περίπτωση τής πράξης τού πολλαπλασιασμού.*

(δ′) *Το αντίθετο (ως προς την πρόσθεση) οποιουδήποτε στοιχείου* $a \in R$ *είναι μοναδικό και συμβολίζεται με* $-a$.

(ε′) *Εάν υπάρχει το αντίστροφο (ως προς τον πολλαπλασιασμό) ενός στοιχείου* $a \in R$, *τότε αυτό είναι μοναδικό και συμβολίζετα με* a^{-1}.

(στ′) *Η επιμεριστική ιδιότητα τού πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση επεκτείνεται και σε περισσότερους των δύο προσθετέους, επί παραδείγματι:*

$$a \cdot (b_1 + b_2 + \cdots b_n) = a \cdot b_1 + a \cdot b_2 + \cdots + a \cdot b_n.$$

Στο παρόν κείμενο η παράθεση δύο η περισσότερων στοιχείων ενός δακτυλίου, δηλώνει πάντοτε τον πολλαπλασιασμό, επί παραδείγματι, αν τα $a, b, c \in R$, *τότε το γινόμενο* $a \cdot b \cdot c$ *συμβολίζεται ως* abc.
Για κάθε $a, b \in R$, *συμβολίζουμε με* $a - b$ *το άθροισμα* $a + (-b)$.

Ορισμός 1.1.4. *Ένα μη κενό υποσύνολο* S *ενός δακτυλίου* R *ονομάζεται υποδακτύλιος τού* R, *εάν το* S *είναι*

(α′) *μια υποομάδα τού* R *ως προς την πράξη τής πρόσθεσης,*

(β′) *είναι κλειστό ως προς την πράξη τού πολλαπλασιασμού τού* R *και*

(γ′) *η μονάδα τού* R, *δηλαδή το* 1_R *ανήκει στο* S.

Ένας υποδακτύλιος P ενός δακτυλίου R λέγεται *γνήσιος* εάν $P \subsetneq R$.

Ασκηση 1. *Έστω* R *ένας δακτύλιος και* $\mathcal{Z}$ *το σύνολο* $\{z1_R \mid z \in \mathbb{Z}\}$. *Να δειχθεί ότι το* $\mathcal{Z}$ *αποτελεί έναν υποδακτύλιο τού* R.

Οι ακόλουθες απλές ιδιότητες είναι συνέπειες των αξιωμάτων που ορίζουν τους δακτυλίους και η απόδειξή τους προτείνεται ως άσκηση:

Ασκηση 2. *(α')* $\forall a \in R, a0 = 0 = 0a$.

(β') $\forall a, b \in R, (-a)b = a(-b) = -(ab)$.

(γ') $\forall a, b \in R, (-a)(-b) = ab$.

(δ') $\forall a, b, c, d \in R, a(b-c) = ab - ac, (b-c)d = bd - cd$.

Ορισμός 1.1.5. *Ένα στοιχείο* $a \neq 0$ *ενός δακτυλίου* R *καλείται αριστερός διαιρέτης τού μηδενός (αντιστοίχως δεξιός διαιρέτης τού μηδενός), εάν υπάρχει ένα στοιχείο* $b \neq 0$ *τού* R *με* $ab = 0$ *(αντιστοίχως* $ba = 0$*). Ένα στοιχείο* $a \neq 0$ *ενός δακτυλίου* R *ονομάζεται διαιρέτης τού μηδενός, εάν είναι είτε αριστερός είτε δεξιός διαιρέτης τού μηδενός.*

Ορισμός 1.1.6. *Ένας μεταθετικός δακτύλιος* R *με* $1_R \neq 0_R$ *καλείται ακέραια περιοχή, εάν δεν διαθέτει διαιρέτες τού μηδενός.*

Με άλλα λόγια, ένας μεταθετικός δακτύλιος R με $1_R \neq 0_R$ καλείται *ακέραια περιοχή*, εάν από $ab = 0$, $a, b \in R$ προκύπτει είτε $a = 0$ είτε $b = 0$.

Ορισμός 1.1.7. *(α') Ένα στοιχείο* a *ενός δακτυλίου* R *καλείται αριστερός διαιρέτης τής μονάδος (αντιστοίχως δεξιός διαιρέτης τής μονάδος), εάν υπάρχει ένα στοιχείο* b *τού* R *με* $ab = 1$ *(αντιστοίχως* $ba = 1$*).*

(β') Ένα στοιχείο a *ενός δακτυλίου* R *καλείται αντιστρέψιμο, εάν είναι συγχρόνως αριστερός και δεξιός διαιρέτης τής μονάδος.*

Το σύνολο των αντιστρέψιμων στοιχείων ενός δακτυλίου R θα το συμβολίζουμε με $U(R)$.

Παρατήρηση 1.1.8. *Εάν* $a \in R$ *είναι ένα αντιστρέψιμο στοιχείο και* $b, b' \in R$ *είναι δύο στοιχεία με* $ab = b'a = 1$, *τότε* $b' = b'(ab) = (b'a)b = b$. *Επομένως, εάν για κάποιο* $c \in R$ *έχουμε* $ac = 1$, *τότε* $ca = 1$ *και γι' αυτό* $c = b$. *Με άλλα λόγια, εάν το* a *είναι αντιστρέψιμο, τότε υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο* $b \in R$ *με* $ab = 1 = ba$. *Το μοναδικό αυτό στοιχείο ονομάζεται το αντίστροφο τού* a *και παριστάνεται με* a^{-1}.

Ασκηση 3. *Να δειχθεί με τη βοήθεια τής ανωτέρω παρατήρησης ότι το σύνολο* $U(R)$ *των αντιστρέψιμων στοιχείων ενός δακτυλίου* R *αποτελεί μια ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό τού δακτυλίου* R.

Ασκηση 4. *(α') Να δειχθεί ότι ένας αριστερός διαιρέτης τού μηδενός (αντιστοίχως τής μονάδος) δεν είναι ποτέ δεξιός διαιρέτης τής μονάδος (αντιστοίχως τού μηδενός).*

(β') Να δειχθεί ότι ένας δεξιός διαιρέτης τού μηδενός (αντιστοίχως τής μονάδος) δεν είναι ποτέ αριστερός διαιρέτης τής μονάδος (αντιστοίχως τού μηδενός).

Ορισμός 1.1.9. *Ένας μεταθετικός δακτύλιος* R *καλείται σώμα, εάν το σύνολο* $R^* = R \setminus \{0_R\}$ *συμπίπτει με την ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων του* $U(R)$.

Δηλαδή, εάν κάθε στοιχείο $a \neq 0$ τού R είναι αντιστρέψιμο.

Ασκηση 5. *(α′) Να δειχθεί ότι κάθε ακέραια περιοχή με πεπερασμένο το πλήθος στοιχεία είναι σώμα.*

(β′) Να δειχθεί ότι κάθε σώμα είναι ακέραια περιοχή.

Ορισμός 1.1.10. *Έστω* R *ένας δακτύλιος. Το σύνολο*

$$C(R) = \{a \in R \mid ar = ra, \forall r \in R\}$$

καλείται το κέντρο τού R.

Προφανώς, εάν ο R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος, τότε το $C(R) = R$.

Ασκηση 6. *Να δειχθεί ότι το κέντρο* $C(R)$ *ενός δακτυλίου* R *αποτελεί πάντοτε έναν υποδακτύλιο τού* R.

1.2 Ομομορφισμοί Δακτυλίων

Ορισμός 1.2.1. *Έστω ότι* $(R, +, \cdot)$ *και* $(S, +', \cdot')$ *είναι δύο δακτύλιοι. Μια απεικόνιση* $\varphi : R \to S$ *ονομάζεται ομομορφισμός δακτυλίων εάν:*

(α′) $\forall a, b \in R : \varphi(a + b) = \varphi(a) +' \varphi(b)$.

(β′) $\forall a, b \in R : \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot' \varphi(b)$.

(γ′) $\varphi(1_R) = 1_S$.

Ένας ομομορφισμός δακτυλίων $\varphi : R \to S$ ονομάζεται *μονομορφισμός*, εάν είναι μια ενριπτική[2] απεικόνιση. Ο ομομορφισμός φ ονομάζεται *επιμορφισμός*, εάν είναι μια επιρριπτική[3] απεικόνιση. Τέλος, ο ομομορφισμός φ ονομάζεται *ισομορφισμός* δακτυλίων, εάν είναι μια αμφιρριπτική απεικόνιση, δηλαδή εάν είναι ταυτοχρόνως ενριπτική και επιρριπτική.

Οι ακόλουθες απλές ιδιότητες αποτελούν συνέπειες των αξιωμάτων που ορίζουν τους ομομορφισμούς δακτυλίων και η απόδειξή τους προτείνεται ως άσκηση:

Ασκηση 7. *Έστω ότι η απεικόνιση* $\varphi : R \to S$ *είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων. Να δειχθεί ότι*

(α′) $\varphi(0_R) = 0_S$.

(β′) $\forall a \in R, \varphi(-a) = -\varphi(a)$.

[2]ονομάζουμε ενριπτικές τις «ένα προς ένα» απεικονίσεις

[3]ονομάζουμε επιρριπτικές τις «επί» απεικονίσεις

(γ') $\forall a, b \in R, \varphi(a - b) = \varphi(a) - \varphi(b)$.

(δ') *Εάν κάποιο* $a \in R$ *διαθέτει αντίστροφο στοιχείο* a^{-1}, *τότε* $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.

Ασκηση 8. *Έστω ότι οι απεικονίσεις* $\varphi : R \longrightarrow S$ *και* $\tau : S \longrightarrow T$ *είναι ομομορφισμοί δακτυλίων. Να δειχθεί ότι η σύνθεσή τους* $\tau \circ \varphi : R \longrightarrow T$ *είναι επίσης ομομορφισμός δακτυλίων.*

Ασκηση 9. *(α') Εάν ο* $\varphi : R \longrightarrow S$ *είναι ισομορφισμός δακτυλίων, τότε και η αντίστροφη απεικόνιση* $\varphi^{-1} : S \longrightarrow R$ *είναι επίσης ισομορφισμός δακτυλίων.*

(β') Εάν οι $\varphi : R \longrightarrow S$ *και* $\tau : S \longrightarrow T$ *είναι ισομορφισμοί δακτυλίων, τότε και η σύνθεση* $\tau \circ \varphi$ *είναι επίσης ισομορφισμός δακτυλίων.*

Εάν $\varphi : R \longrightarrow S$ είναι ένας ισομορφισμός δακτυλίων, τότε ο δακτύλιος R λέγεται *ισόμορφος* με τον δακτύλιο S. Σύμφωνα με την Άσκηση 9(i), όταν ο R είναι ισόμορφος με τον S, τότε και ο S είναι ισόμορφος με τον R· γι' αυτό ονομάζουμε τους R και S *ισόμορφους* δακτυλίους και γράφουμε $R \cong S$.

Από τον Ορισμό 1.2.1 και την Άσκηση 7 έπεται ότι κάθε ομομορφισμός δακτυλίων $\varphi : R \longrightarrow S$ «διατηρεί» τις πράξεις των δακτυλίων καθώς και τα αντίθετα ή τα αντίστροφα των στοιχείων τους (αν τα τελευταία υπάρχουν).

Η επόμενη άσκηση δείχνει ότι οι ομομορφισμοί «διατηρούν» και τους υποδακτυλίους.

Ασκηση 10. *Έστω* $\varphi : R \longrightarrow S$ *ένας ομομορφισμός δακτυλίων. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:*

(α') Εάν $T \subseteq R$ *είναι ένας υποδακτύλιος τού* R, *τότε η εικόνα του* $\varphi(T)$ *είναι ένας υποδακτύλιος τού* S.

(β') Εάν $Q \subseteq S$ *είναι ένας υποδακτύλιος τού* S, *τότε η προεικόνα του* $\varphi^{-1}(Q) = \{r \in R \mid \varphi(r) \in Q\}$ *είναι ένας υποδακτύλιος τού* S.

Ασκηση 11. *Έστω* $\varphi : R \longrightarrow S$ *είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων. Να δειχθεί ότι η απεικόνιση* $\varphi' : R \longrightarrow \varphi(R), r \longmapsto \varphi(r)$ *είναι ένας επιρριπτικός ομομορφισμός δακτυλίων με* $\mathrm{Ker}(\varphi') = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Όπως και στην περίπτωση των ομάδων, η προεικόνα $\varphi^{-1}(0_S)$ τού μηδενικού στοιχείου τού S είναι μεγάλης σπουδαιότητας στη Θεωρία Δακτυλίων, όταν ο $\varphi : R \longrightarrow S$ είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων.

Ορισμός 1.2.2. *Έστω* $\varphi : R \longrightarrow S$ *ένας ομομορφισμός δακτυλίων. Το σύνολο* $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in R \mid \varphi(a) = 0_S\}$ *ονομάζεται ο πυρήνας τού ομομορφισμού* φ.

Ασκηση 12. *Έστω* $\varphi : R \longrightarrow S$ *ένας ομομορφισμός δακτυλίων. Να δειχθούν τα ακόλουθα:*

(α') Ο φ *είναι ένας μονομορφισμός δακτυλίων, εάν και μόνον εάν* $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_R\}$.

(β') Για κάθε $a, b \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ *η διαφορά* $a - b$ *ανήκει στον* $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

(γ') Για κάθε $r \in R, a \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ *τα γινόμενα* ra *και* ar *ανήκουν στον* $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Ορισμός 1.2.3. *Έστω $\varphi : R \to S$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων. Το σύνολο $\varphi(R) = \{\varphi(a) \in S \mid a \in R\}$ ονομάζεται εικόνα τού ομομορφισμού φ.*

Η εικόνα $\varphi(R)$ ενός ομομορφισμού $\varphi : R \to S$ παριστάνεται και ως $\mathrm{Im}(\varphi)$.
Στην περίπτωση ενός επιμορφισμού δακτυλίων $\varphi : R \to S$, ο δακτύλιος S ονομάζεται *επιμορφική εικόνα* τού δακτυλίου R, επειδή ακριβώς $\varphi(R) = S$.

Ασκηση 13. *Έστω $\varphi : R \to S$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων. Να δειχθεί ότι το σύνολο $\varphi(R)$ είναι ένας υποδακτύλιος τού S.*

1.3 Ιδεώδη και Πηλικοδακτύλιοι

1.3.1 *Ιδεώδη*

Ο ακόλουθος ορισμός αποτελεί γενίκευση ορισμένων χαρακτηριστικών ιδιοτήτων που έχουν οι πυρήνες ομομορφισμών, βλέπε Ασκήσεις 12(ii) και (iii).

Ορισμός 1.3.1. *Ένα μη κενό υποσύνολο I ενός δακτυλίου R ονομάζεται αμφίπλευρο ιδεώδες, εάν*

(α′) Το I είναι μια υποομάδα τού R ως προς την πράξη τής πρόσθεσης.

(β′) Για κάθε $r \in R$ και κάθε $a \in I$, τα γινόμενα ra και ar ανήκουν στο I.

Σύμφωνα με την Άσκηση 12, ο πυρήνας οποιουδήποτε ομομορφισμού δακτυλίων $\varphi : R \to S$ αποτελεί ένα ιδεώδες τού R.

Ορισμός 1.3.2. *Ένα μη κενό υποσύνολο I ενός δακτυλίου R ονομάζεται αριστερό (δεξιό) ιδεώδες, εάν*

(α′) Το I είναι μια υποομάδα τού R ως προς την πράξη τής πρόσθεσης.

(β′) Για κάθε $r \in R$ και κάθε $a \in I$, το στοιχείο ra (αντιστοίχως ar) ανήκει στο σύνολο I.

Ένα αριστερό (δεξιό ή αμφίπλευρο) ιδεώδες I ενός δακτυλίου R καλείται *γνήσιο*, εάν $I \subsetneq R$. Τα ιδεώδη $\{0_R\}$ και R ενός δακτυλίου R ονομάζονται τα *προφανή* (ή *τετριμμένα*) ιδεώδη τού R.

Προφανώς, ένας μεταθετικός δακτύλιος διαθέτει μόνο αμφίπλευρα ιδεώδη. Εάν ένα σύνολο I ενός δακτυλίου R είναι συγχρόνως αριστερό και δεξιό ιδεώδες, τότε είναι ένα αμφίπλευρο ιδεώδες τού R. Συνήθως, τα *αμφίπλευρα ιδεώδη* ονομάζονται απλώς *ιδεώδη*.

Ασκηση 14. *Έστω ότι I και J είναι δύο αμφίπλευρα (αντιστοίχως αριστερά ή δεξιά) ιδεώδη ενός δακτυλίου R.*

(α′) Να δειχθεί ότι η τομή $I \cap J$ είναι ένα αμφίπλευρο (αντιστοίχως αριστερό ή δεξιό) ιδεώδες τού R.

(β′) Να δειχθεί ότι το σύνολο $I + J = \{i + j \mid i \in I, j \in J\}$ είναι ένα αμφίπλευρο (αντιστοίχως αριστερό ή δεξιό) ιδεώδες τού R.

Ασκηση 15. *Έστω ότι* R *είναι ένας δακτύλιος και ότι* a *είναι ένα στοιχείο του.*

(α′) *Να δειχθεί ότι το σύνολο* $\langle m\rangle = \{\sum_{i\in I} r_i m r'_i \mid \forall i \in I, r_i, r'_i \in R\}$*, όπου το* I *είναι οποιοδήποτε πεπερασμένο σύνολο δεικτών, αποτελεί ένα ιδεώδες τού* R *το συγκεκριμένο ιδεώδες ονομάζεται το κύριο ιδεώδες τού* R *που παράγεται από το στοιχείο* m*.*

(β′) *Να δειχθεί ότι το σύνολο* $\langle m\rangle_r = \{mr \mid r \in R\}$ *(αντιστοίχως* $\langle m\rangle_\ell = \{rm \mid r \in R\}$*) αποτελεί ένα δεξιό (αντιστοίχως αριστερό) ιδεώδες τού* R *το συγκεκριμένο ιδεώδες ονομάζεται το δεξιό (αντιστοίχως αριστερό) κύριο ιδεώδες τού* R *που παράγεται από το στοιχείο* m*.*

(γ′) *Έστω ότι τα* u *και* u' *είναι αντιστρέψιμα στοιχεία τού* R*. Να δειχθεί ότι για κάθε* $m \in R$*, το κύριο ιδεώδες* $\langle m\rangle$ *ισούται με* $\langle umu'\rangle$*.*

(δ′) *Έστω* u *ένα αντιστρέψιμο στοιχείο τού* R*. Να δειχθεί ότι για κάθε* $m \in R$*, το δεξιό (αντιστοίχως αριστερό) κύριο ιδεώδες* $\langle m\rangle_r$ *(αντιστοίχως* $\langle m\rangle_\ell$*) ισούται με το δεξιό (αντιστοίχως αριστερό) κύριο ιδεώδες* $\langle mu\rangle_r$ *(αντιστοίχως* $\langle um\rangle_\ell$*).*

Ασκηση 16. *Να δειχθεί ότι ένας μεταθετικός δακτύλιος είναι σώμα, αν και μόνο αν το μηδενικό ιδεώδες του είναι το μοναδικό γνήσιο ιδεώδες που διαθέτει.*

1.3.2 *Πηλικοδακτύλιοι*

Εάν I είναι ιδεώδες ενός δακτυλίου R, τότε ορίζεται η πηλικοομάδα R/I, δεδομένου ότι ο R είναι μια μεταθετική ομάδα ως προς την πράξη τής πρόσθεσης και το I αποτελεί πάντοτε μια ορθόθετη υποομάδα[4] τού R. Υπενθυμίζουμε ότι τα στοιχεία τής R/I είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας $a + I = \{a + i \mid i \in I\}$ και ότι η αντιστοιχία $(a + I, b + I) \mapsto (a + b) + I$, χορηγεί μια *καλά ορισμένη* απεικόνιση $+ : R/I \times R/I \to R/I$, μέσω τής οποίας το R/I προσλαμβάνει τη δομή μιας μεταθετικής ομάδας με ουδέτερο στοιχείο την κλάση $0 + I$ και με αντίθετο στοιχείο τής κλάσης $a + I$ την κλάση $(-a) + I$. Επιπλέον, επειδή το I είναι ένα (αμφίπλευρο) ιδεώδες, η αντιστοιχία

$$\cdot : R/I \times R/I \to R/I, (a + I, b + I) \mapsto ab + I$$

αποτελεί μια *καλά ορισμένη* απεικόνιση, βλέπε Άσκηση 17, δηλαδή ανεξάρτητη των αντιπροσώπων των κλάσεων. Με βάση τη συγκεκριμένη παρατήρηση διαπιστώνεται εύκολα ότι η τριάδα $(R/I, +, \cdot)$ αποτελεί έναν δακτύλιο με μοναδιαίο στοιχείο την κλάση $1 + I$.

Ορισμός 1.3.3. *Ο δακτύλιος* R/I *ονομάζεται ο πηλικοδακτύλιος τού* R *ως προς το ιδεώδες* I*.*

Ασκηση 17. *Έστω* I *ιδεώδες ενός δακτυλίου* R *και* $a+I, b+I$ *δύο στοιχεία τής πηλικοομάδας* R/I*. Εάν* $a + I = a' + I$ *και* $b + I = b' + I$*, τότε* $ab + I = a'b' + I$*.*

[4] Απόδοση τού όρου normal subgroup. Στην ελληνική βιβλιογραφία ο συγκεκριμένος όρος αποδίδεται ως κανονική υποομάδα.

Τα ιδεώδη ενός δακτυλίου συνδέονται στενά με τους ομομορφισμούς δακτυλίων. Πράγματι, εάν R είναι ένας δακτύλιος και I είναι ένα αμφίπλευρο ιδεώδες του, τότε η απεικόνιση $\pi_I : R \longrightarrow R/I, a \mapsto \pi_I(a) := a + I$ αποτελεί έναν επιμορφισμό δακτυλίων (*γιατί;*), ο πυρήνας τού οποίου είναι ακριβώς το ιδεώδες I (*γιατί;*).
Ο ομομορφισμός $\pi_I : R \longrightarrow R/I$ ονομάζεται ο *κανονικός επιμορφισμός* που ορίζεται από το ιδεώδες I.

Ασκηση 18. *Έστω R ένας δακτύλιος και I ένα αμφίπλευρο ιδεώδες του. Έστω ότι J είναι ένα αμφίπλευρο (αντιστοίχως δεξιό ή αριστερό) ιδεώδες τού R και ότι L είναι ένα αμφίπλευρο (αντιστοίχως δεξιό ή αριστερό) ιδεώδες τού δακτυλίου R/I. Να δειχθεί*

(α′) ότι το $\pi_I(J) = J/I = \{j + I \mid j \in J\}$ αποτελεί ένα αμφίπλευρο (αντιστοίχως δεξιό ή αριστερό) ιδεώδες τού δακτυλίου R/I και

(β′) ότι το $\pi_I^{-1}(L)$ αποτελεί ένα αμφίπλευρο (αντιστοίχως δεξιό ή αριστερό) ιδεώδες τού δακτυλίου R που περιέχει το ιδεώδες I.

Θεώρημα 1.3.4 (*Το Θεώρημα Αντιστοιχίας για Δακτυλίους*)**.** *Έστω ότι R είναι ένας δακτύλιος και ότι I είναι ένα αμφίπλευρο ιδεώδες του.*
Η αντιστοιχία $\alpha : J \mapsto J/I = \{j + I \mid j \in J\}$ ορίζει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ τού συνόλου όλων των αμφίπλευρων (αντιστοίχως αριστερών ή δεξιών) ιδεωδών J τού R που περιέχουν το I και τού συνόλου όλων των αμφίπλευρων (αντιστοίχως αριστερών ή δεξιών) ιδεωδών τού R/I. Η απεικόνιση $\beta : L \mapsto \pi_I^{-1}(L)$ είναι η αντίστροφη τής α, όπου $\pi_I : R \longrightarrow R/I$ είναι ο κανονικός επιμορφισμός.

Απόδειξη Έστω $\pi_I : R \longrightarrow R/I$ ο κανονικός επιμορφισμός. Εδώ θα δείξουμε μόνο ότι οι οι απεικονίσεις α και β είναι η μία αντίστροφη τής άλλης, αφού μέρος τού συμπεράσματος τού θεωρήματος αποτελεί την Άσκηση 18. Για κάθε αμφίπλευρο (αντιστοίχως αριστερό ή δεξιό) ιδεώδες L τού R/I, έχουμε $\alpha\beta(L) = \pi_I(\pi_I^{-1}(L)) = L$, αφού ο π_I είναι ένας επιμορφισμός. Αν J είναι ένα ιδεώδες τού R με $J \supseteq I$, τότε $\beta\alpha(J) = \pi_I^{-1}(\pi_I(J)) = J + I = J$. Συνεπώς, η απεικόνιση α (αντιστοίχως β) είναι αντίστροφη τής β (αντιστοίχως τής α). ♦

1.3.3 *Το Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμού για Δακτυλίους*

Το ακόλουθο θεώρημα είναι αντίστοιχο τού ανάλογου θεωρήματος που ισχύει στη Θεωρία Ομάδων.

Θεώρημα 1.3.5 (*Το Θεώρημα Παραγοντοποίησης για Δακτυλίους*)**.** *Έστω $\varphi : R \longrightarrow S$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων. Εάν I είναι ένα ιδεώδες τού R με $I \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$, τότε υπάρχει ένας και μόνο ένας ομομορφισμός $\overline{\varphi} : R/I \longrightarrow S$, ο οποίος ικανοποιεί την ισότητα $\overline{\varphi} \circ \pi_I = \varphi$, όπου $\pi_I : R \longrightarrow R/I$ είναι ο κανονικός επιμορφισμός.*
Επιπλέον, ο $\mathrm{Ker}(\overline{\varphi})$ ισούται με το ιδεώδες $\mathrm{Ker}(\varphi)/I = \{r + I \mid r \in \mathrm{Ker}(\varphi)\}$.
Τέλος, ο φ είναι επιμορφισμός, εάν και μόνο εάν ο $\overline{\varphi}$ είναι επιμορφισμός.

Απόδειξη Θα αποδείξουμε πρώτα τη μοναδικότητα τού $\overline{\varphi}$.
Έστω ότι φ_1 και φ_2 είναι δύο ομομορφισμοί με $\varphi_1 \circ \pi_I = \varphi$ και $\varphi_2 \circ \pi_I = \varphi$. Τότε, για κάθε

$r \in R$ είναι $(\varphi_1 - \varphi_2) \circ \pi_I(r) = \varphi(r) - \varphi(r) = 0_S$ $(*)$. Επειδή ο π_I είναι επιμορφισμός, έπεται ότι κάθε $r + I \in R/I$ ισούται με $\pi_I(r)$ για κάποιο $r \in R$ και συνεπώς από τη σχέση $(*)$ προκύπτει, $\forall r+I \in R/I$ ότι $(\varphi_1 - \varphi_2)(r+I) = 0_S$ ή ισοδύναμα $\varphi_1(r+I) = \varphi_2(r+I)$. Ώστε $\varphi_1 = \varphi_2$.
Τώρα, θα αποδείξουμε την ύπαρξη τού ομομορφισμού $\overline{\varphi}$.
Έστω η αντιστοιχία $\overline{\varphi} : R/I \longrightarrow S, r + I \mapsto \overline{\varphi}(r + I) := \varphi(r)$. Η $\overline{\varphi}$ αποτελεί μια καλά ορισμένη απεικόνιση[5], αφού εάν $r_1 + I = r_2 + I$, τότε $r_1 - r_2 \in I \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$, δηλαδή $\varphi(r_1) = \varphi(r_2)$ και γι' αυτό $\overline{\varphi}(r_1 + I) = \overline{\varphi}(r_2 + I)$. Από το ορισμό τής $\overline{\varphi}$ έπεται αμέσως ότι $\overline{\varphi} \circ \pi_I = \varphi$. Απομένει η απόδειξη ότι η $\overline{\varphi}$ αποτελεί έναν ομομορφισμό δακτυλίων. Πράγματι, εάν $r_1 + I, r_2 + I \in R/I$, τότε $\overline{\varphi}((r_1 + I) + (r_2 + I)) = \overline{\varphi}((r_1 + r_2) + I) = \varphi(r_1 + r_2) = \varphi(r_1) + \varphi(r_2) = \overline{\varphi}(r_1 + I) + \overline{\varphi}(r_2 + I)$. Η απόδειξη ότι $\forall r_1 + I, r_2 + I \in R/I$, $\overline{\varphi}((r_1 + I) \cdot (r_2 + I)) = \overline{\varphi}(r_1 + I) \cdot \overline{\varphi}(r_2 + I)$, είναι ανάλογη.
Ένα στοιχείο $r + I$ ανήκει στον $\mathrm{Ker}(\overline{\varphi})$, εάν και μόνο εάν $0_S = \overline{\varphi}(r + I) = \varphi(r)$, εάν και μόνο εάν $r \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Συνεπώς, $\mathrm{Ker}(\overline{\varphi}) = \mathrm{Ker}(\varphi)/I$.
Τέλος, εάν ο φ είναι ένας επιμορφισμός, τότε από το γεγονός ότι η σύνθεση $\overline{\varphi} \circ \pi_I = \varphi$ είναι επιμορφισμός, έπεται ότι ο $\overline{\varphi}$ είναι επιμορφισμός. Αντιστρόφως, εάν ο $\overline{\varphi}$ είναι επιμορφισμός και επειδή ο π_I είναι πάντοτε επιμορφισμός, τότε έπεται ότι και η σύνθεσή τους $\overline{\varphi} \circ \pi_I = \varphi$ είναι επίσης επιμορφισμός. ♦

Παρατήρηση 1.3.6. *Η ύπαρξη ενός ομομορφισμού $\overline{\varphi}$ με την ιδιότητα $\overline{\varphi} \circ \pi_I = \varphi$, όπως στο ανωτέρω θεώρημα, είναι δυνατόν να διατυπωθεί λέγοντας ότι υπάρχει ένας ομομορφισμός $\overline{\varphi}$, τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό.*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi_I"'] & & S \\ & R/I \arrow[ur, dashed, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Θεώρημα 1.3.7 (*Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμού για Δακτυλίους*).
Εάν $\varphi : R \longrightarrow S$ είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων, τότε η απεικόνιση

$$R/\mathrm{Ker}(\varphi) \longrightarrow \varphi(R), \quad r + \mathrm{Ker}(\varphi) \mapsto \varphi(r)$$

ορίζει έναν ισομορφισμό δακτυλίων.

Απόδειξη Θεωρούμε τον επαγόμενο επιμορφισμό $\varphi' : R \longrightarrow \varphi(R), r \mapsto \varphi(r)$, βλέπε Άσκηση 11, και εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα θέτοντας $I = \mathrm{Ker}(\varphi')$. Τότε σύμφωνα με αυτό, ο πυρήνας τού ομομορφισμού

$$\overline{\varphi'} : R/\mathrm{Ker}(\varphi') \longrightarrow \varphi(R), \quad r + \mathrm{Ker}(\varphi') \mapsto \varphi(r)$$

ισούται με $\mathrm{Ker}(\varphi')/\mathrm{Ker}(\varphi')$ και γι' αυτό ο $\overline{\varphi'}$ είναι μονομορφισμός. Επιπλέον, επειδή ο φ' είναι επιμορφισμός, προκύπτει ότι και ο $\overline{\varphi'}$ είναι επιμορφισμός. Επομένως, ο $\overline{\varphi'}$ είναι

[5]Με άλλα λόγια ανεξάρτητη από την επιλογή τού αντιπροσώπου r της πλευρικής κλάσης $r + I$.

ισομορφισμός. Τέλος, από την Άσκηση 11 γνωρίζουμε ότι $\mathrm{Ker}(\varphi') = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Άρα, η απεικόνιση $R/\mathrm{Ker}(\varphi) \to \varphi(R),\ r + \mathrm{Ker}(\varphi) \mapsto \varphi(r)$ είναι ένας ισομορφισμός δακτυλίων. ♦

Ασκηση 19. *Έστω ότι R είναι ένας δακτύλιος και ότι I και J είναι δύο ιδεώδη του με $I \subseteq J$. Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος R/J είναι ισόμορφος με τον πηλικοδακτύλιο $(R/I)/(J/I)$. (Υπόδειξη: Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν που εκτελείται στην περίπτωση των μοδίων, βλέπε Θεώρημα 3.4.21.)*

1.3.4 *Μεγιστοτικά και Πρώτα Ιδεώδη*

Ορισμός 1.3.8. *Έστω ότι R είναι ένας δακτύλιος και $\mathcal{M}$ ένα αμφίπλευρο (αντιστοίχως δεξιό ή αριστερό) ιδεώδες του. Το $\mathcal{M}$ ονομάζεται μεγιστοτικό ιδεώδες, εάν είναι γνήσιο ιδεώδες τού R και δεν περιέχεται σε κανένα άλλο αμφίπλευρο (αντιστοίχως δεξιό ή αριστερό) γνήσιο ιδεώδες τού R.*

Με άλλα λόγια, το αμφίπλευρο (αντιστοίχως δεξιό ή αριστερό) ιδεώδες $\mathcal{M}$ είναι μεγιστοτικό, αν $\mathcal{M} \subsetneq R$ και αν για κάθε αμφίπλευρο (αντιστοίχως δεξιό ή αριστερό) ιδεώδες J τού R με $\mathcal{M} \subseteq J \subseteq R$, έπεται ή $\mathcal{M} = J$ ή $\mathcal{M} = R$.

Θεώρημα 1.3.9. *Κάθε αμφίπλευρο (αντιστοίχως δεξιό ή αριστερό) γνήσιο ιδεώδες I ενός δακτυλίου R περιέχεται σε ένα αμφίπλευρο (αντιστοίχως δεξιό ή αριστερό) μεγιστοτικό ιδεώδες.*

Απόδειξη Θα εφαρμόσουμε το Λήμμα Zorn στο σύνολο $\mathcal{S}$ όλων των αμφίπλευρων (αντιστοίχως δεξιών ή αριστερών) γνήσιων ιδεωδών τού R που περιέχουν το I, δηλαδή στο $\mathcal{S} = \{J \mid I \subseteq J \subsetneq R\}$, όπου το J είναι ένα αμφίπλευρο (αντιστοίχως δεξιό ή αριστερό) γνήσιο ιδεώδες τού R με σχέση μερικής διάταξης την «$\subseteq$».
Προφανώς, $\mathcal{S} \neq \emptyset$, εφόσον $I \in \mathcal{S}$. Τώρα θα αποδείξουμε ότι το $\mathcal{S}$ έχει μεγιστοτικά στοιχεία. Σύμφωνα με το Λήμμα Zorn, αρκεί να επιβεβαιώσουμε ότι κάθε αλυσίδα στοιχείων τού $\mathcal{S}$, διαθέτει ένα άνω φράγμα στο $\mathcal{S}$.
Έστω ότι $\mathcal{K}$ είναι μια αλυσίδα στοιχείων τού $\mathcal{S}$ και ότι $\mathcal{Y} = \cup_{Y \in \mathcal{K}} Y$ είναι η ένωση των στοιχείων τής $\mathcal{K}$. Προφανώς, $I \subseteq \mathcal{Y} \subseteq R$. Το $\mathcal{Y}$ είναι ένα αμφίπλευρο (αντιστοίχως δεξιό ή αριστερό) ιδεώδες τού R, αφού αν $r, r' \in \mathcal{Y}$, τότε υπάρχει $Y \in \mathcal{K}$ με $r, r' \in Y$ και συνεπώς $r - r' \in Y \subseteq \mathcal{Y}$. Επιπλέον, είναι προφανές ότι το $\mathcal{Y}$ είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό με τα στοιχεία τού R είτε από αριστερά είτε από δεξιά (αντιστοίχως από τα δεξιά ή τα αριστερά). Συνεπώς, για να αποτελεί το αμφίπλευρο (αντιστοίχως δεξιό ή αριστερό) ιδεώδες $\mathcal{Y}$ ένα άνω φράγμα τού $\mathcal{K}$ στο $\mathcal{S}$ αρκεί να είναι γνήσιο ιδεώδες. Αλλά, αν ήταν $\mathcal{Y} = R$, τότε $1_R \in \mathcal{Y}$ και συνεπώς θα υπήρχε κάποιο $Y \in \mathcal{K}$ με $1_R \in Y$. Αυτό όμως είναι άτοπο, εφόσον κάθε $Y \in \mathcal{S}$ είναι γνήσιο ιδεώδες. Άρα, το $\mathcal{Y}$ είναι ένα άνω φράγμα τής $\mathcal{K}$ που ανήκει στο $\mathcal{S}$ και γι' αυτό το $\mathcal{S}$ διαθέτει μεγιστοτικά στοιχεία. ♦

Πόρισμα 1.3.10. *Κάθε δακτύλιος R με $1_R \neq 0_R$ διαθέτει αμφίπλευρα (αντιστοίχως δεξιά ή αριστερά) μεγιστοτικά ιδεώδη.*

Απόδειξη Εφαρμόζουμε το ανωτέρω θεώρημα επιλέγοντας το ιδεώδες $I = \{0_R\}$. ♦

Παρατήρηση 1.3.11. *Είναι αξιοσημείωτο ότι, στον ορισμό τής έννοιας τού δακτυλίου εάν δεν απαιτήσουμε την ύπαρξη μοναδιαίου στοιχείου, τότε γενικώς δεν μπορεί να εξασφαλιστεί η ύπαρξη αμφίπλευρων (αντιστοίχως δεξιών ή αριστερών) μεγιστοτικών ιδεωδών· αυτός είναι ένας από τους κύριους λόγους που οδηγούν στην απαίτηση να διαθέτουν οι υπό μελέτη δακτύλιοι μοναδιαίο στοιχείο.*

Θεώρημα 1.3.12. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος. Ένα αμφίπλευρο ιδεώδες $\mathcal{M}$ τού R είναι μεγιστοτικό, αν και μόνο αν ο πηλικοδακτύλιος $R/\mathcal{M}$ είναι σώμα.*

Απόδειξη Σύμφωνα με την Άσκηση 16, ο $R/\mathcal{M}$ είναι σώμα, αν και μόνο αν το μόνο γνήσιο ιδεώδες τού $R/\mathcal{M}$ είναι το μηδενικό. Τώρα από το Θεώρημα Αντιστοιχίας για Δακτυλίους, βλέπε Θεώρημα 1.3.4, έχουμε ότι το μόνο γνήσιο ιδεώδες τού $R/\mathcal{M}$ είναι το μηδενικό, αν και μόνο αν το $\mathcal{M}$ είναι μεγιστοτικό ιδεώδες. ♦

Ορισμός 1.3.13. *Έστω ότι R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος και $\mathcal{P}$ ένα ιδεώδες του. Το $\mathcal{P}$ ονομάζεται πρώτο, εάν το $\mathcal{P}$ είναι γνήσιο ιδεώδες τού R και για κάθε $a, b \in R$ με $a \cdot b \in \mathcal{P}$ είτε $a \in \mathcal{P}$ είτε $b \in \mathcal{P}$.*

Θεώρημα 1.3.14. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος. Ένα ιδεώδες $\mathcal{P}$ τού R είναι πρώτο, αν και μόνο αν ο πηλικοδακτύλιος $R/\mathcal{P}$ είναι ακέραια περιοχή.*

Απόδειξη «$\Rightarrow$» Εφόσον το $\mathcal{P}$ είναι γνήσιο, το μηδενικό στοιχείο $0 + \mathcal{P}$ τού $R/\mathcal{P}$ δεν συμπίπτει με το μοναδιαίο στοιχείο $1 + \mathcal{P}$. Εάν $ab + \mathcal{P} = 0 + \mathcal{P}$, τότε $ab \in \mathcal{P}$ και συνεπώς είτε $a + \mathcal{P} = 0 + \mathcal{P}$ είτε $b + \mathcal{P} = 0 + \mathcal{P}$. Άρα, ο $R/\mathcal{P}$ είναι ακέραια περιοχή.
«$\Leftarrow$» Εάν ο $R/\mathcal{P}$ είναι ακέραια περιοχή, τότε $0 + \mathcal{P} \neq 1 + \mathcal{P}$ και γι᾽ αυτό το $\mathcal{P}$ είναι γνήσιο ιδεώδες. Εάν $ab \in \mathcal{P}$, τότε $(a + \mathcal{P})(b + \mathcal{P}) = 0 + \mathcal{P}$ και επειδή ο $R/\mathcal{P}$ είναι ακέραια περιοχή, είτε $a + \mathcal{P} = 0 + \mathcal{P}$ είτε $b + \mathcal{P} = 0 + \mathcal{P}$. Συνεπώς, είτε $a \in \mathcal{P}$ είτε $b \in \mathcal{P}$. ♦

Πόρισμα 1.3.15. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος. Κάθε μεγιστοτικό ιδεώδες τού R είναι πρώτο ιδεώδες.*

Απόδειξη Εάν $\mathcal{M}$ είναι ένα μεγιστοτικό ιδεώδες, τότε ο δακτύλιος $R/\mathcal{M}$ είναι σώμα και συνεπώς ακέραια περιοχή. Άρα, το $\mathcal{M}$ είναι ένα πρώτο ιδεώδες. ♦

Σε ορισμένες περιπτώσεις ισχύει και το αντίστροφο τού ανωτέρω πορίσματος:

Παρατήρηση 1.3.16. *Έστω R μια περιοχή κυρίων ιδεωδών. Κάθε μη-μηδενικό πρώτο ιδεώδες τής R είναι μεγιστοτικό.*
Πρόκειται για ένα κλασικό αποτέλεσμα τής Μεταθετικής Άλγεβρας που δεν πρόκειται να αποδείξουμε εδώ.

Στο ακόλουθο παράδειγμα θα δούμε ότι το αντίστροφο τού Πορίσματος 1.3.15 δεν είναι πάντα αληθές:

Παράδειγμα 1.3.17. *Έστω $\mathbb{Z}[x]$ ο δακτύλιος πολυωνύμων μιας μεταβλητής, βλέπε Ενότητα 2.2.1, με συντελεστές από τον δακτύλιο των ακεραίων αριθμών $\mathbb{Z}$.*
Θεωρούμε τα ακόλουθα κύρια ιδεώδη τού $\mathbb{Z}[x]$:

$$\langle x \rangle = \{xf(x) \mid f(x) \in \mathbb{Z}[x]\} \text{ και } \langle 2 \rangle = \{2f(x) \mid f(x) \in \mathbb{Z}[x]\}.$$

Το ιδεώδες $\langle x \rangle$ *αποτελείται ακριβώς από τα πολυώνυμα τού* $\mathbb{Z}[x]$ *που έχουν σταθερό όρο ίσο με* 0 *και το ιδεώδες* $\langle 2 \rangle$ *ακριβώς από τα πολυώνυμα τού* $\mathbb{Z}[x]$ *που έχουν όλους τους συντελεστές τους άρτιους. Αμφότερα τα ιδεώδη είναι πρώτα ιδεώδη τού* $\mathbb{Z}[x]$ *(γιατί;) και περιέχονται στο ιδεώδες*

$$J = \langle x \rangle + \langle 2 \rangle = \{xf(x) + 2g(x) \mid f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]\}.$$

Το J *αποτελείται ακριβώς από τα πολυώνυμα τού* $\mathbb{Z}[x]$ *που έχουν σταθερό όρο έναν άρτιο αριθμό (γιατί;). Το* J *είναι ένα γνήσιο ιδεώδες τού* $\mathbb{Z}[x]$*, αφού* $1 \notin J$*· επιπλέον τα* $\langle x \rangle$ *και* $\langle 2 \rangle$ *περιέχονται γνησίως στο* $J \subsetneq \mathbb{Z}[x]$ *και γι' αυτό δεν είναι μεγιστοτικά.*

Ασκηση 20. *Έστω* $\varphi : R \to S$ *ένας επιμορφισμός δακτυλίων. Να δειχθεί*

(α′) *ότι ο πυρήνας* $\mathrm{Ker}(\varphi)$ *είναι πρώτο ιδεώδες, αν και μόνο αν ο* S *είναι ακέραια περιοχή και*

(β′) *ότι ο πυρήνας* $\mathrm{Ker}(\varphi)$ *είναι μεγιστοτικό ιδεώδες, αν και μόνο αν ο* S *είναι σώμα.*

Ασκηση 21. *Να δειχθεί ότι το ιδεώδες* $J = \langle x \rangle + \langle 2 \rangle$ *είναι ένα μεγιστοτικό ιδέωδες τού* $\mathbb{Z}[x]$.

Ασκηση 22. *Για ποιές τιμές τού* $n \in \mathbb{N}$*, αντί τού* $n = 2$*, μπορούμε να επαναλάβουμε το Παράδειγμα 1.3.17;*

Κεφάλαιο 2

Κατασκευές Δακτυλίων

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε ορισμένες κατασκευές και παραδείγματα δακτυλίων που δεν είναι απαραίτητα μεταθετικοί και συγχρόνως θα εισάγουμε ορισμένες σημαντικές έννοιες.

2.1 Γνωστά Παραδείγματα

Παράδειγμα 2.1.1. *Ο μηδενοδακτύλιος. Πρόκειται για οποιοδήποτε μονοσύνολο* $A = \{a\}$. *Οι πράξεις τής πρόσθεσης και τού πολλαπλασιασμού ορίζονται κατά προφανή τρόπο. Είναι ο μοναδικός δακτύλιος με* $1_A = 0_A$.

Ασκηση 23. *Έστω* R *ένας δακτύλιος. Να δειχθεί ότι* $1_R = 0_R$, *εάν και μόνο εάν ο* R *είναι ένα μονοσύνολο.*

Παράδειγμα 2.1.2. *Ο δακτύλιος* $\mathbb{Z}$. *Πρόκειται για τον δακτύλιο των ακεραίων αριθμών. Κάθε ιδεώδες τού* $\mathbb{Z}$ *είναι τής μορφής* $\langle m \rangle = \{mz \mid z \in \mathbb{Z}\}$, *όπου* $m \in \mathbb{Z}$.
Υπενθυμίζουμε ότι ένας δακτύλιος καλείται περιοχή κυρίων ιδεωδών, εάν είναι ακέραια περιοχή και κάθε ιδεώδες του είναι κύριο.

Ασκηση 24. *Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος* $\mathbb{Z}$ *διαθέτει ακριβώς έναν υποδακτύλιο.*

Παράδειγμα 2.1.3. *Σώματα. Τα σύνολα* $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *με τις γνωστές πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού αποτελούν σώματα.*
Ο πηλικοδακτύλιος $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/\langle n \rangle, n \in \mathbb{N}$ *είναι σώμα τότε και μόνο τότε, όταν ο* n *είναι ένας πρώτος αριθμός (γιατί;).*

Ορισμός 2.1.4. *Ένας δακτύλιος* D *καλείται διαιρετικός δακτύλιος (ή στρεβλό σώμα), εάν το σύνολο* $D \setminus \{0_D\}$ *συμπίπτει με την ομάδα* $U(D)$ *των αντιστρέψιμων στοιχείων του.*

Προφανώς, κάθε σώμα είναι διαιρετικός δακτύλιος· σύντομα θα δούμε παραδείγματα διαιρετικών δακτυλίων που δεν είναι σώματα.

Λήμμα 2.1.5. *Ένας δακτύλιος* D *είναι διαιρετικός δακτύλιος, εάν και μόνο εάν δεν είναι ο μηδενοδακτύλιος και δεν διαθέτει κανένα άλλο αριστερό ιδεώδες εκτός από τα τετριμμένα ιδεώδη* $\{0_D\}$ *και* D.

Απόδειξη Εάν ο D είναι ένας διαιρετικός δακτύλιος, τότε δεν είναι ο μηδενοδακτύλιος, αφού το σύνολο $D \setminus \{0_D\}$, όντας ομάδα, δεν μπορεί να είναι το κενό σύνολο. Έστω I ένα μη μηδενικό αριστερό ιδεώδες τού D και $a \in I, a \neq 0_D$. Τότε υπάρχει το $a^{-1} \in D$ και επειδή το I είναι αριστερό ιδεώδες, το στοιχείο $a^{-1}a = 1_D \in I$. Εφόσον κάθε $r \in D$ είναι αριστερό πολλαπλάσιο τού 1_D, δηλαδή $r = r1_D$, και το I είναι αριστερό ιδεώδες, έπεται ότι το $r \in I$. Ώστε $I = D$.
Αντιστρόφως, εάν ο D δεν είναι ο μηδενοδακτύλιος, τότε το σύνολο $U = D \setminus \{0\}$ δεν είναι το κενό σύνολο, αφού το $1_D \in U$. Τώρα θα δείξουμε ότι το U είναι συμπίπτει με την ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων $U(D)$. Έστω $\langle a\rangle_\ell$ το αριστερό κύριο ιδεώδες που παράγεται από a. Το $\langle a\rangle_\ell$ ισούται με D, αφού δεν είναι το μηδενικό ιδεώδες, συνεπώς το $1_D \in \langle a\rangle_\ell$ και γι' αυτό $\exists r \in D$ με $ra = 1_D$ (1). Για να αποτελεί το r το αντίστροφο τού a, πρέπει και $ar = 1_D$. Για να αποδείξουμε αυτήν την ισότητα παρατηρούμε ότι και το $r \neq 0_D$ αφού διαφορετικά θα είχαμε $0_D = 1_D$ και τότε θα ήταν, σύμφωνα με την Άσκηση 23, ο D ο μηδενοδακτύλιος. Συνεπώς, το αριστερό ιδεώδες $\langle r\rangle_\ell = D$ και γι' αυτό υπάρχει κάποιο στοιχείο $t \in D$ με $tr = 1_D$ (2). Από την (1) έπεται $rar = r$ και χρησιμοποιώντας την (2) παίρνουμε $t(rar) = tr = 1_D$ (3). Επειδή όμως $t(rar) = (tr)ar = ar$ και πάλι λόγω τής (2), η (3) γράφεται $ar = 1_D$. ♦

Παρατήρηση 2.1.6.
(α') *Στο ανωτέρω λήμμα τα αριστερά ιδεώδη μπορούν να αντικατασταθούν από δεξιά ιδεώδη.*

(β') *Στην ειδική περίπτωση όπου ο διαιρετικός δακτύλιος είναι σώμα* K, *το συγκεκριμένο λήμμα μάς πληροφορεί ότι τα μόνα ιδεώδη τού* K *είναι ακριβώς τα τετριμμένα ιδεώδη* $\{0_K\}$ *και* K.

(γ') *Μολονότι ένα σώμα δεν διαθέτει μη τετριμμένα ιδεώδη, μπορεί να διαθέτει γνήσιους υποδακτυλίους. Επί παραδείγματι, το σώμα των ρητών* $\mathbb{Q}$ *περιέχει ως γνήσιο υποδακτύλιο τον δακτύλιο των ακεραίων αριθμών* $\mathbb{Z}$.

Ασκηση 25. *Να δειχθεί ότι το σύνολο* $\{a/b \in \mathbb{Q} \mid b \neq 2k+1, \forall k \in \mathbb{Z}\}$ *αποτελεί έναν υποδακτύλιο τού* $\mathbb{Q}$.

2.2 Νέοι Δακτύλιοι από παλαιούς

2.2.1 *Πολυωνυμικοί Δακτύλιοι*

Εάν R είναι ένας δακτύλιος, τότε ένα *πολυώνυμο* μιας μεταβλητής x υπεράνω τού R είναι μια έκφραση τής μορφής

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots a_nx^n := \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

όπου κάθε $a_i \in R$ και $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Το στοιχείο a_i καλείται ο *συντελεστής* τού x^i τού $p(x)$. Ο μεγαλύτερος ακέραιος m (αν υπάρχει) με $a_m \neq 0$ ονομάζεται ο *βαθμός* τού $p(x)$ και συμβολίζεται ως $\deg p(x)$. Ένα πολυώνυμο $p(x)$ ονομάζεται *σταθερό*, εάν $p(x) = a_0$, $a_0 \in R$. Όταν όλοι οι συντελεστές ενός πολυωνύμου είναι ίσοι με 0_R, τότε το πολυώνυμο ονομάζεται το *μηδενικό πολυώνυμο* και ορίζεται να έχει βαθμό ίσο με $-\infty$.
Δύο πολυώνυμα $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots a_nx^n$ και $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots b_mx^m$ με βαθμούς $\deg p(x) = n$ και $\deg q(x) = m$ αντιστοίχως, ***ορίζονται ως*** *ίσα*, εάν $n = m$ και $a_i = b_i, \forall i, 0 \leq i \leq m$.

Στο σύνολο $R[x]$ των πολυωνύμων μιας μεταβλητής x ορίζονται δύο πράξεις:

Η *πρόσθεση*:

$$\begin{aligned} &+ : R[x] \times R[x] \to R[x], \\ &\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \right) \mapsto \sum_{\ell=0}^{\max\{n,m\}} (a_\ell + b_\ell) x^\ell, \end{aligned}$$

όπου $a_\ell = 0, \forall \ell, \ell > n$, εάν $m = \max\{n, m\}$ και $b_\ell = 0, \forall \ell, \ell > m$, εάν $n = \max\{n, m\}$ και ο *πολλαπλασιασμός*:

$$\begin{aligned} &\cdot : R[x] \times R[x] \to R[x], \\ &\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \right) \mapsto \sum_{\ell=0}^{n+m} c_\ell x^\ell, \end{aligned}$$

όπου $c_\ell = \sum_{i+i=\ell} a_i b_j, \forall \ell, 0 \leq \ell \leq n + m$.

Το σύνολο $R[x]$ των πολυωνύμων μιας μεταβλητής x με συντελεστές από έναν δακτύλιο R εφοδιασμένο με τις ανωτέρω δύο πράξεις τής πρόσθεσης και τού πολλαπλασιασμού αποδεικνύεται ότι αποτελεί έναν δακτύλιο, ο οποίος ονομάζεται ο *δακτύλιος των πολυωνύμων μιας μεταβλητής* υπεράνω τού δακτυλίου R.
Το μηδενικό πολυώνυμο τού $R[x]$ είναι το σταθερό πολυώνυμο 0_R και το μοναδιαίο στοιχείο τού $R[x]$ είναι το σταθερό πολυώνυμο 1_R.

Μέσω τής επαγωγικής διαδικασίας μπορεί να οριστούν πολυωνυμικοί δακτύλιοι υπεράνω ενός δακτυλίου R με οποιοδήποτε πεπερασμένο αριθμό μεταβλητών:
Θέτουμε $R_0 = R$, $R_1 = R_0[x_1]$, $R_2 = R_1[x_2] = R_0[x_1, x_2]$ και ούτω καθεξής. Δεν πρόκειται να διαπραγματευθούμε περαιτέρω τους δακτυλίους πολυωνύμων, επειδή αν και κατέχουν σημαντική θέση στην Άλγεβρα, στην παρούσα ανάπτυξη η σημασία τους δεν είναι τόσο μεγάλη.

2.2.2 *Ευθύ Γινόμενο Δακτυλίων*

Έστω ότι R και S είναι δύο δακτύλιοι. Στο καρτεσιανό γινόμενο $R \times S$ ορίζονται δύο πράξεις:

Η *πρόσθεση*:

$$+ : (R \times S) \times (R \times S) \to R \times S, \ \ ((r, s), (r', s')) \mapsto (r + r', s + s'),$$

όπου η πρόσθεση στην πρώτη (αντιστοίχως δεύτερη) συνιστώσα είναι η πρόσθεση τού R (αντιστοίχως τού S) και

ο *πολλαπλασιασμός*:

$$\cdot : (R \times S) \times (R \times S) \to R \times S, \quad ((r, s), (r', s')) \mapsto (rr', ss'),$$

όπου ο πολλαπλασιασμός στην πρώτη (αντιστοίχως δεύτερη) συνιστώσα είναι ο πολλαπλασιασμός τού R (αντιστοίχως τού S).

Το καρτεσιανό γινόμενο $R \times S$ εφοδιασμένο με τις ανωτέρω δύο πράξεις αποτελεί έναν δακτύλιο (*γιατί;*), ο οποίος ονομάζεται το *ευθύ γινόμενο* των δακτυλίων $R \times S$.
Το μηδενικό στοιχείο τού $R \times S$ είναι το $(0_R, 0_S)$ και το μοναδιαίο στοιχείο τού $R \times S$ είναι το $(1_R, 1_S)$.

Ασκηση 26. *Έστω ότι R και S είναι δύο δακτύλιοι και $R \times S$ το ευθύ γινόμενό τους.*
Να δειχθεί ότι οι απεικονίσεις

$$p_R : R \times S \to R, \quad (r, s) \mapsto r$$

και

$$p_S : R \times S \to S, \quad (r, s) \mapsto s$$

αποτελούν επιμορφισμούς δακτυλίων με $\mathrm{Ker}(p_R) = \{0_R\} \times S$*, και* $\mathrm{Ker}(p_S) = R \times \{0_S\}$*.*

Οι επιμορφισμοί $p_R : R \times S \to R$ και $p_S : R \times S \to S$ ονομάζονται *κανονικές προβολές* τού $R \times S$ στις συνιστώσες του R και S.
Σημειώστε ότι για κάθε $a = (r, s) \in R \times S$ έχουμε $a = (p_R(a), p_S(a))$.

Το ευθύ γινόμενο δύο δακτυλίων διέπεται από την ακόλουθη *καθολική ιδιότητα*:

Θεώρημα 2.2.1 (*Η Καθολικότητα τού ευθέος Γινομένου δύο Δακτυλίων*)**.** *Έστω ότι R και S είναι δύο δακτύλιοι και $R \times S$ το ευθύ γινόμενό τους. Εάν T είναι ένας δακτύλιος και $\varphi_R : T \to R$, $\varphi_S : T \to S$ είναι δύο ομομορφισμοί δακτυλίων, τότε υπάρχει ένας μοναδικός ομομορφισμός δακτυλίων $\varphi : T \to R \times S$ με $p_R \circ \varphi = \varphi_R$ και $p_S \circ \varphi = \varphi_S$.*

Απόδειξη Θα αποδείξουμε πρώτα τη μοναδικότητα τού φ.
Έστω ότι υπάρχουν δύο ομομορφισμοί δακτυλίων $\varphi, \varphi' : T \to R \times S$ που ικανοποιούν το συμπέρασμα τού θεωρήματος. Εάν t είναι οποιοδήποτε στοιχείο τού T, τότε $\varphi(t) = (r, s)$ και $\varphi'(t) = (r', s')$ για κάποια (r, s) και $(r', s') \in R \times S$.
Επειδή $r = p_R \circ \varphi(t) = \varphi_R(t)$ και $s = p_S \circ \varphi(t) = \varphi_S(t)$ έπεται ότι $\varphi(t) = (\varphi_R(t), \varphi_S(t))$. Επαναλαμβάνοντας ακριβώς τον ίδιο συλλογισμό χρησιμοποιώντας τώρα τον ομομορφισμό φ' και το στοιχείο (r', s') καταλήγουμε στην ισότητα $\varphi'(t) = (\varphi_R(t), \varphi_S(t))$.
Συνεπώς, για οποιοδήποτε στοιχείο $t \in T$ είναι $\varphi(t) = \varphi'(t)$.
Θα αποδείξουμε τώρα την ύπαρξη τού φ. Ορίζουμε την απεικόνιση $\varphi : T \to R \times S$ ως $\varphi(t) = (\varphi_R(t), \varphi_S(t))$. Πρόκειται για έναν ομομορφισμό δακτυλίων (*γιατί;*) που ικανοποιεί τις $p_R \circ \varphi = \varphi_R$ και $p_S \circ \varphi = \varphi_S$ (*γιατί;*). ♦

Παρατήρηση 2.2.2. *Το συμπέρασμα τού ανωτέρω θεωρήματος μπορεί να διατυπωθεί και ως ακολούθως:*
Υπάρχει ένας μοναδικός ομομορφισμός $\varphi : T \to R \times S$ που καθιστά το επόμενο διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "\varphi_R"'] \arrow[d, dashed, "\exists! \,\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_S"] & \\ R & R \times S \arrow[l, "p_R"] \arrow[r, "p_S"'] & S \end{tikzcd}$$

Ασκηση 27. *Έστω ότι L είναι ένας δακτύλιος και ότι $\ell_R : L \longrightarrow R, \ell_S : L \longrightarrow S$ είναι δύο ομομορφισμοί δακτυλίων.*
Εάν για κάθε δακτύλιο T και ομομορφισμούς $\alpha_R : T \longrightarrow R$, $\alpha_S : T \longrightarrow S$ υπάρχει ένας μοναδικός ομομορφισμός δακτυλίων $\alpha : T \longrightarrow L$ με $\ell_R \circ \alpha = \alpha_R$ και $\ell_S \circ \alpha = \alpha_S$, τότε να δειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός δακτυλίων $\sigma : L \longrightarrow R \times S$ με $p_R \circ \sigma = \ell_R$ και $p_S \circ \sigma = \ell_S$, όπου $R \times S$ είναι το ευθύ γινόμενο των δακτυλίων R, S και p_R, p_S είναι οι κανονικές προβολές.

Με άλλα λόγια, *το ευθύ γινόμενο δύο δακτυλίων χαρακτηρίζεται μοναδικά από την καθολική του ιδιότητα.*

Ασκηση 28. *Να δειχθεί ότι αν R_1, R_2, R_3 είναι τρεις δακτύλιοι, τότε $(R_1 \times R_2) \times R_3 \cong R_1 \times (R_2 \times R_3)$.*

2.2.3 *Τα Ιδεώδη τού ευθέος Γινομένου*

Στην παρούσα ενότητα θα περιγράψουμε τα αριστερά, τα δεξιά και τα αμφίπλευρα ιδεώδη τού ευθέος γινομένου δύο δακτυλίων. Η συζήτησή μας θα εστιαστεί μόνο στα αριστερά ιδεώδη, επειδή όλοι οι συλλογισμοί που θα κάνουμε γι' αυτά ισχύουν χωρίς καμιά διαφοροποίηση για τα δεξιά και τα αμφίπλευρα ιδεώδη.

Έστω ότι R και S είναι δύο δακτύλιοι και ότι I (αντιστοίχως J) είναι ένα αριστερό ιδεώδες τού R (αντιστοίχως τού S). Το καρτεσιανό γινόμενο $I \times J$ είναι ένα αριστερό ιδεώδες τού $R \times S$ (*γιατί;*). Θα δείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο:

Λήμμα 2.2.3. *Εάν K είναι ένα αριστερό ιδεώδες τού $R \times S$, τότε υπάρχουν αριστερά ιδεώδη I και J των δακτυλίων R και S αντιστοίχως με $K = I \times J$.*

Απόδειξη Θεωρούμε τις προβολές p_R και p_S τού $R \times S$ στις συνιστώσες του. Οι εικόνες $I = p_R(K)$ και $J = p_S(K)$ είναι αριστερά ιδεώδη των δακτυλίων R και S αντιστοίχως, βλέπε Άσκηση 29.
Για το ιδεώδες K έχουμε $K \subseteq I \times J$, αφού κάθε $k \in K$ ισούται με $(p_R(k), p_S(k))$. Τώρα θα δείξουμε ότι $I \times J \subseteq K$. Πράγματι, αν $(a, b) \in I \times J$, τότε υπάρχουν $k, k' \in K$ με $p_R(k) = a$ και $p_S(k') = b$. Επειδή $k = (p_R(k), p_S(k))$ και το K είναι αριστερό ιδεώδες τού $R \times S$, το $(1_R, 0_S)(p_R(k), p_S(k)) = (p_R(k), 0_S) = (a, 0_S)$ ανήκει στο K. Ομοίως, το $(0_R, 1_S)(p_R(k'), p_S(k')) = (0_R, p_S(k')) = (0_R, b)$ ανήκει επίσης στο K. Αλλά τότε και το $(a, b) = (a, 0_S) + (0_R, b) \in K$. Ώστε $I \times J \subset K$. Συνεπώς $K = I \times J$. ♦

Ασκηση 29. *Έστω $\varphi : R \longrightarrow S$ ένας επιμορφισμός δακτυλίων. Να δειχθεί ότι η εικόνα $\varphi(I)$ ενός αριστερού (αντιστοίχως δεξιού ή αμφίπλευρου) ιδεώδους τού R είναι αριστερό (αντιστοίχως δεξιό ή αμφίπλευρο) ιδεώδες τού S.*

Η έννοια τού ευθέος γινομένου δύο δακτυλίων γενικεύεται σε οποιαδήποτε οικογένεια δακτυλίων $(R_i)_{i\in I}$. Στην περίπτωση αυτή το ευθύ γινόμενο έχει ως στοιχεία τα $(r_i)_{i\in I}$, όπου $\forall i \in I, r_i \in R_i$, η πρόσθεση ορίζεται ως $(r_i)_{i\in I} + (r'_i)_{i\in I} := (r_i + r'_i)_{i\in I}$ και ο πολλαπλασιασμός ως $(r_i)_{i\in I} \cdot (r'_i)_{i\in I} := (r_i r'_i)_{i\in I}$. Η μονάδα τού ευθέος γινομένου είναι το $(1_{R_i})_{i\in I}$, όπου 1_{R_i} είναι η μονάδα τού R_i, για κάθε $i \in I$.
Το ευθύ γινόμενο συμβολίζεται με $\prod_{i\in I} R_i$ και $\forall j \in I$, και η *κανονική προβολή* στην j-οστή συνιστώσα είναι ο επιμορφισμός $p_j : \prod_{i\in I} R_i \to R_j, (r_i)_{i\in I} \mapsto r_j$.

Ασκηση 30. *(Η Καθολικότητα τού ευθέος Γινομένου Δακτυλίων.) Να δειχθεί ότι για οποιαδήποτε οικογένεια $(\varphi_i : R \to R_i)_{i\in I}$ ομομορφισμών δακτυλίων υπάρχει ένας μοναδικός ομομορφισμός $\varphi : R \to \prod_{i\in I} R_i$ με $\varphi_j = p_j \circ \varphi, \forall j \in I$.*

Παρατήρηση 2.2.4. *Έστω $(R_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια δακτυλίων. Η περιγραφή των ιδεωδών τού ευθέος γινομένου δύο δακτυλίων που δόθηκε στο Λήμμα 2.2.3 ισχύει και στην περίπτωση όπου το I είναι ένα πεπερασμένο σύνολο δεικτών. Αλλά δεν ισχύει όταν το I είναι ένα άπειρο σύνολο:*
Επί παραδείγματι, ας θεωρήσουμε μια άπειρη το πλήθος οικογένεια δακτυλίων $(R_i)_{i\in I}$, όπου κανένας από τους R_i δεν είναι ο μηδενοδακτύλιος. Το σύνολο $W = \{(r_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} R_i \mid$ όπου μόνο πεπερασμένα το πλήθος $r_i \neq 0_{R_i}\}$ είναι ένα αμφίπλευρο ιδεώδες τού $\prod_{i\in I} R_i$. Αλλά δεν υπάρχουν ιδεώδη $J_i \subseteq R_i$ μέ $\prod_i J_i = W$ (γιατί;).

Ασκηση 31. *(α′) Να προσδιοριστούν τα ιδεώδη τού ευθέος γινομένου $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

(β′) Να προσδιοριστούν τα ιδεώδη τού ευθέος γινομένου $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$.

(γ′) Να προσδιοριστούν τα ιδεώδη τού ευθέος γινομένου $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

Ασκηση 32. *Έστω ότι R, S είναι δύο δακτύλιοι και $R \times S$ το ευθύ γινόμενό τους. Να δειχθεί ότι το κέντρο τού ευθέος γινομένου $C(R \times S)$ ισούται με $C(R) \times C(S)$.*

2.3 Δακτύλιοι Πινάκων

Έστω ότι R είναι ένας δακτύλιος και $n \in \mathbb{N}$ ένας φυσικός αριθμός. Ένας $n \times n$ *πίνακας* με συνιστώσες από τον δακτύλιο R είναι μια απεικόνιση

$$\{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to R, \quad (i, j) \mapsto r_{ij}.$$

Συνήθως, η ανωτέρω απεικόνιση περιγράφεται με τη βοήθεια τού ακόλουθου σχήματος:

$$(r_{ij}) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n1} & r_{n2} & \ldots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

Η διατεταγμένη n άδα $(r_{11}, r_{22}, \ldots, r_{nn})$ ονομάζεται η *κύρια διαγώνιος* τού πίνακα (r_{ij}).

Η *πρόσθεση* και ο *πολλαπλασιασμός πινάκων* ορίζονται ως εξής:

$$(r_{ij}^{(1)}) + (r_{ij}^{(2)}) = (r_{ij}^{(1)}) + (r_{ij}^{(2)})$$

και

$$(r_{ij}^{(1)})(r_{ij}^{(2)}) = (r_{ij}^{(3)}), \quad \text{όπου } r_{ij}^{(3)} = \sum_{k=1}^{n} r_{ik}^{(1)} r_{kj}^{(2)}.$$

Αποδεικνύεται ότι το σύνολο των $n \times n$ πινάκων με συνιστώσες από τον δακτύλιο R εφοδιασμένο με τις προηγούμενες πράξεις αποτελεί έναν δακτύλιο. Η απόδειξη είναι ταυτόσημη με εκείνη που εκτελείται στη Γραμμική Άλγεβρα, όπου οι συνιστώσες των πινάκων προέρχονται από κάποιο σώμα.

Ο δακτύλιος των $n \times n$ πινάκων με συνιστώσες από τον δακτύλιο R παριστάνεται με $\mathbb{M}_n(R)$. Μερικές φορές ο $\mathbb{M}_n(R)$ ονομάζεται ο *δακτύλιος των* $n \times n$ *πινάκων υπεράνω τού δακτυλίου* R.

Το μηδενικό στοιχείο τού $\mathbb{M}_n(R)$ είναι το

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0_R & 0_R & \dots & 0_R \\ 0_R & 0_R & \dots & 0_R \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_R & 0_R & \dots & 0_R \end{pmatrix}$$

και το μοναδιαίο στοιχείο είναι το

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1_R & 0_R & \dots & 0_R \\ 0_R & 1_R & \dots & 0_R \\ & & \ddots & \\ 0_R & 0_R & \dots & 1_R \end{pmatrix}.$$

Η απεικόνιση

$$\alpha : R \to \mathbb{M}_n(R), \quad r \mapsto \alpha(r) = \begin{pmatrix} r & 0_R & \dots & 0_R \\ 0_R & r & \dots & 0_R \\ & & \ddots & \\ 0_R & 0_R & \dots & r \end{pmatrix}$$

αποτελεί έναν μονομορφισμό δακτυλίων.
Οι πίνακες $\alpha(r)$ ονομάζονται *βαθμωτοί πίνακες*. Δηλαδή, ένας πίνακας είναι βαθμωτός όταν όλα τα στοιχεία τής κύριας διαγωνίου του είναι ίσα με κάποιο στοιχείο τού R και όλα τα υπόλοιπα είναι ίσα με το 0_R.

Ασκηση 33. *Να δειχθεί ότι οι βαθμωτοί πίνακες* $\alpha(r)$*, όπου το* r *ανήκει στο κέντρο* $C(R)$ *τού* R *περιέχονται στο κέντρο* $C(\mathbb{M}_n(R))$ *τού δακτυλίου πινάκων.*

Οι βαθμωτοί πίνακες αποτελούν ειδική περίπτωση διαγώνιων πινάκων. Ένας πίνακας (r_{ij}) ονομάζεται *διαγώνιος*, όταν $r_{ij} = 0_R$, για κάθε (i,j) με $i \neq j$.

Κατά τη μελέτη των δακτυλίων πινάκων οι πίνακες τής μορφής

$$e_{\kappa\lambda} = (r_{ij}) = \begin{cases} r_{ij} = 0_R, & \text{αν } i \neq \kappa \text{ ή } j \neq \lambda, \\ r_{ij} = 1_R, & \text{αν } i = \kappa \text{ και } j = \lambda, \end{cases}$$

όπου $1 \leq \kappa \leq n, 1 \leq \lambda \leq n$, έχουν ιδιαίτερη σημασία και ονομάζονται *στοιχειώδεις πίνακες*. Ο πίνακας $e_{\kappa\lambda}$ ονομάζεται ο *στοιχειώδης* (κ, λ)*-πίνακας*.

Παρατήρηση 2.3.1. *(α′) Από τον ορισμό τής πράξης τού πολλαπλασιασμού πινάκων προκύπτει άμεσα ότι*

$$e_{\kappa\lambda}e_{\mu\nu} = \begin{cases} e_{\kappa\nu}, & \text{αν } \lambda = \mu, \\ \mathbf{0}, & \text{αν } \lambda \neq \mu. \end{cases}$$

(Ισοδύναμα, $e_{\kappa\lambda}e_{\mu\nu} = \delta_{\lambda\mu}e_{\kappa\nu}$, όπου $\delta_{\lambda\mu}$ είναι το σύμβολο τού Kronecker.)

(β′) Επομένως, κάθε πίνακας $(r_{ij}) \in \mathbb{M}_n(R)$ γράφεται στη μορφή $(r_{ij}) = \sum_{i,j} \alpha(r_{ij})e_{ij}$, όπου $\alpha(r_{ij})$ είναι ο βαθμωτός πίνακας, τού οποίου όλα τα στοιχεία τής κύριας διαγωνίου είναι ίσα με $r_{ij} \in R$.

(γ′) Τέλος, για κάθε πίνακα $(r_{ij}) \in \mathbb{M}_n(R)$ έχουμε: $e_{\kappa\lambda}(r_{ij})e_{\mu\nu} = \alpha(r_{\lambda\mu})e_{\kappa\nu}$. Πράγματι, από το (ii) γνωρίζουμε ότι $(r_{ij}) = \sum_{i,j} \alpha(r_{ij})e_{ij}$. Συνεπώς,

$$e_{\kappa\lambda}(r_{ij})e_{\mu\nu} = e_{\kappa\lambda}(\sum_{i,j} \alpha(r_{ij})e_{ij})e_{\mu\nu} = \sum_{i,j} \alpha(r_{ij})e_{\kappa\lambda}e_{ij}e_{\mu\nu} =$$
$$\alpha(r_{\lambda\mu})e_{\kappa\lambda}e_{\lambda\mu}e_{\mu\nu} = \alpha(r_{\lambda\mu})e_{\kappa\nu}.$$

Σημειώστε ότι δοθέντος τού πίνακα (r_{ij}), όλες οι συνιστώσες τού πίνακα $e_{\kappa\lambda}(r_{ij})e_{\mu\nu}$ ισούνται με το μηδενικό στοιχείο 0_R τού R με πιθανή εξαίρεση την (κ, ν) συνιστώσα, η οποία ισούται με την (λ, μ) συνιστώσα τού (r_{ij}), δηλαδή με στο στοιχείο $r_{\lambda\mu}$ τού R.

2.3.1 *Τα Ιδεώδη τού Δακτυλίου Πινάκων*

Με τη βοήθεια τής προηγούμενης παρατήρησης θα περιγράψουμε τώρα τα αμφίπλευρα ιδεώδη τού $\mathbb{M}_n(R)$.

Εάν K είναι ένα υποσύνολο τού $\mathbb{M}_n(R)$, τότε συμβολίζουμε με $\mathrm{Flat}(K)$ το ακόλουθο υποσύνολο τού R:

$$\mathrm{Flat}(K) = \{r \in R \mid \exists (r_{ij}) \in K \text{ με } r = r_{ij} \text{ για κάποιο ζεύγος } (i,j), 1 \leq i,j \leq n\}$$

και το αποκαλούμε *επιπέδωση* τού K. Με άλλα λόγια, η επιπέδωση $\mathrm{Flat}(K)$ τού K αποτελείται από τις συνιστώσες των πινάκων που ανήκουν στο K.

Εάν I είναι ένα υποσύνολο τού R, τότε συμβολίζουμε με $\mathbb{M}_n(I)$ το ακόλουθο υποσύνολο τού $\mathbb{M}_n(R)$:

$$\mathbb{M}_n(I) = \{(r_{ij}) \in \mathbb{M}_n(R) \mid r_{ij} \in I, \forall (i,j), 1 \leq i,j \leq n\}.$$

Με άλλα λόγια, το $\mathbb{M}_n(I)$ αποτελείται από τους πίνακες τού $\mathbb{M}_n(R)$, όλες οι συνιστώσες των οποίων προέρχονται από το σύνολο I.

Πρόταση 2.3.2. (i) *Εάν το* I *είναι ένα αμφίπλευρο ιδεώδες τού* R, *τότε το* $\mathbb{M}_n(I)$ *είναι ένα αμφίπλευρο ιδεώδες τού* $\mathbb{M}_n(R)$ *και* $\mathrm{Flat}(\mathbb{M}_n(I)) = I$.

(ii) *Εάν το* K *είναι ένα αμφίπλευρο ιδεώδες τού* $\mathbb{M}_n(R)$, *τότε το* $\mathrm{Flat}(K)$ *είναι ένα αμφίπλευρο ιδεώδες τού* R *και* $\mathbb{M}_n(\mathrm{Flat}(K)) = K$.

Απόδειξη (i) Η απόδειξη τού συγκεκριμένου ισχυρισμού είναι άμεση και γι' αυτό προτείνεται ως άσκηση.
(ii) Εάν $(r_{ij}) \in K$, τότε για κάθε $\kappa, \lambda, \mu, \nu$, $1 \leq \kappa, \lambda, \mu, \nu \leq n$, ο πίνακας $e_{\kappa\lambda}(r_{ij})e_{\mu\nu} = \alpha(r_{\lambda\mu})e_{\kappa\nu}$ ανήκει επίσης στο K, αφού το K είναι αμφίπλευρο ιδεώδες τού $\mathbb{M}_n(R)$. Εάν a και b είναι δύο στοιχεία τού $\mathrm{Flat}(K)$, τότε υπάρχουν δύο πίνακες $(r_{ij}^{(1)})$ και $(r_{ij}^{(2)})$ που ανήκουν στο K με $a = r_{st}^{(1)}$ και $b = r_{pq}^{(2)}$, όπου $1 \leq s, t, p, q \leq n$. Η διαφορά

$$e_{\kappa s}(r_{ij}^{(1)})e_{t\kappa} - e_{\kappa p}(r_{ij}^{(2)})e_{q\kappa} = \alpha(r_{st}^{(1)})e_{\kappa\kappa} - \alpha(r_{pq}^{(2)})e_{\kappa\kappa} = (\alpha(a) - \alpha(b))e_{\kappa\kappa}$$

ανήκει επίσης στο ιδεώδες K. Πρόκειται για τον πίνακα τού K, η (κ, κ) συνιστώσα τού οποίου ισούται με $a - b$. Άρα, $a - b \in \mathrm{Flat}(K)$. Η απόδειξη ότι το σύνολο $\mathrm{Flat}(K)$ είναι κλειστό ως προς τον από αριστερά (αντιστοίχως δεξιά) πολλαπλασιασμό με τα στοιχεία τού R είναι παρόμοια με την ανωτέρω απόδειξη και γι' αυτό προτείνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.
Υπολείπεται η απόδειξη ότι $\mathbb{M}_n(\mathrm{Flat}(K)) = K$. Προφανώς, $K \subseteq \mathbb{M}_n(\mathrm{Flat}(K))$. Έστω $(r_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathrm{Flat}(K))$, τότε $(r_{ij}) = \sum_{\kappa,\lambda=1}^{n} \alpha(r_{\kappa\lambda})e_{\kappa\lambda}$. Εάν δείξουμε ότι για κάθε κ, λ, $1 \leq \kappa, \lambda \leq n$, οι πίνακες $\alpha(r_{\kappa\lambda})e_{\kappa\lambda}$ ανήκουν στο K, τότε και το άθροισμά τους (r_{ij}) θα ανήκει στο K, αφού το K είναι ιδεώδες. Πράγματι, για κάθε κ, λ, $1 \leq \kappa, \lambda \leq n$ έχουμε ότι υπάρχει κάποιος πίνακας $(k_{ij}) \in K$, που εξαρτάται από τα κ, λ, με $k_{\rho\sigma} = r_{\kappa\lambda}$· επειδή όμως το K είναι ένα αμφίπλευρο ιδεώδες τού $\mathbb{M}_n(R)$ έπεται ότι και το $e_{\kappa\rho}(k_{ij})e_{\sigma\lambda} = \alpha(k_{\rho\sigma})e_{\kappa\lambda} = \alpha(r_{\kappa\lambda})e_{\kappa\lambda}$ είναι επίσης στοιχείο τού K. Ώστε κάθε $(r_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathrm{Flat}(K))$ ανήκει στο K και γι' αυτό $\mathbb{M}_n(\mathrm{Flat}(K)) = K$. ♦

Πόρισμα 2.3.3. *Εάν* D *είναι ένας διαιρετικός δακτύλιος, τότε για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *τα μόνα αμφίπλευρα ιδεώδη τού δακτυλίου πινάκων* $\mathbb{M}_n(D)$ *είναι τα τετριμμένα ιδεώδη* $\{\mathbf{0}\}$ *και* $\mathbb{M}_n(D)$.

Ασκηση 34. *Να προσδιοριστούν όλα τα αμφίπλευρα ιδεώδη τού δακτυλίου* $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$, *τού δακτυλίου* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R} \times \mathbb{C})$ *και τού δακτυλίου* $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z} \times \mathbb{C})$.

Παρατήρηση 2.3.4. *Σημειώστε ότι, όταν ο* R *δεν είναι ο μηδενικός δακτύλιος, τότε ο* $\mathbb{M}_n(R)$, $n \geq 2$ *διαθέτει πάντοτε αριστερά ή δεξιά μη τετριμμένα ιδεώδη.*
Επί παραδείγματι, τα σύνολα:

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid a, c \in R \right\} \textit{ και } I_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid b, d \in R \right\}$$

είναι αριστερά ιδεώδη τού $\mathbb{M}_2(R)$ *και τα σύνολα*

$$J_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in R \right\} \textit{ και } J_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \mid c, d \in R \right\}$$

είναι δεξιά ιδεώδη τού $\mathbb{M}_2(R)$.

Ορισμός 2.3.5. *Ένας δακτύλιος* R *ονομάζεται απλός, εάν δεν είναι ο μηδενοδακτύλιος και εάν δεν διαθέτει άλλα αμφίπλευρα ιδεώδη εκτός από τα* $\{0_R\}$ *και* R.

Παρατήρηση 2.3.6.

(α′) *Σύμφωνα με τον ανωτέρω ορισμό, ένας δακτύλιος πινάκων* $\mathbb{M}_n(R)$ *είναι απλός, αν και μόνο αν ο υποκείμενος δακτύλιος* R *είναι απλός. Ειδικότερα, οι δακτύλιοι πινάκων με συνιστώσες από ένα διαιρετικό δακτύλιο ή από ένα σώμα είναι απλοί δακτύλιοι.*

(β′) *Αργότερα θα δούμε το αντίστροφο τού (i), δηλαδή ότι κάθε απλός δακτύλιος που ικανοποιεί μια επιπλέον συνθήκη είναι ισόμορφος με έναν δακτύλιο πινάκων με συνιστώσες από έναν διαιρετικό δακτύλιο.*

2.3.2 *Υποδακτύλιοι τού Δακτυλίου Πινάκων*

Στην παρούσα ενότητα θα γνωρίσουμε κάποιους υποδακτυλίους πινάκων· ορισμένους από αυτούς θα τους συναντήσουμε και αργότερα. Αρχίζουμε με το κέντρο τού $\mathbb{M}_n(R)$.

Το Κέντρο τού Δακτυλίου Πινάκων

Πρόταση 2.3.7. *Το κέντρο* $C(\mathbb{M}_n(R))$ *τού δακτυλίου πινάκων* $\mathbb{M}_n(R)$ *ισούται με το σύνολο των βαθμωτών πινάκων* $\{\alpha(r) \mid r \in C(R)\}$.

Απόδειξη Από την Άσκηση 33 γνωρίζουμε ότι κάθε βαθμωτός πίνακας $\alpha(r), r \in C(R)$ περιέχεται στο κέντρο τού δακτυλίου πινάκων. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι κάθε πίνακας που ανήκει στο κέντρο τού δακτυλίου πινάκων είναι βαθμωτός. Εάν λοιπόν $(r_{ij}) \in C(\mathbb{M}_n(R))$, τότε για οποιουσδήποτε δύο στοιχειώδεις πίνακες $e_{\kappa\lambda}$ και$e_{\mu\nu}$ έχουμε $e_{\kappa\lambda}(r_{ij})e_{\mu\nu} = (r_{ij})e_{\kappa\lambda}e_{\mu\nu}$. Από την Παρατήρηση 2.3.1 (iii) γνωρίζουμε ότι $e_{\kappa\lambda}(r_{ij})e_{\mu\nu} = \alpha(r_{\lambda\mu})e_{\kappa\nu}$. Εάν $\lambda \neq \mu$, τότε ο πίνακας $e_{\kappa\lambda}e_{\mu\nu}$ είναι ο μηδενικός και γι' αυτό από τις προηγούμενες δύο ισότητες προκύπτει ότι για κάθε (λ, μ) με $\lambda \neq \mu$ έχουμε $r_{\lambda\mu} = 0_R$. Επομένως, ο (r_{ij}) είναι ένας διαγώνιος πίνακας. Για οποιονδήποτε στοιχειώδη πίνακα $e_{\mu\nu}$, το γινόμενο $e_{\mu\nu}(r_{ij})$ είναι ένας πίνακας που η (μ, ν) συνιστώσα του ισούται με $r_{\nu\nu}$ και το γινόμενο $(r_{ij})e_{\mu\nu}$ είναι ένας πίνακας που η (μ, ν) συνιστώσα του ισούται με $r_{\mu\mu}$. Συνεπώς, $r_{\mu\mu} = r_{\nu\nu}$, αφού $(r_{ij}) \in C(\mathbb{M}_n(R))$. Η τελευταία ισότητα είναι αληθής για οποιοδήποτε ζεύγος δεικτών $(\mu, \nu), 1 \leq \mu, \nu \leq n$. Ώστε ο (r_{ij}) είναι ένας βαθμωτός πίνακας $\alpha(r)$. Εάν s είναι οποιοδήποτε στοιχείο τού R, τότε $\alpha(r)\alpha(s) = \alpha(s)\alpha(r)$. Συνεπώς $rs = sr$ και γι' αυτό το r ανήκει στο κέντρο $C(R)$ τού R. ♦

Από την προηγούμενη πρόταση έπεται αμέσως ότι για $n \geq 2$, ο $\mathbb{M}_n(R)$ είναι μεταθετικός εάν και μόνο εάν ο δακτύλιος R είναι ο μηδενικός δακτύλιος.

Κατά την απόδειξη τής Πρότασης 2.3.7 χρησιμοποιήσαμε ουσιωδώς ιδιότητες των στοιχειωδών πινάκων. Στις αμέσως επόμενες γραμμές θα διαπιστώσουμε ότι, εάν ένας δακτύλιος διαθέτει ορισμένα στοιχεία που έχουν ιδιότητες ανάλογες των ιδιοτήτων των στοιχειωδών πινάκων, τότε είναι ισόμορφος με έναν δακτύλιο πινάκων.

Ορισμός 2.3.8. *Ένα υποσύνολο* $E = \{\epsilon_{ij} \in R \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ *ενός δακτυλίου* R *αποτελούμενο από* n^2 *το πλήθος στοιχεία ονομάζεται στοιχειώδες σύνολο, εάν* $\sum_{i=1}^{n} \epsilon_{ii} = 1_R$ *και* $\epsilon_{\kappa\lambda}\epsilon_{\mu\nu} = \delta_{\lambda\mu}\epsilon_{\kappa\nu}$, *για κάθε* $\kappa, \lambda, \mu, \nu$.

Θεώρημα 2.3.9. *Ένας δακτύλιος* S *διαθέτει ένα στοιχειώδες σύνολο* $E = \{\epsilon_{ij} \in S \mid 1 \leq i,j \leq n\}$ *αποτελούμενο από* n^2 *το πλήθος στοιχεία, εάν και μόνο εάν* $S \cong \mathbb{M}_n(R)$ *για κάποιον κατάλληλο δακτύλιο* R.

Απόδειξη «$\Leftarrow$» Το σύνολο $\{e_{ij}\}$ των στοιχειωδών πινάκων ενός δακτυλίου πινάκων είναι στοιχειώδες σύνολο.
«$\Rightarrow$» Έστω ότι ο δακτύλιος S διαθέτει ένα στοιχειώδες σύνολο $E = \{\epsilon_{ij} \in S \mid 1 \leq i,j \leq n\}$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $R = \{\sum_{i=1}^{n} \epsilon_{i1} a \epsilon_{1i} \mid a \in S\}$ είναι ένας υποδακτύλιος τού S. Η διαφορά δύο στοιχείων τού R ανήκει στον R, αφού $\sum_{i=1}^{n} \epsilon_{i1} a \epsilon_{1i} - \sum_{i=1}^{n} \epsilon_{i1} b \epsilon_{1i} = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_{i1}(a-b)\epsilon_{1i}$. Συνεπώς, ο R αποτελεί μια υποομάδα τού S. Το 1_S ανήκει στον R, αφού $\sum_{i=1}^{n} \epsilon_{ii} = 1_S$.
Τέλος, το γινόμενο οποιωνδήποτε δύο στοιχείων τού R ανήκει στον R, αφού
$(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_{i1} a \epsilon_{1i})(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_{i1} b \epsilon_{1i}) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_{i1}(a\epsilon_{11}b)\epsilon_{1i}$.
Τώρα θα κατασκευάσουμε έναν ισομορφισμό δακτυλίων $\varphi : S \to \mathbb{M}_n(R)$.
Δοθέντος $a \in S$, θεωρούμε τα n^2 το πλήθος στοιχεία $r_{\kappa\lambda} = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_{i\kappa} a \epsilon_{\lambda i} = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_{i1}(\epsilon_{1\kappa} a \epsilon_{\lambda 1})\epsilon_{1i}$, $1 \leq \kappa, \lambda \leq n$ και ορίζουμε την απεικόνιση:

$$\varphi : S \to \mathbb{M}_n(R), \quad a \mapsto (r_{\kappa\lambda})$$

Προφανώς, η φ αποτελεί έναν ομομορφισμό των υποκείμενων αβελιανών ομάδων. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $r_{\kappa\lambda}\epsilon_{\kappa\lambda} = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_{i\kappa} a \epsilon_{\lambda i} \epsilon_{\kappa\lambda}$ και επειδή $\epsilon_{\lambda i}\epsilon_{\kappa\lambda} = \delta_{i\kappa}\epsilon_{\lambda\lambda}$, έπεται ότι $r_{\kappa\lambda}\epsilon_{\kappa\lambda} = \epsilon_{\kappa\kappa} a \epsilon_{\lambda\lambda}$. Άρα,

$$a = (1_S)a(1_S) = \left(\sum_{\kappa=1}^{n} \epsilon_{\kappa\kappa}\right) a \left(\sum_{\lambda=1}^{n} \epsilon_{\lambda\lambda}\right) = \sum_{\kappa,\lambda=1}^{n} \epsilon_{\kappa\kappa} a \epsilon_{\lambda\lambda} = \sum_{\kappa,\lambda=1}^{n} r_{\kappa\lambda}\epsilon_{\kappa\lambda}. \quad (2.1)$$

Επομένως, $\varphi(a) = \mathbf{0}$, αν και μόνο αν $r_{\kappa\lambda} = 0_S, \forall \kappa, \lambda, 1 \leq \kappa, \lambda \leq n$, αν και μόνο αν $a = 0_S$· έτσι διαπιστώνουμε ότι ο φ είναι ένας ενριπτικός ομομορφισμός ομάδων. Τώρα θα δείξουμε ότι ο φ είναι επιμορφισμός. Πράγματι, από τη σχέση (2.1) βλέπουμε ότι αν $(r_{\kappa\lambda})$ είναι στοιχείο τού $\mathbb{M}_n(R)$, τότε αυτό ισούται με $\varphi\left(\sum_{\kappa,\lambda=1}^{n} r_{\kappa\lambda}\epsilon_{\kappa\lambda}\right)$.
Υπολείπεται η απόδειξη ότι $\forall a, b \in S$ οι πίνακες $\varphi(ab)$ και $\varphi(a)\varphi(b)$ είναι ίσοι. Προς τούτο είναι επαρκές να ελέγξουμε, $\forall \kappa, \lambda$, την ισότητα των (κ, λ) συνιστωσών των δύο πινάκων. Έστω ότι $\varphi(a) = (r_{ij})$ και $\varphi(b) = (q_{ij})$. Η (κ, λ) συνιστώσα τού $\varphi(a)\varphi(b)$ ισούται με

$$\sum_{j=1}^{n} r_{\kappa j} q_{j\lambda} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_{i\kappa} a \epsilon_{ji}\right)\left(\sum_{h=1}^{n} \epsilon_{hj} b \epsilon_{\lambda h}\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i,h=1}^{n} \epsilon_{i\kappa} a \epsilon_{ji} \epsilon_{hj} b \epsilon_{\lambda h}\right) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_{i\kappa} a \epsilon_{ji} \epsilon_{ij} b \epsilon_{\lambda i}\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_{i\kappa} a \epsilon_{jj} b \epsilon_{\lambda i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\epsilon_{i\kappa} a \left(\sum_{j=1}^{n} \epsilon_{jj}\right) b \epsilon_{\lambda i}\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \epsilon_{i\kappa} a b \epsilon_{\lambda i}.$$

Ο τελευταίος όρος τής ανωτέρω ακολουθίας ισοτήτων είναι ακριβώς η (κ, λ) συνιστώσα τού $\varphi(ab)$. ♦

Άλλοι Υποδακτύλιοι τού $\mathbb{M}_n(R)$

(α′) Ο *δακτύλιος των βαθμωτών πινάκων* τού $\mathbb{M}_n(R)$, οποίος ως γνωστόν είναι ισόμορφος με τον R.

(β′) Ο *δακτύλιος των διαγώνιων πινάκων* τού $\mathbb{M}_n(R)$, που αποτελείται από τους πίνακες των οποίων όλες οι (i, j) συνιστώσες είναι ίσες με 0_R, όταν $i \neq j$. Ο συγκεκριμένος δακτύλιος είναι ισόμορφος με το ευθύ γινόμενο n αντιγράφων τού R, δηλαδή με τον δακτύλιο $R \times R \cdots \times R$, n-φορές, (*γιατί;*).

(γ′) Ο *δακτύλιος των άνω τριγωνικών πινάκων* τού $\mathbb{M}_n(R)$, που αποτελείται από τους πίνακες των οποίων όλες οι (i, j) συνιστώσες είναι ίσες με 0_R, όταν $i \leq j$.

Παρατήρηση 2.3.10. *Σημειώστε ότι οι υποδακτύλιοι τού $\mathbb{M}_n(R)$ μπορεί να έχουν μη τετριμμένα αμφίπλευρα ιδεώδη, ακόμη και στην περίπτωση που ο $\mathbb{M}_n(R)$ δεν έχει, βλέπε Πρόταση 2.3.2.*
Επί παραδείγματι, ο $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ δεν έχει μη τετριμμένα αμφίπλευρα ιδεώδη, ενώ ο υποδακτύλιος των άνω τριγωνικών πινάκων, δηλαδή ο $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$, διαθέτει το αμφίπλευρο ιδεώδες $N = \left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R}\right\}$.

Επομένως, υποδακτύλιοι απλών δακτυλίων δεν είναι απαραιτήτως απλοί δακτύλιοι.

2.3.3 *Ο Δακτύλιος Τετρανίων Hamilton*

Το υποσύνολο

$$\mathbb{H} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}\right\} \text{ τού } \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$$

ονομάζεται το *σύνολο τετρανίων Hamilton* εδώ συμβολίζουμε με $\overline{z}$ τον συζυγή τού μιγαδικού αριθμού $z \in \mathbb{C}$.

Το σύνολο $\mathbb{H}$ αποτελεί έναν υποδακτύλιο τού $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ (*γιατί;*), ο οποίος δεν είναι μεταθετικός (*γιατί;*).
Θα αποδείξουμε ότι πρόκειται για διαιρετικό δακτύλιο, δηλαδή ότι κάθε μη μηδενικό στοιχείο τού $\mathbb{H}$ διαθέτει αντίστροφο.

Έστω $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$ ένα μη μηδενικό στοιχείο τού $\mathbb{H}$. Η ορίζουσα $\det(A)$ τού A ισούται με $a\overline{a} + b\overline{b} = |a|^2 + |b|^2$. Πρόκειται για έναν πραγματικό αριθμό και γι' αυτό, εάν ήταν $|a|^2 + |b|^2 = 0$, τότε θα είχαμε $|a| = |b| = 0$ και συνεπώς $a = 0$, $b = 0$. Επειδή όμως το $A \neq \mathbf{0}$, έχουμε $\det(A) \neq 0$. Επομένως, ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} \det(A)^{-1}\overline{a} & -\det(A)^{-1}b \\ \det(A)^{-1}\overline{b} & \det(A)^{-1}a \end{pmatrix}$ τού $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ υπάρχει και είναι ο αντίστροφος τού A. Επειδή ο $\det(A)$ είναι πραγματικός αριθμός, έχουμε $\overline{\det(A)^{-1}\overline{a}} = \det(A)^{-1}a$ και $-\overline{\det(A)^{-1}b} = -\det(A)^{-1}\overline{b}$. Άρα, ο αντίστροφος B τού A ανήκει στο $\mathbb{H}$.

Επομένως, ο δακτύλιος $\mathbb{H}$ είναι ένας διαιρετικός δακτύλιος, ο οποίος δεν είναι σώμα, αφού ο πολλαπλασιασμός δεν είναι μεταθετικός.

Παρατήρηση 2.3.11. *Ο δακτύλιος $\mathbb{H}$ είναι ένας τετραδιάστατος διανυσματικός χώρος υπεράνω τού σώματος των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.*
Πράγματι, η απεικόνιση

$$\cdot : \mathbb{H} \times \mathbb{R} \to \mathbb{H}, \quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, r \right) \mapsto \begin{pmatrix} ar & br \\ -\overline{b}r & \overline{a}r \end{pmatrix}$$

ορίζει έναν βαθμωτό πολλαπλασιασμό των στοιχείων τού $\mathbb{R}$ με τα στοιχεία τού $\mathbb{H}$ μέσω τού οποίου ο $\mathbb{H}$ αποκτά τη δομή ενός διανυσματικού χώρου. Οι ακόλουθοι τέσσερεις πίνακες

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \ \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ \textit{και} \ \ \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

είναι $\mathbb{R}$ γραμμικώς ανεξάρτητοι (γιατί;) και αποτελούν ένα σύστημα γεννητόρων τού $\mathbb{H}$ υπεράνω τού $\mathbb{R}$, αφού κάθε στοιχείο $\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$ τού $\mathbb{H}$, όπου τα $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, ισούται με $a \cdot \mathbf{1} + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k}$.

	$\mathbf{1}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{1}$	$-\mathbf{i}$	$-\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{1}$	$-\mathbf{i}$	$-\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$	$-\mathbf{1}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{1}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$-\mathbf{1}$	$\mathbf{i}$	$-\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$	$\mathbf{1}$	$-\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$-\mathbf{1}$	$-\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{1}$
$-\mathbf{1}$	$-\mathbf{1}$	$-\mathbf{i}$	$-\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$-\mathbf{i}$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{1}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{i}$	$-\mathbf{1}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$-\mathbf{j}$	$-\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$	$\mathbf{1}$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$-\mathbf{1}$	$\mathbf{i}$
$-\mathbf{k}$	$-\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$-\mathbf{1}$

Σχήμα 2.1: Ο πίνακας πράξης τής ομάδας τετρανίων Hamilton

Η Ομάδα Τετρανίων Hamilton

Το σύνολο $\{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{i}, -\mathbf{i}, \mathbf{j}, -\mathbf{j}, \mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$ εφοδιασμένο με την πράξη τού πολλαπλασιασμού τού $\mathbb{H}$, βλέπε 2.1, αποτελεί τη λεγόμενη *ομάδα τετρανίων Hamilton*.
Σημειώστε ότι τα γινόμενα στοιχείων τού $\mathbb{H}$ μπορούν να υπολογιστούν με τη βοήθεια τού ανωτέρω πίνακα, των επιμεριστικών κανόνων και των πράξεων τού $\mathbb{R}$.

Επί παραδείγματι,

$$
\begin{aligned}
&(5\cdot\mathbf{1}-2\cdot\mathbf{i}+3\cdot\mathbf{j}-\mathbf{k})(-\mathbf{1}+3\cdot\mathbf{i}-5\cdot\mathbf{j}+2\cdot\mathbf{k})=\\
&(-5\cdot\mathbf{1}+15\cdot\mathbf{i}-25\cdot\mathbf{j}+10\cdot\mathbf{k})+(2\cdot\mathbf{i}-6\cdot\mathbf{i}^2+10\cdot\mathbf{ij}-4\cdot\mathbf{ik})+\\
&(-3\cdot\mathbf{j}+9\cdot\mathbf{ji}-15\cdot\mathbf{j}^2+6\cdot\mathbf{jk})+(\mathbf{k}-3\cdot\mathbf{ki}+5\cdot\mathbf{kj}-2\cdot\mathbf{k}^2)=\\
&-5\cdot\mathbf{1}+15\cdot\mathbf{i}-25\cdot\mathbf{j}+10\cdot\mathbf{k}+2\cdot\mathbf{i}+6\cdot\mathbf{1}+10\cdot\mathbf{k}+4\cdot\mathbf{j}-3\cdot\mathbf{j}\\
&-9\cdot\mathbf{k}+15\cdot\mathbf{1}+6\cdot\mathbf{i}+\mathbf{k}-3\cdot\mathbf{j}-5\cdot\mathbf{i}+2\cdot\mathbf{1}=\\
&18\cdot\mathbf{1}+18\cdot\mathbf{i}-27\cdot\mathbf{j}+12\cdot\mathbf{k}.
\end{aligned}
$$

Ασκηση 35. *Να δειχθεί ότι το κέντρο* $C(\mathbb{H})$ *τού* $\mathbb{H}$ *ισούται με*

$$\left\{\begin{pmatrix} r & 0\\ 0 & r\end{pmatrix} \mid r\in\mathbb{R}\right\}$$

και ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός δακτυλίων μεταξύ τού $\mathbb{R}$ *και τού* $C(\mathbb{H})$.

Ασκηση 36. *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση*

$$\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{H},\ \ \alpha+\beta i\ \mapsto \alpha\cdot\mathbf{1}+\beta\cdot\mathbf{i}$$

αποτελεί έναν ενριπτικό ομομορφισμό δακτυλίων.
(Σημειώστε ότι η εικόνα τού $\mathbb{C}$ *δεν περιέχεται στο* $C(\mathbb{H})$*, μολονότι είναι ένας μεταθετικός υποδακτύλιος τού* $\mathbb{H}$*.)*

Ασκηση 37. *Να δειχθεί ότι το στοιχείο* $w=a\cdot\mathbf{1}+b\cdot\mathbf{i}+c\cdot\mathbf{j}+d\cdot\mathbf{k}$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ *τού* $\mathbb{H}$ *έχει την ιδιότητα* $w^2=-1$*, αν και μόνο αν* $a=0$ *και* $b^2+c^2+d^2=1$.
(Συνεπώς, το πολυώνυμο x^2+1 *διαθέτει άπειρες το πλήθος θέσεις μηδενισμού στον δακτύλιο* $\mathbb{H}$*.)*

Παρατήρηση 2.3.12. *Στον ορισμό τού δακτυλίου τετρανίων Hamilton είναι δυνατόν να αντικαταστήσουμε το σώμα* $\mathbb{R}$ *με κάποιο άλλο σώμα ή ακόμη και με έναν δακτύλιο που δεν είναι απαραιτήτως σώμα. Έτσι έχουμε τον δακτύλιο των ρητών τετρανίων*

$$\{a\cdot\mathbf{1}+b\cdot\mathbf{i}+c\cdot\mathbf{j}+d\cdot\mathbf{k}\mid a,b,c,d\in\mathbb{Q}\},$$

που είναι επίσης διαιρετικός δακτύλιος καθώς επίσης και τον δακτύλιο των ακέραιων τετρανίων

$$\{a\cdot\mathbf{1}+b\cdot\mathbf{i}+c\cdot\mathbf{j}+d\cdot\mathbf{k}\mid a,b,c,d\in\mathbb{Z}\}.$$

Ο τελευταίος δεν είναι διαιρετικός δακτύλιος.

Ασκηση 38. *Να δειχθεί ότι η ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων τού δακτύλιου των ακέραιων τετρανίων συμπίπτει με την ομάδα τετρανίων Hamilton.*

2.3.4 *Ο αντικείμενος Δακτύλιος*

Εάν R είναι ένας δακτύλιος, τότε ο *αντικείμενος δακτύλιος* είναι ένας δακτύλιος που ταυτίζεται με τον R ως αβελιανή ομάδα και όπου η πολλαπλασιαστική του δομή ορίζεται ως ακολούθως:

$$\star : R \times R \to R, (a, b) \mapsto a \star b := b \cdot a$$

Ο αντικείμενος τού R δακτύλιος παριστάνεται με R^{op} και συμπίπτει με τον δακτύλιο R, όταν ο R είναι μεταθετικός.

2.4 Ταυτοδύναμα Στοιχεία

Στο ευθύ γινόμενο δύο δακτυλίων $R \times S$, είδαμε ότι τα στοιχεία $(1_R, 0_S)$ και $(0_R, 1_S)$ έχουν ιδιαίτερη σημασία· το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση των δακτυλίων πινάκων, όπου οι στοιχειώδεις πίνακες e_{ij} συμβάλλουν ουσιωδώς στην εξαγωγή συμπερασμάτων. Τα συγκεκριμένα στοιχεία των ανωτέρω δακτυλίων διαθέτουν ορισμένες κοινές ιδιότητες που θα κωδικοποιήσουμε στις ακόλουθες παραγράφους.

Ορισμός 2.4.1. *Ένα στοιχείο* e *ενός δακτυλίου* R *ονομάζεται ταυτοδύναμο, εάν* $e^2 = e$.

Τα 0_R και 1_R οποιουδήποτε δακτυλίου R είναι ταυτοδύναμα και ονομάζονται τα *προφανή ταυτοδύναμα στοιχεία.*

Ορισμός 2.4.2. *Δύο στοιχεία* e *και* e' *ενός δακτυλίου* R *ονομάζονται ορθογώνια, εάν* $ee' = e'e = 0_R$.

Εάν e είναι ταυτοδύναμο στοιχείο ενός δακτυλίου R, τότε το $1_R - e$ είναι ταυτοδύναμο και τα e και $1_R - e$ είναι ορθογώνια στοιχεία.

Ασκηση 39. *Να δειχθεί ότι αν* e_1 *και* e_2 *είναι δύο ταυτοδύναμα και ορθογώνια στοιχεία, τότε το αριστερό ιδεώδες* $R(e_1 + e_2)$ *ισούται με άθροισμα* $Re_1 + Re_2$ *των αριστερών ιδεωδών* Re_1 *και* Re_2.

Παράδειγμα 2.4.3. *Οι στοιχειώδεις πίνακες* $e_{ii}, 1 \leq i \leq n$ *αποτελούν ένα σύνολο ταυτοδύναμων και ανά δύο ορθογώνιων στοιχείων τού δακτυλίου* $\mathbb{M}_n(R)$ *των* $n \times n$ *πινάκων με συνιστώσες από έναν δακτύλιο* R.

Λήμμα 2.4.4. *Έστω ότι* e *είναι ένα ταυτοδύναμο στοιχείο τού δακτυλίου* R.

(i) *Εάν* L *είναι ένα αριστερό ιδεώδες τού* R, *τότε* $L \cap eR = eL$.

(ii) *Εάν* I *είναι ένα αμφίπλευρο ιδεώδες τού* R, *τότε* $I \cap eRe = eIe$.

Απόδειξη (i) Προφανώς, $eL \subseteq L \cap eR$. Εάν $\ell \in L \cap eR$, τότε $\ell = er = e^2r = e\ell$. Συνεπώς, $\ell \in eL$.
(ii) Η απόδειξη είναι αντίστοιχη τού (i). ♦

Πρόταση 2.4.5. *Έστω ότι* e *είναι ένα ταυτοδύναμο στοιχείο τού δακτυλίου* R.

(i) *Το σύνολο* $eRe = \{ere \mid r \in R\}$ *είναι ένας δακτύλιος με πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού τις επαγόμενες από τις αντίστοιχες πράξεις τού* R. *Το μοναδιαίο στοιχείο τού* eRe *είναι το* e.

(ii) *Η αντιστοιχία*

$$\psi : \{\text{αμφίπλευρα Ιδεώδη τού } R\} \longrightarrow \{\text{αμφίπλευρα Ιδεώδη τού } eRe\},$$
$$\text{όπου } I \mapsto eIe$$

αποτελεί μια επιρριπτική απεικόνιση, η οποία διατηρεί τη σχέση τού υποσυνόλου, δηλαδή αν $I \subseteq J$, *τότε* $\psi(I) \subseteq \psi(J)$.

Απόδειξη (i) Το σύνολο eRe είναι μια προσθετική υποομάδα τού R, αφού για κάθε $ere, er'e \in eRe$, η διαφορά $ere - er'e = e(r - r')e$ ανήκει και πάλι στο eRe. Το eRe είναι επίσης κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό τού R, αφού για κάθε $ere, er'e \in eRe$, το γινόμενο $(ere)(er'e) = e(rer')e$ είναι και πάλι στοιχείο τού eRe. Η προσεταιριστικότητα τού πολλαπλασιασμού και η επιμεριστική συμπεριφορά του ως προς την πρόσθεση δεν απαιτούν έλεγχο, αφού οι ιδιότητες αυτές ισχύουν σε ολόκληρο τον δακτύλιο R. Τέλος, όσον αφορά το μοναδιαίο στοιχείο, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το $e \in eRe$ και ότι $e(ere) = ere = (ere)e, \forall r \in R$.
(ii) Σύμφωνα με το Λήμμα 2.4.4 (ii), η ψ απεικονίζει τα αμφίπλευρα ιδεώδη τού R σε αμφίπλευρα ιδεώδη τού eRe. Αφού, εάν το I είναι ένα αμφίπλευρο ιδεώδες τού eRe, τότε $I = (eRe)I(eRe) = eRIRe$ και γι' αυτό $\psi(RIR) = I$· άρα η ψ είναι επιρριπτική. Τέλος, εάν $I \subseteq J$, τότε $eIe = I \cap eRe \subseteq J \cap eRe = eJe$, δηλαδή $\psi(I) \subseteq \psi(J)$. ♦

Παρατήρηση 2.4.6. *Ο δακτύλιος* eRe *δεν είναι υποδακτύλιος τού* R, *όταν* $e \neq 1$, *αφού στην περίπτωση αυτή τα μοναδιαία στοιχεία των δύο δακτυλίων είναι διαφορετικά.*

Τα στοιχεία ενός πεπερασμένου υποσυνόλου $\{e_i \in R \mid 1 \leq i \leq n\}$ ενός δακτυλίου R ονομάζονται *ανά δύο ορθογώνια*, αν $\forall i, 1 \leq i, j \leq n, i \neq j, e_i e_j = 0_R = e_j e_i$.

Ορισμός 2.4.7. *Ένα υποσύνολο* $\{e_i \in R \mid 1 \leq i \leq n\}$ *τού* R *που αποτελείται από ταυτοδύναμα και ανά δύο ορθογώνια στοιχεία τού* R *ορίζει μια διάσπαση τής μονάδος τού* R, *εάν* $1_R = \sum_{i=1}^{n} e_i$.

Προφανώς, εάν $e \in R$ είναι ένα ταυτοδύναμο στοιχείο, τότε το σύνολο $\{e, 1 - e\}$ ορίζει πάντοτε μια διάσπαση τής μονάδος. Θα δούμε τώρα τι συμβαίνει όταν τα στοιχεία που ορίζουν τη διάσπαση τής μονάδος περιέχονται στο κέντρο τού δακτυλίου.

Πρόταση 2.4.8. *Ένας δακτύλιος* R *είναι ισόμορφος με ένα ευθύ γινόμενο δακτυλίων* $R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$, *αν και μόνο αν ο* R *διαθέτει ένα πεπερασμένο σύνολο στοιχείων* $\{e_i \in R \mid 1 \leq i \leq n\}$ *που ορίζουν μια διάσπαση τής μονάδος τού* R *και περιέχονται στο κέντρο* $C(R)$ *τού* R.

Απόδειξη «$\Rightarrow$» Έστω $\varphi : R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n \to R$ ο ισομορφισμός δακτυλίων και $e_i = \varphi((0_{R_1}, \ldots, 1_{R_i}, \ldots, 0_{R_n})), 1 \leq i \leq n$, η εικόνα εκείνου τού στοιχείου τού ευθέος γινομένου, τού οποίου κάθε συνιστώσα ισούται με το αντίστοιχο μηδενικό στοιχείο 0_{R_j} τού

R_j με εξαίρεση την i οστή συνιστώσα που ισούται με 1_{R_i}. Τα στοιχεία $e_i, 1 \leq i \leq n$, είναι ταυτοδύναμα, ανά δύο ορθογώνια, ανήκουν στο κέντρο και $\sum_{i=1}^{n} e_i = 1_R$, επειδή τα αντίστοιχα στοιχεία $(0_{R_1}, \ldots, 1_{R_i}, \ldots, 0_{R_n})$ τού ευθέος γινομένου διαθέτουν τις ιδιότητες αυτές.
«$\Leftarrow$» Το σύνολο $Re_i, 1 \leq i \leq n$, αποτελεί έναν υποδακτύλιο τού R με μοναδιαίο στοιχείο το e_i, αφού πρόκειται για αριστερό ιδεώδες και $(r_1 e_i)(r_2 e_i) = r_1 r_2 e_i^2 = (r_1 r_2)e_i, \forall r_1, r_2 \in R$, επειδή $e_i \in C(R)$.
Έστω $\psi : R \to Re_1 \times Re_2 \times \cdots \times Re_n$, η απεικόνιση που ορίζεται ως $r \mapsto (re_1, re_2, \ldots, re_n)$. Η ψ είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων (*γιατί;*). Θα αποδείξουμε ότι πρόκειται για έναν ενριπτικό και επιρριπτικό ομομορφισμό, δηλαδή για έναν ισομορφισμό.
Εάν $\psi(r) = \psi(r')$, τότε $re_i = r'e_i, \forall i, 1 \leq i \leq n$ και επειδή $\forall r \in R$ έχουμε $r = r1_R = r\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} re_i$, έπεται $r = r'$. Συνεπώς, ο ψ είναι ενριπτικός.
Έστω $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in Re_1 \times Re_2 \times \cdots \times Re_n$. Για κάθε $i, 1 \leq i \leq n$, έχουμε $r_i e_i = r_i$, αφού το e_i είναι το μοναδιαίο στοιχείο τού Re_i. Η εικόνα τού στοιχείου $r = \sum_{i=1}^{n} r_i e_i$ είναι η $\psi(r) = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i e_i e_1, \sum_{i=1}^{n} r_i e_i e_2, \ldots, \sum_{i=1}^{n} r_i e_i e_n\right)$ και επειδή τα $e_i, 1 \leq i \leq n$ είναι ανά δύο ορθογώνια το $\psi(r)$ ισούται τελικώς με $(r_1 e_1, r_2 e_2, \ldots, r_n e_n) = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$. Άρα, ο ψ είναι επιρριπτικός. ♦

Ασκηση 40. *Να επαναλάβετε το δεύτερο τμήμα τής απόδειξης τού ανωτέρω θεωρήματος χρησιμοποιώντας την καθολική ιδιότητα τού ευθέος γινομένου, βλέπε Άσκηση 27.*

2.4.1 *Πρωταρχικά Ταυτοδύναμα Στοιχεία*

Ορισμός 2.4.9. *Ένα ταυτοδύναμο στοιχείο e ενός δακτυλίου R ονομάζεται πρωταρχικό, εάν δεν μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα δύο μη-προφανών ταυτοδύναμων και ορθογώνιων στοιχείων.*

Παράδειγμα 2.4.10. *Κάθε στοιχειώδης πίνακας $e_{ii}, 1 \leq i \leq n$ τού δακτυλίου των $n \times n$ πινάκων $\mathbb{M}_n(K)$ με συνιστώσες από ένα σώμα K αποτελεί ένα πρωταρχικό ταυτοδύναμο στοιχείο.*
Έστω ότι $e_{ii} = s+t$ (1), όπου τα s και t είναι ταυτοδύναμα και ανά δύο ορθογώνια στοιχεία. Οι πίνακες e_{ii}, s, t ορίζουν (ως προς την κανονική βάση τού K^n) αντιστοίχως τρεις γραμμικές απεικονίσεις $\varphi_{e_{ii}}, \varphi_s, \varphi_t : K^n \to K^n$.
Παρατηρούμε ότι ο χώρος $\varphi_s(K^n) + \varphi_t(K^n) \subseteq (\varphi_s + \varphi_t)(K^n)$, επειδή για οποιοδήποτε στοιχείο $w = \varphi_s(x) + \varphi_t(y)$ τού χώρου $\varphi_s(K^n) + \varphi_t(K^n)$ έχουμε:

$$w = \varphi_s(\varphi_s(x) + \varphi_t(y)) + \varphi_t(\varphi_s(x) + \varphi_t(y)) = (\varphi_s + \varphi_t)(\varphi_s(x) + \varphi_t(y)),$$

αφού $\varphi_s^2 = \varphi_s, \varphi_t^2 = \varphi_t$ και $\varphi_s\varphi_t = \zeta = \varphi_t\varphi_s$, όπου ζ είναι ο μηδενικός γραμμικός ενδομορφισμός τού K^n.
Επειδή προφανώς $(\varphi_s + \varphi_t)(K^n) \subseteq \varphi_s(K^n) + \varphi_t(K^n)$, έπεται ότι $(\varphi_s + \varphi_t)(K^n) = \varphi_s(K^n) + \varphi_t(K^n)$ (2). Από τη σχέση (1) έπεται ότι $\varphi_{e_{ii}}(K^n) = (\varphi_s + \varphi_t)(K^n)$ και από την (2) έπεται $\varphi_{e_{ii}}(K^n) = \varphi_s(K^n) + \varphi_t(K^n)$. Χρησιμοποιώντας τώρα τον τύπο τής

διάστασης για το άθροισμα δύο K *διανυσματικών υποχώρων έχουμε:*

$$\begin{aligned} 1 = &\dim_K \varphi_{e_{ii}}(K^n) = \dim_K(\varphi_s(K^n) + \varphi_t(K^n)) = \\ &\dim_K \varphi_s(K^n) + \dim_K \varphi_t(K^n) - \dim_K(\varphi_s(K^n) \cap \varphi_t(K^n)). \end{aligned} \tag{3}$$

Όμως η τομή $\varphi_s(K^n) \cap \varphi_t(K^n) = \{0\}$, *αφού αν* $z \in \varphi_s(K^n) \cap \varphi_t(K^n)$, *τότε* $z = \varphi_s(x) = \varphi_t(y)$ *και επειδή* $\varphi_s(z) = \varphi_s^2(x) = \varphi_s(\varphi_t(y)) = 0$ *και* $z = \varphi_s(x) = \varphi_s^2(x)$ *έχουμε* $z = 0$.
Επομένως, ο τύπος (3) *γίνεται*

$$1 = \dim_K \varphi_{e_{ii}}(K^n) = \dim_K \varphi_s(K^n) + \dim_K \varphi_t(K^n)$$

και γι' αυτό ή ο πίνακας s *ή ο πίνακας* t *ισούται με τον μηδενικό πίνακα.*

Κεφάλαιο 3

Αρχικές Έννοιες Μοδίων

Ένας *διανυσματικός χώρος* M υπεράνω ενός σώματος R είναι ένα σύνολο στοιχείων που ονομάζονται *διανύσματα*, τα οποία μπορούν να προστεθούν ή να αφαιρεθούν μεταξύ τους, καθώς και να πολλαπλασιαστούν με τα στοιχεία τού σώματος R, τα λεγόμενα *βαθμωτά*. Συνεπώς, το M είναι μια αβελιανή ομάδα ως προς μια πράξη που ονομάζεται *πρόσθεση* και παριστάνεται με «+», όπου για κάθε $r \in R$ και $m \in M$ έχουμε $mr \in M$. Ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός και επιμεριστικός και η μονάδα 1_R τού σώματος δρα ταυτοτικά πάνω στα διανύσματα. Επιτύπως, $(m+n)r = mr + nr$, $m(r+s) = mr + ms$, $m(rs) = (mr)s$, $m1_R = m$, για κάθε $m, n \in M$ και $r, s \in R$.
Ένας μόδιος είναι απλώς ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός δακτυλίου R. Ο επίτυπος ορισμός είναι ταυτόσημος με τον ορισμό τού διανυσματικού χώρου, εξασθενίζοντας όμως την απαίτηση να είναι το R ένα σώμα και επιτρέποντας αντ' αυτού να είναι οποιοσδήποτε δακτύλιος.
Από εδώ και στο εξής θα υποθέτουμε σιωπηρώς ότι όλοι οι υπό μελέτη δακτύλιοι R ικανοποιούν τη συνθήκη $1_R \neq 0_R$, δηλαδή δεν συμπίπτουν με τον μηδενικό δακτύλιο. Εάν κάποιος από τους δακτυλίους προκύψει να είναι ο μηδενικός, τότε αυτό θα το αναφέρουμε ρητώς.

3.1 Μόδιοι

Ορισμός 3.1.1. *Έστω R ένας δακτύλιος. Μια αβελιανή ομάδα $(M, +)$ ονομάζεται δεξιός μόδιος υπεράνω τού R ή δεξιός R-μόδιος, όταν υπάρχει μια απεικόνιση*

$$\cdot : M \times R \to M$$

με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α′) *Για κάθε $m, n \in M$ και $r \in R$, ισχύει $(m+n) \cdot r = m \cdot r + n \cdot r$ (ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός επιμερίζει την πρόσθεση τού μοδίου.).*

(β′) *Για κάθε $m \in M$ και $r, s \in R$, ισχύει $m \cdot (r+s) = m \cdot r + m \cdot s$ (ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός επιμερίζει την πρόσθεση τού δακτυλίου.).*

(γ′) Για κάθε $m \in M$ και $r, s \in R$, ισχύει $m \cdot (rs) = (m \cdot r) \cdot s$ (ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός συμπεριφέρεται προσεταιριστικά ως προς τον πολλαπλασιασμό τού δακτυλίου).

(δ′) Για κάθε $m \in M$, ισχύει $m \cdot 1_R = m$.

Η απεικόνιση $\cdot : M \times R \to M$ ονομάζεται *βαθμωτός* ή *εξωτερικός πολλαπλασιασμός*. Παρομοίως ορίζεται η έννοια τού αριστερού R-μοδίου. Πρόκειται και πάλι για μια αβελιανή ομάδα $(M, +)$ μαζί με μια απεικόνιση $\cdot : R \times M \to M$ που ικανοποιεί τα «αριστερά ανάλογα» των (i) (iv).

Συχνά, ένας δεξιός (αντιστοίχως αριστερός) R-μόδιος M παριστάνεται με M_R (αντιστοίχως ${}_RM$).
Από εδώ και στο εξής λέγοντας R-μόδιος θα εννοούμε πάντοτε δεξιός R-μόδιος. Εάν χρειαστεί να ασχοληθούμε με αριστερούς R-μόδιους, τότε θα το δηλώσουμε ρητά. Κάθε πρόταση που αφορά δεξιούς R-μόδιους έχει την αντίστοιχή της που αφορά αριστερούς R-μόδιους και αντιστρόφως.

Παρατήρηση 3.1.2. *Εάν R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος, τότε κάθε δεξιός R-μόδιος M είναι επίσης αριστερός R-μόδιος και αντιστρόφως. Για να το διαπιστώσουμε αυτό ορίζουμε τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό $\cdot' : R \times M \to M, (r, m) \mapsto r \cdot' m := m \cdot r$ και εν συνεχεία επιβεβαιώνουμε ότι ο αριστερός βαθμωτός πολλαπλασιασμός ικανοποιεί τα αριστερά ανάλογα τού Ορισμού 3.1.1. Εδώ θα αποδείξουμε μόνο την προσεταιριστική συμπεριφορά τού βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως προς τον πολλαπλασιασμό τού δακτυλίου, δηλαδή το 3.1.1(iii), αφήνοντας την επιβεβαίωση των υπολοίπων στον αναγνώστη.*
Για κάθε $m \in M, r, s \in R$, έχουμε:

$$(rs) \cdot' m = m \cdot (rs) = m \cdot (sr) = (m \cdot s) \cdot r = r \cdot' (s \cdot' m).$$

Σημειώστε ότι χρησιμοποιήσαμε τη μεταθετικότητα τού R κατά τη μετάβαση από τη δεύτερη στην τρίτη ισότητα.

Έστω M ένας δεξιός R-μόδιος M. Οι ακόλουθες διαπιστώσεις αποτελούν απλές συνέπειες τού ορισμού των R-μοδίων· οι αποδείξεις τους προτείνονται στον αναγνώστη ως ασκήσεις:

(α′) Για κάθε $r \in R$, ισχύει $0_M \cdot r = 0_M$.

(β′) Για κάθε $m \in M$, ισχύει $m \cdot 0_R = 0_M$.

(γ′) Για κάθε $r \in R$ και κάθε $m \in M$, ισχύει $(-m) \cdot r = m \cdot (-r) = -(m \cdot r)$.

(δ′) Τέλος, εάν ο δακτύλιος R είναι ένα σώμα ή γενικότερα ένας διαιρετικός δακτύλιος, τότε από $m \cdot r = 0_M$ έπεται είτε $r = 0_R$ είτε $m = 0_M$.

Από εδώ και στο εξής θα παραλείπουμε πλην ασαφών περιπτώσεων το σύμβολο τού βαθμωτού πολλαπλασιασμού μεταξύ των στοιχείων ενός μοδίου M_R και των στοιχείων ενός δακτυλίου R και έτσι η απλή συμπαράθεση mr των $m \in M_R$ και $r \in R$ θα σημαίνει $m \cdot r$.

3.1.1 *Αρχικά Παραδείγματα Μοδίων*

Παράδειγμα 3.1.3. *Έστω K ένα σώμα και V ένας K-διανυσματικός χώρος. Σύμφωνα με όσα είπαμε, αν ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός, δηλαδή η εξωτερική πράξη των στοιχείων τού K με τα στοιχεία τού V, εκτελείται από τα αριστερά, τότε ο V αποτελεί έναν αριστερό K-μόδιο και αν ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός εκτελείται από τα δεξιά, τότε αποτελεί έναν δεξιό K-μόδιο. Βέβαια, λαμβάνοντας υπόψιν την Παρατήρηση 3.1.2 διαπιστώνουμε ότι κάθε K-διανυσματικός χώρος V είναι και αριστερός και δεξιός K-μόδιος.*

Παράδειγμα 3.1.4. *Κάθε αβελιανή ομάδα $(G,+)$ είναι ένας δεξιός $\mathbb{Z}$-μόδιος. Πράγματι, η απεικόνιση $G \times \mathbb{Z} \to G, g \mapsto gz$, όπου*

$$gz = \begin{cases} g + g + \cdots + g, & z\text{-φορές}, & \text{αν } z > 0, \\ (-g) + (-g) + \cdots + (-g), & |z|\text{-φορές}, & \text{αν } z < 0, \\ 0_G, & & \text{αν } z = 0 \end{cases}$$

προσδίδει στην ομάδα G τη δομή ενός δεξιού $\mathbb{Z}$-μοδίου.

Παράδειγμα 3.1.5. *Κάθε δεξιός R-μόδιος M είναι ένας αριστερός R-μόδιος υπεράνω του αντικείμενου δακτυλίου R^{op}, όπου ο R^{op}-βαθμωτός πολλαπλασιασμός $\cdot : R^{op} \times M \to M$ ορίζεται από τη σχέση $r \cdot m := mr$. Εδώ θα αποδείξουμε μόνο την προσεταιριστική συμπεριφορά τού βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως προς τον πολλαπλασιασμό τού δακτυλίου, δηλαδή το 3.1.1(iii), αφήνοντας την επιβεβαίωση των υπόλοιπων ιδιοτήτων στον αναγνώστη. Συμβολίζοντας με $\star : R^{op} \times R^{op} \to R^{op}$ τον πολλαπλαπλασιασμό τού αντικείμενου δακτυλίου R^{op}, παίρνουμε:*

$$\begin{aligned} &\forall r_1, r_2 \in R^{op}, m \in M : \\ &\qquad (r_1 \star r_2) \cdot m = m(r_1 \star r_2) = m(r_2 r_1) = (m r_2) r_1 = r_1 \cdot (r_2 \cdot m). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.1.6. *(α′) Κάθε δακτύλιος R είναι ένας δεξιός (αντιστοίχως αριστερός) R-μόδιος υπεράνω τού εαυτού του. Σε αμφότερες τις περιπτώσεις ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός είναι ο πολλαπλασιασμός τού δακτυλίου R. Ο δεξιός (αντιστοίχως αριστερός) R-μόδιος R ονομάζεται ο δεξιά κανονικός (αντιστοίχως ο αριστερά κανονικός) R-μόδιος και παριστάνεται με R_R (αντιστοίχως ${}_RR$).*

(β′) Κάθε δεξιό (αντιστοίχως αριστερό) ιδεώδες I ενός δακτυλίου R είναι ένας δεξιός (αντιστοίχως αριστερός) R-μόδιος. Κάθε αμφίπλευρο ιδεώδες I είναι και δεξιός και αριστερός R-μόδιος.

(γ′) Έστω R ένας δακτύλιος και R^n, όπου n είναι ένας πάγιος φυσικός αριθμός, το ευθύ γινόμενο δακτυλίων $\prod_{i=1}^n R_i$, όπου $\forall i, 1 \leq i \leq n, R_i = R$. Ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός

$$\prod_{i=1}^n R_i \times R \to \prod_{i=1}^n R_i, ((r_1, r_2, \ldots, r_n), r) \mapsto (r_1 r, r_2 r, \ldots, r_n r)$$

δομεί το $\prod_{i=1}^n R_i$ σε έναν δεξιό R-μόδιο.

Παράδειγμα 3.1.7. *Έστω* R *ένας δακτύλιος και* $\mathbb{M}_n(\mathsf{R})$ *ο δακτύλιος των* $n \times n$ *πινάκων με συνιστώσες από τον* R*. Ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός*

$$\begin{aligned} \cdot : &\mathbb{M}_n(\mathsf{R}) \times \mathsf{R} \to \mathbb{M}_n(\mathsf{R}), \\ &((a_{ij}), r) \mapsto (a_{ij}) \cdot r := (a_{ij} r) \end{aligned}$$

ορίζει επί τού $\mathbb{M}_n(\mathsf{R})$ *τη δομή ενός* R*-μοδίου.*

Ασκηση 41. *Έστω ότι* R *είναι ένας δακτύλιος και* R^{op} *ο αντικείμενος τού* R *δακτύλιος.*

(α′) *Να δειχθεί ότι κάθε δεξιός μόδιος υπεράνω τού* R^{op} *δομείται σε έναν αριστερό* R*-μόδιο μέσω τής απεικόνισης* $\mathsf{R} \times \mathsf{M} \to \mathsf{M}, (r, m) \mapsto r \cdot m := mr$*, όπου* mr *παριστά τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό των στοιχείων* $m \in \mathsf{M}$ *με τα στοιχεία* $r \in \mathsf{R}^{\mathrm{op}}$.

(β′) *Να δειχθεί ότι κάθε αριστερός μόδιος υπεράνω τού* R^{op} *δομείται σε έναν δεξιό* R*-μόδιο μέσω τής απεικόνισης* $\mathsf{M} \times \mathsf{R} \to \mathsf{M}, (m, r) \mapsto m \cdot r := rm$*, όπου* rm *παριστά τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό των στοιχείων* $r \in \mathsf{R}^{\mathrm{op}}$ *με τα στοιχεία* $m \in \mathsf{M}$.

3.2 Άλγεβρες

Θα παρουσιάσουμε τώρα μια από τις βασικότερες έννοιες τής θεωρίας μας.

Ορισμός 3.2.1. *Έστω* R *ένας μεταθετικός δακτύλιος. Μια* R*-άλγεβρα* A *(ή άλγεβρα υπεράνω τού* R*) είναι ένας δακτύλιος, ο οποίος επιπλέον είναι ένας δεξιός* R*-μόδιος και όπου ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός* $\cdot : A \times \mathsf{R} \to A$ *ικανοποιεί τη συνθήκη*

$$(ab) \cdot r = a(b \cdot r) = (a \cdot r)b, \forall a, b \in A, r \in \mathsf{R}. \tag{3.1}$$

Παρατήρηση 3.2.2. *Από τη σχέση (3.1) προκύπτει:*

$$a(1_A \cdot r) = (a1_A) \cdot r = a \cdot r = (1_A a) \cdot r = (1_A \cdot r)a, \forall a \in A, r \in \mathsf{R}.$$

Γι' αυτό θα ταυτίζουμε συνήθως τα στοιχεία $r \in \mathsf{R}$ *με τα βαθμωτά γινόμενα* $1_A \cdot r$ *και για κάθε* $a \in A, r \in \mathsf{R}$ *θα γράφουμε* ar *αντί* $a \cdot r$*, αποδεχόμενοι επιπλέον τη σχέση* $ar = ra$.

Κατ' ουσίαν, κάθε δακτύλιος είναι μια άλγεβρα υπεράνω ενός κατάλληλου υποδακτυλίου του. Πράγματι, έστω A ένας δακτύλιος και $C(A)$ το κέντρο του, βλέπε σελ. 4. Ο δακτύλιος A είναι μια R-άλγεβρα υπεράνω οποιουδήποτε υποδακτυλίου τού $C(A)$. Επιπλέον, εάν A είναι μια R-άλγεβρα, τότε η απεικόνιση $\varphi : \mathsf{R} \to C(A), r \mapsto \varphi(r) := 1_A \cdot r$, αποτελεί έναν ομομορφισμό δακτυλίων. Εδώ θα δείξουμε ότι το $\varphi(r)$ ανήκει όντως στο $C(A)$ και θα αφήσουμε στον αναγνώστη την εκτέλεση τής επιβεβαίωσης ότι ο φ είναι ομομορφισμός δακτυλίων.
Για κάθε $a \in A, r \in \mathsf{R}$, έχουμε :

$$a\varphi(r) = a(1_A \cdot r) = (a1_A) \cdot r = a \cdot r = (1_A a) \cdot r = (1_A \cdot r)a = \varphi(r)a.$$

Αντιστρόφως, κάθε ομομορφισμός από έναν μεταθετικό δακτύλιο R στο κέντρο $C(A)$ ενός δακτυλίου A, δομεί τον A σε μια R-άλγεβρα. Τέλος, αν ο δακτύλιος R είναι σώμα, τότε ο πυρήνας $\mathrm{Ker}(\varphi)$ ισούται με $\{0_\mathsf{R}\}$· συνεπώς ο R είναι ισόμορφος με την εικόνα του $\varphi(\mathsf{R})$ και γι' αυτό μπορεί να ταυτιστεί με έναν υποδακτύλιο τού $C(A)$.

Ασκηση 42. *Έστω ότι A είναι μια R-άλγεβρα και R' ένας υποδακτύλιος τού R. Να δειχθεί ότι η A είναι μια R'-άλγεβρα.*

Ασκηση 43. *Έστω A μια R-άλγεβρα και I ένα αμφίπλευρο ιδεώδες τής A.*

(α′) Να δειχθεί ότι $\forall r \in R$ και $a \in I$ το στοιχείο $a \cdot r$ ανήκει στο I.

(β′) Να δειχθεί ότι ο πηλικοδακτύλιος A/I είναι επίσης μια R-άλγεβρα μέσω τού επαγόμενου βαθμωτού πολλαπλασιασμού $A/I \times R \to A/I, (a+I, r) \mapsto a \cdot r + I$.

Ασκηση 44. *Έστω $(A_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια R-αλγεβρών. Να δειχθεί ότι το ευθύ γινόμενο των υποκείμενων δακτυλίων $\prod_{i\in I} A_i$ αποτελεί μια R-άλγεβρα.*

Εάν A είναι μια K-άλγεβρα, όπου το K είναι ένα σώμα, τότε η A είναι επίσης K-διανυσματικός χώρος. Πολλά θεωρήματα τής Θεωρίας Δακτυλίων αποδεικνύονται πρώτα στην περίπτωση των K-αλγεβρών και εν συνεχεία ακολουθεί η απόδειξή τους σε γενικότερες περιπτώσεις. Για τον λόγο αυτό θα δώσουμε ιδιαίτερη προσοχή στις K-άλγεβρες, όταν το K είναι ένα σώμα. Στην περίπτωση αυτή θα ταυτίζουμε τα στοιχεία $k \in K$ με τα βαθμωτά γινόμενα $k \cdot 1_A$. Τέλος, θα συμβολίζουμε με $\dim_K A$ τη διάσταση μιας K-άλγεβρας ως διανυσματικού χωρου υπεράνω τού K.

3.2.1 *Αρχικά Παραδείγματα Αλγεβρών*

Παράδειγμα 3.2.3. *Κάθε μεταθετικός δακτύλιος R είναι μια άλγεβρα υπεράνω τού εαυτού του. Επιπλέον ο R είναι μια R'-άλγεβρα υπεράνω οποιουδήποτε υποδακτυλίου του, βλέπε Άσκηση 42. Ιδιαιτέρως, κάθε σώμα K είναι μια K'-υποάλγεβρα, όπου το K' είναι ένα υπόσωμα τού K.*

Παράδειγμα 3.2.4. *Οποιοσδήποτε δακτύλιος R είναι μια $\mathbb{Z}$-άλγεβρα.*

Παράδειγμα 3.2.5. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος και $\mathbb{M}_n(R)$ ο δακτύλιος των $n \times n$ πινάκων με συνιστώσες από τον R. Ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός $\cdot : \mathbb{M}_n(R) \times R \to \mathbb{M}_n(R), ((a_{ij}), r) \mapsto (a_{ij}) \cdot r := (a_{ij}r)$ τού Παραδείγματος 3.1.7 ορίζει επί τού $\mathbb{M}_n(R)$ τη δομή μιας R-άλγεβρας. Εάν ο R είναι σώμα, τότε οι στοιχειώδεις πίνακες $e_{\kappa\lambda}, 1 \leq \kappa, \lambda \leq n$ αποτελούν μια R-βάση και συνεπώς $\dim_R \mathbb{M}_n(R) = n^2$.*

Παράδειγμα 3.2.6. *Ο δακτύλιος $K[x]$ των πολυωνύμων μια μεταβλητής υπεράνω ενός σώματος K αποτελεί μια K-άλγεβρα.*
Τα στοιχεία $1, x, x^2, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots$ σχηματίζουν μια K-βάση και συνεπώς $\dim_K K[x] = \infty$.

Παράδειγμα 3.2.7. *Ο δακτύλιος $\mathbb{H}$ τετρανίων Hamilton, βλέπε Παράδειγμα 2.3.3, αποτελεί μια $\mathbb{R}$-άλγεβρα με $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{H} = 4$ και γι' αυτό ονομάζεται συχνά άλγεβρα τετρανίων Hamilton. Ο δακτύλιος των ρητών τετρανίων είναι μια $\mathbb{Q}$-άλγεβρα, η διάσταση τής οποίας ισούται με 4.*

Μόδιοι υπεράνω Αλγεβρών

Έστω ότι A είναι μια R-άλγεβρα και M είναι ένας δεξιός A-μόδιος. Ο M μπορεί να θεωρηθεί και ως ένας R-μόδιος μέσω τής απεικόνισης

$$M \times R \to M, (m, r) \mapsto mr := m(1_A \cdot r).$$

Η επιβεβαίωση των αξιωμάτων που καθιστούν τον M έναν δεξιό R-μόδιο είναι πολύ εύκολη. Επί παραδείγματι $\forall m \in M, r_1, r_2 \in R$ έχουμε:

$$\begin{aligned} m(r_1 r_2) &= m[1_A \cdot (r_1 r_2)] = m[(1_A 1_A) \cdot (r_1 r_2)] = m[(1_A \cdot r_1)(1_A \cdot r_2)] \\ &= (m(1_A \cdot r_1))(1_A \cdot r_2) = (mr_1)r_2. \end{aligned}$$

Προτείνουμε να επαληθεύσει ο αναγνώστης τα υπολειπόμενα αξιώματα.

3.2.2 *Άλγεβρες πεπερασμένης Διάστασης*

Έστω A μια K-άλγεβρα υπεράνω ενός σώματος K με πεπερασμένη διάσταση $\dim_K A = n$. Εάν $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ είναι μια K-βάση της, τότε κάθε στοιχείο $a \in A$ εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων τής βάσης:

$$a = e_1\lambda_1 + e_2\lambda_2 + \cdots + e_n\lambda_n = \sum_{i=1}^{n} e_i\lambda_i, \lambda_i \in K.$$

Ας θεωρήσουμε ακόμη ένα στοιχείο τής A, έστω το

$$b = e_1\mu_1 + e_2\mu_2 + \cdots + e_n\mu_n = \sum_{j=1}^{n} e_j\mu_j, \mu_j \in K.$$

Τώρα το γινόμενο των a και b ισούται με

$$ab = \left(\sum_{i=1}^{n} e_i\lambda_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} e_j\mu_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} e_i e_j \lambda_i \mu_j = \sum_{i,j,k} e_k \rho_{ij}^k \lambda_i \mu_j,$$

όπου $e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} e_k \rho_{ij}^k$. Επομένως, ο πολλαπλασιασμός τής άλγεβρας A προσδιορίζεται από γινόμενα $e_i e_j$ των στοιχείων τής βάσης και τελικώς από τα n^3 το πλήθος στοιχεία $\rho_{ij}^k \in K$.
Τα στοιχεία ρ_{ij}^k τού σώματος K ονομάζονται οι *δομικές σταθερές* τής άλγεβρας ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.

Έστω $c = \sum_{\ell=1}^{n} e_\ell \nu_\ell$ ένα ακόμη στοιχείο τής A. Λόγω τής προσεταιριστικότητας τού πολλαπλασιασμού τής άλγεβρας έχουμε $(ab)c = a(bc)$. Το αριστερό μέλος τής σχέσης ισούται με

$$(ab)c = \left(\sum_{i=1}^{n} e_i\lambda_i \sum_{j=1}^{n} e_j\mu_j\right)\sum_{\ell=1}^{n} e_\ell\nu_\ell = \left(\sum_{i,j=1}^{n} e_ie_j\lambda_i\mu_j\right)\sum_{\ell=1}^{n} e_\ell\nu_\ell =$$

$$\sum_{i,j,k} e_k\rho_{ij}^k\lambda_i\mu_j \sum_{\ell=1}^{n} e_\ell\nu_\ell = \sum_{i,j,k,\ell} e_ke_\ell\rho_{ij}^k\lambda_i\mu_j\nu_\ell = \sum_{i,j,k,\ell,h=1}^{n} e_h\rho_{k\ell}^h\rho_{ij}^k\lambda_i\mu_j\nu_\ell,$$

και το δεξιό μέλος ισούται με

$$a(bc) = \sum_{i=1}^{n} e_i\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{n} e_j\mu_j \sum_{\ell=1}^{n} e_\ell\nu_\ell\right) = \sum_{i=1}^{n} e_i\lambda_i\left(\sum_{j,\ell=1}^{n} e_je_\ell\mu_j\nu_\ell\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i\lambda_i\left(\sum_{j,\ell,k=1}^{n} e_k\rho_{j\ell}^k\mu_j\nu_\ell\right) = \sum_{i,j,\ell,k=1}^{n} e_ie_k\rho_{j\ell}^k\lambda_i\mu_j\nu_\ell = \sum_{i,j,\ell,k,h=1}^{n} e_h\rho_{ik}^h\rho_{j\ell}^k\lambda_i\mu_j\nu_\ell.$$

Για κάθε $h, 1 \le h \le n$, οι συνιστώσες των στοιχείων $e_h \in \mathcal{B}$ στο αριστερό και το δεξιό μέλος οφείλουν να είναι ίσες. Έτσι προκύπτει:

$$\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \rho_{k\ell}^h\rho_{ij}^k\lambda_i\mu_j\nu_\ell = \sum_{i,j,\ell,k=1}^{n} \rho_{ik}^h\rho_{j\ell}^k\lambda_i\mu_j\nu_\ell.$$

Επιπλέον, επειδή η ανωτέρω σχέση ισχύει για οποιεσδήποτε τιμές των $\lambda_i, \mu_j, \nu_\ell$, τελικώς προκύπτει ότι, για κάθε $h, i, j, \ell, 1 \le h, i, j, \ell \le n$ ισχύει:

$$\sum_{k=1}^{n} \rho_{k\ell}^h\rho_{ij}^k = \sum_{k=1}^{n} \rho_{ik}^h\rho_{j\ell}^k.$$

Επομένως, διαπιστώσαμε το ακόλουθο:

Πρόταση 3.2.8. *Έστω μια πεπερασμένης διάστασης άλγεβρα A υπεράνω ενός σώματος K και $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ μια βάση της. Τότε οι n^3 δομικές σταθερές $\rho_{ij}^k \in K$ που ορίζονται από τις n^2 το πλήθος σχέσεις $e_ie_j = \sum_{k=1}^{n} e_k\rho_{ij}^k$ ικανοποιούν τις ισότητες*

$$\sum_{k=1}^{n} \rho_{k\ell}^h\rho_{ij}^k = \sum_{k=1}^{n} \rho_{ik}^h\rho_{j\ell}^k, \quad \forall h, i, j, \ell, 1 \le h, i, j, \ell \le n. \tag{3.2}$$

Αντιστρόφως, κάθε πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος V υπεράνω ενός σώματος K προσλαμβάνει τη δομή μιας K-άλγεβρας αρκεί:

(α′) Να ορίσουμε έναν πολλαπλασιασμό $e_ie_j = \sum_{k=1}^{n} e_k\rho_{ij}^k$ πάνω στα στοιχεία μιας βάσης του $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ κατά τέτοιον τρόπο ώστε τα n^3 στοιχεία $\rho_{ij}^k \in K$ να ικανοποιούν τις ισότητες (3.2) (β′) Να επεκτείνουμε γραμμικά τον πολλαπλασιασμό σε οποιαδήποτε στοιχεία $a = \sum_{i=1}^{n} e_i\lambda_i$ και $b = \sum_{j=1}^{n} e_j\mu_j$ τού V μέσω των σχέσεων:

$$ab = \sum_{i,j=1}^{n} e_i e_j \lambda_i \mu_j = \sum_{i,j,k=1}^{n} e_k \rho_{ij}^{k} \lambda_i \mu_j. \tag{3.3}$$

(γ′) Και τέλος, να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη ενός στοιχείου τού V που να δρα ως το μοναδιαίο στοιχείο τής άλγεβρας. Επί παραδείγματι, εάν επιθυμούμε ένα από τα στοιχεία τής βάσης, έστω το e_α, να είναι το ουδέτερο ως προς τον πολλαπλασιασμό, τότε πρέπει να θέσουμε στο σύνολο των δομικών σταθερών για το συγκεκριμένο α τις επιπλέον συνθήκες:

$$\rho_{\alpha j}^{k} = \begin{cases} 0_K, & \text{αν } k \neq j \\ 1_K, & \text{αν } k = j \end{cases} \text{ και } \rho_{j\alpha}^{k} = \begin{cases} 0_K, & \text{αν } k \neq j \\ 1_K, & \text{αν } k = j \end{cases}.$$

Ασκηση 45. *Να υπολογιστούν οι 2^3 δομικές σταθερές τής $\mathbb{R}$-άλγεβρας $\mathbb{C}$.*

Ασκηση 46. *Να προσδιοριστούν οι 4^3 δομικές σταθερές τής $\mathbb{R}$-άλγεβρας τετρανίων Hamilton και να επιβεβαιωθεί ότι $\sum_{k=1}^{4} \rho_{k3}^{2}\rho_{42}^{k} = \sum_{k=1}^{4} \rho_{4k}^{2}\rho_{23}^{k}$.*

Οι άλγεβρες πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος K διαθέτουν ορισμένες ιδιότητες που δεν ισχύουν απαραιτήτως σε γενικότερους δακτυλίους. Έτσι έχουμε:

Θεώρημα 3.2.9. *Έστω A μια πεπερασμένης διάστασης άλγεβρα υπεράνω ενός σώματος K. Κάθε στοιχείο $a \in A$ είναι ή διαιρέτης τού μηδενός ή διαιρέτης τής μονάδος, αλλά όχι και τα δύο.*

Απόδειξη (α') Εάν το $a \in A$ *είναι ένας αριστερός διαιρέτης τού μηδενός*, τότε υπάρχει κάποιο $b \neq 0_A \in A$ με $ab = 0_A$. Συνεπώς, το a δεν είναι δεξιός διαιρέτης τής μονάδος, αφού αν ήταν θα υπήρχε $c \in A$ με $ca = 1_A$ και τότε θα είχαμε $0_A = c(ab) = (ca)b = 1_A b = b$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως, ο K-γραμμικός ενδομορφισμός $r_a : A \to A, x \to xa$ δεν είναι επιμορφισμός και ως εκ τούτου ούτε μονομορφισμός, αφού πρόκειται για K-ενδομορφισμό ενός διανυσματικού χώρου με πεπερασμένη διάσταση. Άρα ο πυρήνας $\mathrm{Ker}(r_a)$ δεν είναι τετριμμένος, δηλαδή υπάρχει $x \neq 0 \in A$ με $xa = 0_A$ και γι' αυτό το a είναι διαιρέτης τού μηδενός.
(β') Εάν το $a \in A$ *δεν είναι αριστερός διαιρέτης τού μηδενός*, τότε ο K-γραμμικός ενδομορφισμός $\ell_a : A \to A, x \mapsto ax$ είναι μονομορφισμός και ως εκ τούτου επιμορφισμός. Άρα, υπάρχει $y \in A$ με $\ell_a(y) = ay = 1_A$, δηλαδή το a είναι αριστερός διαιρέτης τής μονάδος. Επομένως, το a δεν είναι δεξιός διαιρέτης τού μηδενός, αφού άν ήταν, τότε θα υπήρχε $b \neq 0_A$ με $ba = 0_A$ και έτσι $b = b1_A = bay = 0_A$, το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, ο K-γραμμικός ενδομορφισμός $r_a : A \to A, x \mapsto xa$ είναι μονομορφισμός, άρα και επιμορφισμός. Αφού λοιπόν ο r_a είναι επιμορφισμός, υπάρχει $x \in A$ με $r_a(x) = xa = 1_A$ και γι' αυτό το a είναι διαιρέτης τής μονάδος. Η πρόταση αποδείχθηκε. ♦

Πόρισμα 3.2.10. *Έστω A μια πεπερασμένης διάστασης άλγεβρα υπεράνω ενός σώματος K. Εάν η A δεν έχει διαιρέτες τού μηδενός, τότε είναι ένας διαιρετικός δακτύλιος.*

Παράδειγμα 3.2.11. *Το σύνολο $\mathbb{Q}\left[\sqrt{p}\right] = \{\kappa + \lambda\sqrt{p} \mid \kappa, \lambda \in \mathbb{Q}\}$, όπου ο $p \in \mathbb{N}$ είναι ένας πρώτος αριθμός, αποτελεί μια άλγεβρα υπεράνω τού σώματος των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$ (γιατί;). Θα δείξουμε ότι η διάσταση τής $\mathbb{Q}\left[\sqrt{p}\right]$ υπεράνω τού $\mathbb{Q}$ ισούται με 2. Πράγματι, το σύνολο $\mathcal{B} = \{1_{\mathbb{Q}}, \sqrt{p}\}$ είναι ένα σύνολο $\mathbb{Q}$-γεννητόρων. Υπολείπεται να διαπιστώσουμε ότι το $\mathcal{B}$ είναι $\mathbb{Q}$-γραμμικά ανεξάρτητο. Εάν $\kappa + \lambda\sqrt{p} = 0$, τότε $\lambda\sqrt{p} = -\kappa$ και εάν ένα από τα κ, λ είναι διάφορο τού μηδενός, τότε είναι και τα δύο διάφορα τού μηδενός και γι' αυτό $\sqrt{p} = -(\kappa/\lambda) \in \mathbb{Q}$. Όμως, η τετραγωνική ρίζα ενός πρώτου αριθμού δεν είναι ποτέ ρητός (γιατί;). Συνεπώς, $\kappa = \lambda = 0$ και η $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\left[\sqrt{p}\right] = 2$.*

Η άλγεβρα $\mathbb{Q}\left[\sqrt{p}\right]$ είναι μεταθετική. Επιπλέον, δεν διαθέτει διαιρέτες τού μηδενός, αφού $\mathbb{Q}\left[\sqrt{p}\right] \subset \mathbb{R}$. Τώρα, το Πόρισμα 3.2.10 μάς πληροφορεί ότι η $\mathbb{Q}\left[\sqrt{p}\right]$ είναι μια διαιρετική άλγεβρα και συνεπώς σώμα.

Ασκηση 47. *Να δειχθεί ότι η άλγεβρα τετρανίων $\mathbb{H}$ είναι ένας διαιρετικός δακτύλιος με τη βοήθεια τού Πορίσματος 3.2.10.*

Ασκηση 48. *Έστω η $\mathbb{Q}$-άλγεβρα $\mathbb{Q}\left[\sqrt{p}\right]$. Να δειχθεί με άμεσο τρόπο, δηλαδή υπολογίζοντας το αντίστροφο οποιουδήποτε μη-μηδενικού στοιχείου $\kappa + \lambda\sqrt{p}$ τής άλγεβρας, ότι η $\mathbb{Q}\left[\sqrt{p}\right]$ είναι ένα σώμα.*

3.2.3 *Ομαδοάλγεβρες*

Οι ομαδοάλγεβρες αποτελούν σημαντικά παραδείγματα αλγεβρών και συνεπώς δακτυλίων.

Έστω $G = \{g_1, g_2, \dots g_n\}$ μια πεπερασμένη ομάδα τάξης $\circ(G) = n$ με ουδέτερο στοιχείο το $g_1 = e$. Στην παρούσα ενότητα η πράξη τής G συμβολίζεται πολλαπλασιαστικά ακόμα και όταν η G είναι μια μεταθετική ομάδα.
Έστω V ένας n-διάστατος διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος K και $\mathcal{B} = \{\epsilon_{g_1}, \epsilon_{g_2}, \dots, \epsilon_{g_n}\}$ μια K-βάση του, όπου το σύνολο δεικτών είναι το σύνολο των στοιχείων τής G.
Επί τού συνόλου των στοιχείων τής βάσης $\mathcal{B}$ τού Vορίζεται μια απεικόνιση:

$$\cdot : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}, \ \ (\epsilon_{g_i}, \epsilon_{g_j}) \mapsto \epsilon_{g_i} \cdot \epsilon_{g_j} := \epsilon_{g_i g_j}.$$

Επειδή η πράξη τής ομάδας G είναι προσεταιριστική έπεται ότι

$$\begin{aligned} \forall \epsilon_{g_i}, \epsilon_{g_j}, \epsilon_{g_k} \in \mathcal{B}, \ \ & (\epsilon_{g_i} \cdot \epsilon_{g_j}) \cdot \epsilon_{g_k} = \\ & \epsilon_{(g_i g_j)} \cdot \epsilon_{g_k} = \epsilon_{g_i(g_j g_k)} = \epsilon_{g_i} \cdot \epsilon_{g_j g_k} = \epsilon_{g_i} \cdot (\epsilon_{g_j} \epsilon_{g_k}). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Η ανωτέρω απεικόνιση επεκτείνεται γραμμικά σε οποιαδήποτε στοιχεία τού V, όπως και στην περίπτωση των δομικών σταθερών, βλέπε (3.3)· δηλαδή, αν $v = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_{g_i}\lambda_i \in V$ και $w = \sum_{j=1}^{n} \epsilon_{g_j}\mu_j \in V$, τότε :

$$vw = \sum_{i,j=1}^{n} (\epsilon_{g_i} \cdot \epsilon_{g_j})\lambda_i\mu_j = \sum_{i,j=1}^{n} \epsilon_{g_i g_j}\lambda_i\mu_j. \tag{3.5}$$

Από τις σχέσεις (3.4), έπεται $\forall v, w, x \in V, v(wx) = (vw)x$.
Κατ' αυτόν τον τρόπο ο K-διανυσματικός χώρος V προσλαμβάνει τη δομή μιας K-άλγεβρας, όπου η πράξη τής πρόσθεσης είναι η πρόσθεση τού V, η πράξη τού βαθμωτού πολλαπλασιασμού είναι η εξωτερική πράξη των στοιχείων τού V με τα στοιχεία τού K, η πράξη τού πολλαπλασιασμού τής άλγεβρας ορίζεται μέσω τής (3.5) και όπου το μοναδιαίο στοιχείο είναι το $\epsilon_{g_1} = \epsilon_e$.

Η συγκεκριμένη K-άλγεβρα η οποία προέκυψε από την ομάδα G ονομάζεται η *ομαδοάλγεβρα* τής G υπεράνω τού σώματος K και παριστάνεται με K[G].

Παράδειγμα 3.2.12. *Έστω $K = \mathbb{R}$ το σώμα των πραγματικών αριθμών και $G = \mathbb{Z}_3 = \{e = 1, a, a^2\}$ η κυκλική ομάδα τάξης 3.*

Το σύνολο $K[G] = \mathbb{R}[\mathbb{Z}_3]$ αποτελείται από τα αθροίσματα

$$\epsilon_e\kappa + \epsilon_a\lambda + \epsilon_{a^2}\mu, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

Ας υπολογίσουμε ορισμένα γινόμενα:

$$(\epsilon_e + 2\epsilon_a - \epsilon_{a^2})(\epsilon_e + \epsilon_{a^2}) = (\epsilon_e + \epsilon_{a^2}) + (2\epsilon_a + 2\epsilon_{a^3}) - (\epsilon_{a^2} + \epsilon_{a^4})$$

και επειδή $a^3 = e, a^4 = a$, η παράσταση ισούται τελικώς με $3\epsilon_e + \epsilon_a$.
Έστω x το στοιχείο $\frac{1}{3}(\epsilon_e + \epsilon_a + \epsilon_{a^2})$.
Για το τετράγωνό του έχουμε:

$$x^2 = \frac{1}{9}(\epsilon_e + \epsilon_a + \epsilon_{a^2})(\epsilon_e + \epsilon_a + \epsilon_{a^2}) =$$
$$\frac{1}{9}[(\epsilon_e + \epsilon_a + \epsilon_{a^2}) + (\epsilon_a + \epsilon_{a^2} + \epsilon_{a^3}) + (\epsilon_{a^2} + \epsilon_{a^3} + \epsilon_{a^4})]$$

και επειδή $a^3 = e, a^4 = a$, η παράσταση ισούται τελικώς με

$$\frac{1}{9}(3\epsilon_e + 3\epsilon_a + 3\epsilon_{a^2}) = \frac{1}{3}(\epsilon_e + \epsilon_a + \epsilon_{a^2}) = x.$$

Επομένως, το x είναι ένα ταυτοδύναμο στοιχείο.

Από τη θεωρία που θα αναπτυχθεί στις επόμενες ενότητες, μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι η $\mathbb{R}$-άλγεβρα $\mathbb{R}[\mathbb{Z}_3]$ είναι ισόμορφη ως $\mathbb{R}$-άλγεβρα[1] *με το ευθύ γινόμενο $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ των $\mathbb{R}$-αλγεβρών $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$.*
Προτείνουμε ως άσκηση στον αναγνώστη την επιβεβαίωση ότι η ακόλουθη απεικόνιση ορίζει όντως έναν ισομορφισμό $\mathbb{R}$-αλγεβρών:

$$\mathbb{R}[\mathbb{Z}_3] \to \mathbb{R} \times \mathbb{C}, \epsilon_e\kappa + \epsilon_a\lambda + \epsilon_{a^2}\mu \mapsto \left(\kappa + \lambda + \mu, \frac{1}{2}(2\kappa - \lambda - \mu) + \frac{\sqrt{3}}{2}(\kappa - \lambda)\right).$$

Ασκηση 49. *Έστω ένα σώμα K, η χαρακτηριστική τού οποίου δεν διαιρεί την τάξη n τής ομάδας G. Να δειχθεί ότι το στοιχείο $x = \left(\frac{1}{n}1_K\right)\sum_{g \in G} \epsilon_g$ είναι πάντοτε ένα ταυτοδύναμο στοιχείο τής K[G].*

[1] Ένας ισομορφισμός $\mathbb{R}$-αλγεβρών είναι ένας ισομορφισμός δακτυλίων που συγχρόνως είναι $\mathbb{R}$-γραμμική απεικόνιση.

Παρατήρηση 3.2.13. *Η έννοια τής ομαδοάλγεβρας επιδέχεται την ακόλουθη γενίκευση. Έστω* G *οποιαδήποτε ομάδα και* R *οποιοσδήποτε δακτύλιος. Έστω* $R[G]$ *το σύνολο των πεπερασμένων τυπικών αθροισμάτων τής μορφής* $\sum_{g\in G} r_g \cdot g$. *Δύο στοιχεία* $\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot g_i$ *και* $\sum_{j=1}^{m} s_j \cdot h_j$ *θεωρούνται ίσα, αν και μόνο αν* $n = m$ *και υπάρχει μια μετάταξη* $\sigma \in S_n$ *ούτως ώστε* $\forall i, 1 \leq i \leq n, s_{\sigma(j)} = r_i$ *και* $h_{\sigma(j)} = g_i$. *Στο σύνολο* $R[G]$ *ορίζεται η πράξη τής πρόσθεσης ως:*

$$R[G] \times R[G] \to R[G], \left(\sum_{g\in G} r_g \cdot g, \sum_{g\in G} s_g \cdot g\right) \mapsto \sum_{g\in G} (r_g + s_g) \cdot g$$

και η πράξη τού πολλαπλασιασμού ως:

$$R[G] \times R[G] \to R[G], \left(\sum_{g\in G} r_g \cdot g, \sum_{h\in G} s_h \cdot h\right) \mapsto \sum_{\ell\in G} t_\ell \cdot \ell,$$

όπου $t_\ell = \sum r_g s_h$ *και όπου η πρόσθεση εκτελείται υπεράνω όλων των ζευγών* $(g, h) \in G \times G$ *με* $gh = \ell$. *Το μοναδιαίο στοιχείο τού* $R[G]$ *είναι το* $1_R \cdot e$ *και κάθε στοιχείο τού* $R(= R \cdot e)$ *μετατίθεται με κάθε στοιχείο τής* $G(= 1_R \cdot G)$.

3.2.4 Το Κέντρο μιας Ομαδοάλγεβρας

Στην παρούσα ενότητα θα προσδιορίσουμε το κέντρο $C(K[G])$ μιας ομαδοάλγεβρας $K[G]$, όπου K είναι οποιοδήποτε σώμα και G είναι οποιαδήποτε ομάδα με πεπερασμένο το πλήθος στοιχεία.

Κατ' αρχήν υπενθυμίζουμε ορισμένες έννοιες από τη Θεωρία Ομάδων που θα χρησιμοποιήσουμε περαιτέρω.

Ως γνωστόν, ένα στοιχείο a μιας ομάδας G ονομάζεται *συζυγές* ενός στοιχείου b τής G, όταν υπάρχει κάποιο $x \in G$ με $b = xax^{-1}$. Η έννοια τής συζυγίας ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας επί τού συνόλου των στοιχείων τής G. Οι κλάσεις τής συγκεκριμένης ισοδυναμίας ονομάζονται *κλάσεις συζυγίας* και αποτελούν μια διαμέριση τής ομάδας G, δηλαδή

$$G = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_\kappa, \text{ όπου } C_i \cap C_j = \emptyset, \forall i, j, i \neq j, 1 \leq i, j \leq \kappa,$$

όπου $C_1, C_2, \ldots, C_\kappa$ είναι οι διαφορετικές κλάσεις συζυγίας τής G.

Παρατήρηση 3.2.14. *Εάν* C_i *είναι μια κλάση συζυγίας και* g *ένα στοιχείο τής* G, *τότε* $gC_i = C_i g$.
Πράγματι, αν $a \in C_i$, *τότε το* gag^{-1} *ανήκει επίσης στο* C_i *και συνεπώς το* $gC_i \subseteq C_i g$. *Παρομοίως,* $C_i g \subseteq gC_i$ *και συνεπώς* $gC_i = C_i g$.

Για κάθε κλάση συζυγίας C_i, σχηματίζουμε το στοιχείο $z_i = \sum_{h\in C_i} e_h$ τής $K[G]$.

Πρόταση 3.2.15. *Το σύνολο των στοιχείων* $z_1, z_2, \ldots, z_\kappa$ *αποτελεί μια βάση τού κέντρου* $C(K[G])$ *τής ομαδοάλγεβρας* $K[G]$ *ως* K*-διανυσματικού χώρου.*

Απόδειξη (i) *Τα στοιχεία* $z_1, z_2, \ldots, z_\kappa$ *ανήκουν στο κέντρο τής ομαδοάλγεβρας* $K[G]$.
Για να αποδείξουμε ότι $\nu z_i = z_i \nu, \forall \nu \in K[G]$, αρκεί να διαπιστώσουμε ότι $\epsilon_g z_i = z_i \epsilon_g$, αφού το σύνολο $\mathcal{B} = \{\epsilon_g, g \in G\}$ αποτελεί μια K-βάση τής G. Όμως, για κάθε $z_i = \sum_{h \in C_i} \epsilon_h$ και κάθε στοιχείο ϵ_g τής βάσης τής $K[G]$ έχουμε $\epsilon_g z_i = \sum_{h\in C_i} \epsilon_g \epsilon_h = \sum_{h \in C_i} \epsilon_{gh} = \sum_{x \in gC_i} \epsilon_x$ και επειδή $gC_i = C_i g$, βλέπε Παρατήρηση 3.2.14, το τελευταίο άθροισμα ισούται με $\sum_{x \in C_i g} \epsilon_x = \sum_{h \in C_i} \epsilon_{hg} = \sum_{h \in C_i} \epsilon_h \epsilon_g = z_i g$. Επομένως, τα στοιχεία z_i ανήκουν στο κέντρο τής $K[G]$.
(ii)*Τα στοιχεία* $z_1, z_2, \ldots, z_\kappa$ *είναι* K-*γραμμικώς ανεξάρτητα.*
Πράγματι, εάν $\sum_{i=1}^{\kappa} z_i \lambda_i = 0, \lambda_i \in K$, τότε έχουμε

$$\sum_{i=1}^{\kappa} z_i \lambda_i = \sum_{i=1}^{\kappa} \left(\sum_{h \in C_i} \epsilon_h \right) \lambda_i = 0.$$

Επειδή όμως η ένωση όλων των κλάσεων συζυγίας C_i ισούται με G και το σύνολο $\{\epsilon_g, g \in G\}$ αποτελεί μια βάση τής $K[G]$, έπεται ότι για κάθε $i, 1 \leq i \leq \kappa$, ο συντελεστής $\lambda_i = 0$. Άρα, το σύνολο των $z_i, 1 \leq i \leq \kappa$ είναι ένα γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο.
(iii) *Τα στοιχεία* $z_1, z_2, \ldots, z_\kappa$ *αποτελούν ένα σύστημα* K-*γεννητόρων τού κέντρου* $C(K[G])$ *τής ομαδοάλγεβρας* $K[G]$.
Έστω $z = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_{g_i} \lambda_i$ ένα στοιχείο που να ανήκει στο κέντρο τής $K[G]$. Πρώτα αποδεικνύουμε ότι, όταν δύο στοιχεία g_s, g_t τής G ανήκουν στην ίδια κλάση συζυγίας, τότε στην ανωτέρω έκφραση τού z ο συντελεστής λ_s τού ϵ_{g_s} ισούται με τον συντελεστή λ_t τού ϵ_{g_t}. Πράγματι, επειδή $z \in C(K[G])$, έχουμε $\forall g \in G, z\epsilon_g = \epsilon_g z$ και γι' αυτό $z = \epsilon_g z \epsilon_{g^{-1}}$. Επομένως,

$$z = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_{g_i} \lambda_i = \epsilon_g \left(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_{g_i} \lambda_i \right) \epsilon_{g^{-1}} = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_g \epsilon_{g_i} \epsilon_{g^{-1}} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_{g g_i g^{-1}} \lambda_i. \quad (3.6)$$

Εάν λοιπόν τα g_s και g_t είναι συζυγή στοιχεία, τότε υπάρχει κάποιο $g \in G$ με $g_t = g g_s g^{-1}$ και επειδή το $\{\epsilon_g, g \in G\}$ είναι ένα K-γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο, έπεται από την (3.6) ότι ο συντελεστής λ_t είναι ίσος με τον συντελεστή λ_s. Άρα, το z εκφράζεται ως $z = \sum_{i=1}^{\kappa} \sum_{h \in C_i} \epsilon_h \mu_i$, όπου μ_i είναι ο κοινός συντελεστής όλων των στοιχείων που ανήκουν στην κλάση C_i. Συνεπώς, $z = \sum_{i=1}^{\kappa} z_i \mu_i$ και το σύνολο των z_i αποτελεί ένα σύνολο K-γεννητόρων τού κέντρου τής $K[G]$. ♦

Ασκηση 50. *Να προσδιοριστεί το κέντρο τής ομαδοάλγεβρας* S_3*, όπου* S_3 *είναι η ομάδα των μετατάξεων ενός συνόλου με τρία στοιχεία.*

Ασκηση 51. *Να δειχθεί ότι ο πολλαπλασιασμός μιας ομαδοάλγεβρας* $K[G]$ *είναι μεταθετικός εάν και μόνο εάν η ομάδα* G *είναι μια μεταθετική ομάδα.*

3.3 Ομομορφισμοί Μοδίων και Αλγεβρών

3.3.1 *Ομομορφισμοί Μοδίων*

Έστω ότι R είναι ένας δακτύλιος και ότι M και N είναι δύο δεξιοί R-μόδιοι.

Ορισμός 3.3.1. *Μια απεικόνιση* $\varphi : M \to N$ *ονομάζεται ομομορφισμός* R*-μοδίων (ή* R*-ομομορφισμός), όταν για κάθε* $m, m' \in M$ *και* $r \in R$*, ισχύει:*

(α′) $\varphi(m + m') = \varphi(m) + \varphi(m')$,

(β′) $\varphi(mr) = \varphi(m)r$.

Με άλλα λόγια, ένας R-ομομορφισμός $\varphi : M \to N$ είναι ένας ομομορφισμός των υποκείμενων αβελιανών ομάδων, ο οποίος διατηρεί επίσης την πράξη τού πολλαπλασιασμού με τα στοιχεία τού δακτυλίου. Συνεπώς, οι ακόλουθες απλές ιδιότητες είναι άμεσες συνέπειες των αντίστοιχων ιδιοτήτων που ισχύουν στην περίπτωση των ομομορφισμών αβελιανών ομάδων.

(α′) $\varphi(0_M) = 0_N$.

(β′) Για κάθε $m \in M$, $\varphi(-m) = -\varphi(m)$.

(γ′) Για κάθε $m, m' \in M$, $\varphi(m - m') = \varphi(m) - \varphi(m')$.

Ο πυρήνας και η εικόνα ενός R-ομομορφισμού $\varphi : M \to N$ ορίζονται, ακριβώς όπως και στις περιπτώσεις των ομομορφισμών ομάδων και δακτυλίων .

Ορισμός 3.3.2. *Το σύνολο* $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{m \in M \mid \varphi(m) = 0_N\}$ *ονομάζεται πυρήνας τού* φ *και το σύνολο* $\varphi(M) = \{\varphi(m) \mid m \in M\}$ *ονομάζεται εικόνα τού* φ.

Η εικόνα $\varphi(M)$ ενός R-ομομορφισμού $\varphi : M \to N$ παριστάνεται συχνά και ως $\operatorname{Im}(\varphi)$.

Ο πυρήνας $\operatorname{Ker}(\varphi)$ οποιουδήποτε R-ομομορφισμού $\varphi : M \to N$ είναι αβελιανή υποομάδα τού M και η εικόνα $\varphi(M)$ είναι αβελιανή υποομάδα τού N.
Επιπλέον, ο πυρήνας $\operatorname{Ker}(\varphi)$ είναι κλειστός ως προς την πράξη τού βαθμωτού πολλαπλασιασμού με τα στοιχεία τού R, εφόσον $\forall m \in \operatorname{Ker}(\varphi), r \in R$ έχουμε $\varphi(mr) = \varphi(m)r = 0_N r = 0_N$. Άρα, το $mr \in \operatorname{Ker}(\varphi)$.
Ομοίως, η εικόνα $\varphi(M) = \{\varphi(m) \mid m \in M\}$ είναι κλειστή ως προς την πράξη τού βαθμωτού πολλαπλασιασμού με τα στοιχεία τού R, εφόσον $\forall \varphi(m) \in \varphi(M), r \in R$ έχουμε $\varphi(m)r = \varphi(mr)$. Άρα, το $\varphi(m)r \in \varphi(M)$.
Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.4.1, βλέπε σελ. 45, οι $\operatorname{Ker}(\varphi)$ και $\operatorname{Im}(\varphi)$ αποτελούν υπομόδιους των M και N αντιστοίχως.

Ένας ομομορφισμός R-μοδίων $\varphi : M \to N$ ονομάζεται *μονομορφισμός*, εάν είναι μια ενριπτική, δηλαδή «ένα προς ένα», απεικόνιση. Ο ομομορφισμός φ ονομάζεται *επιμορφισμός*, εάν είναι μια επιρριπτική, δηλαδή «επί», απεικόνιση. Τέλος, ο ομομορφισμός φ ονομάζεται *ισομορφισμός* R-μοδίων, εάν είναι μια αμφιρριπτική, δηλαδή μια ενριπτική και επιρριπτική απεικόνιση.

Στην περίπτωση ενός R-επιμορφισμού μοδίων $\varphi : M \to N$ ονομάζουμε τον μόδιο N *επιμορφική εικόνα* τού μοδίου M, επειδή ακριβώς $\varphi(M) = N$.

Οι επόμενες ιδιότητες των ομομορφισμών μοδίων είναι ανάλογες των αντίστοιχων ιδιοτήτων που διαθέτουν οι ομομορφισμοί ομάδων και δακτυλίων:

Παρατήρηση 3.3.3. *(α′) Εάν οι* $\varphi : M \to N$ *και* $\psi : N \to P$ *είναι* R*-ομομορφισμοί μοδίων, τότε η σύνθεσή τους* $\psi \circ \varphi : M \to P$ *είναι επίσης* R*-ομομορφισμός μοδίων.*

(β′) Εάν ο $\varphi : M \to N$ *είναι R-ισομορφισμός μοδίων, τότε και η αντίστροφη απεικόνιση* $\varphi^{-1} : N \to M$ *είναι επίσης R-ισομορφισμός μοδίων.*

(γ′) Εάν οι $\varphi : M \to N$ *και* $\psi : N \to P$ *είναι R-ισομορφισμοί μοδίων, τότε και η σύνθεση* $\psi \circ \varphi$ *είναι επίσης R-ισομορφισμός μοδίων.*

(δ′) Ένας R-ομομορφισμός μοδίων $\varphi : M \to N$ *είναι μονομορφισμός, εάν και μόνο εάν ο πυρήνας* $\mathrm{Ker}(\varphi)$ *ισούται με το μονοσύνολο* $\{0_M\}$.

Εάν $\varphi : M \to N$ είναι ένας ισομορφισμός R-μοδίων, τότε ο μόδιος M λέγεται R-*ισόμορφος* με τον μόδιο N. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.3.3 (ii), όταν ο R-μόδιος M είναι ισόμορφος με τον R-μόδιο N, τότε και ο N είναι R-ισόμορφος με τον M. Στη συγκεκριμένη περίπτωση ονομάζουμε τούς M και N *ισόμορφους* R-μόδιους και γράφουμε $M \cong N$. Δύο ισόμορφοι R-μόδιοι διαθέτουν *τις ίδιες ακριβώς αλγεβρικές ιδιότητες ως R-μόδιοι.*

Ασκηση 52. *Έστω* $\varphi : M \to M'$ *ένας ομομορφισμός R-μοδίων. Να δειχθεί ότι η επαγόμενη απεικόνιση* $\varphi' : M \to \varphi(M), m \mapsto \varphi(m)$ *αποτελεί έναν επιμορφισμό R-μοδίων με* $\mathrm{Ker}(\varphi') = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Παρατήρηση 3.3.4. *Έστω ότι M και N είναι δύο δεξιοί μόδιοι υπεράνω ενός δακτυλίου R. Από την Άσκηση 41 γνωρίζουμε ότι οι M και N αποτελούν αριστερούς μόδιους υπεράνω τού αντικείμενου δακτυλίου* R^{op}*, όπου ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός των στοιχείων τού M (και αντιστοίχως τού N) με τα στοιχεία τού* R^{op} *ορίζεται ως* $r * m := mr, \forall m \in M$ *και* $\forall r \in R^{op}$. *Επιπλέον, παρατηρούμε ότι κάθε R-ομομορφισμός* $\varphi : M \to N$ *των δεξιών R-μοδίων είναι και* R^{op}*-ομομορφισμός των αριστερών* R^{op}*-μοδίων M, N. Προφανώς ο* $\varphi : M \to N$ *είναι ένας ομομορφισμός των υποκείμενων αβελιανών ομάδων. Τώρα, για κάθε* $m \in M$ *και* $r \in R^{op}$ *έχουμε:* $\varphi(r * m) = \varphi(mr) = \varphi(m)r = r * \varphi(m)$. *Άρα, ο* φ *είναι ένας ομομορφισμός των* R^{op}*-μοδίων M και N.*

3.3.2 *Ομομορφισμοί Αλγεβρών*

Ορισμός 3.3.5. *Μια απεικόνιση* $\varphi : A \to B$*, όπου A και B είναι δύο R-άλγεβρες, ονομάζεται R-ομομορφισμός αλγεβρών, όταν είναι ομομορφισμός των υποκείμενων R-μοδίων, ο οποίος διατηρεί επίσης την πολλαπλασιαστική δομή των δακτυλίων, δηλαδή* $\forall a_1, a_2 \in A$: $\varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)$.

Με άλλα λόγια, ένας ομομορφισμός μεταξύ δύο R-αλγεβρών A και B είναι συγχρόνως ομομορφισμός των δακτυλίων A, B και ομομορφισμός των R-μοδίων A, B. Γι' αυτό και ο πυρήνας ενός ομομορφισμού R-αλγεβρών είναι πάντοτε ιδεώδες και η εικόνα είναι πάντοτε μια R-άλγεβρα.
Όμως, κάθε απεικόνιση μεταξύ δύο αλγεβρών που είναι ομομορφισμός δακτυλίων *δεν είναι απαραίτητο να είναι και* ομομορφισμός αλγεβρών. Μια τέτοια περίπτωση έχουμε στο αμέσως επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.3.6. *Έστω το σώμα* $\mathbb{C}$ *και η απεικόνιση* $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \varphi(z) := \bar{z}$*, δηλαδή η μιγαδική συζυγία. Η* φ *αποτελεί έναν ομομορφισμό δακτυλίων, αφού είναι γνωστό* *ότι για κάθε* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$*, ισχύει* $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ *και* $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$*. Όμως, η* φ *δεν αποτελεί ομομορφισμό* $\mathbb{C}$*-αλγεβρών, αφού δεν ισχύει πάντοτε* $\varphi(\lambda z) = \lambda\varphi(z)$ *(επί παραδείγματι* $\varphi(i(5+i)) = -i(5-i) \neq i(5-i) = i\varphi(5+i)$*). Εντούτοις, η* φ *αποτελεί έναν ομομορφισμό αλγεβρών από την* $\mathbb{R}$*-άλγεβρα* ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ *στον εαυτό της (γιατί;).*

Οι έννοιες τού πυρήνα, τής εικόνας, τού μονομορφισμού, τού επιμορφισμού και τού ισομορφισμού έχουν τα ανάλογά τους και στην περίπτωση των ομομορφισμών αλγεβρών. Όταν δυό R-άλγεβρες A, B είναι ισόμορφες, τότε γράφουμε $A \cong B$.

Ομομορφισμοί Μοδίων υπεράνω Αλγεβρών

Έστω ότι A είναι μια R-άλγεβρα Στην σελίδα 36 είδαμε ότι κάθε A-μόδιος μπορεί να θεωρηθεί και ως ένας R-μόδιος. Ομοίως, κάθε ομομορφισμός $\varphi : M \to N$ μεταξύ A-μοδίων μπορεί να θεωρηθεί ως ένας ομομορφισμός R-μοδίων, αφού

$$\forall m \in M, r \in R, \varphi(mr) = \varphi(m(1_A \cdot r)) = \varphi(m)(1_A \cdot r) = \varphi(m)r.$$

3.4 Υπομόδιοι και Πηλικομόδιοι

3.4.1 *Υπομόδιοι*

Έστω R ένας δακτύλιος και M_R ένας δεξιός R-μόδιος.

Ορισμός 3.4.1. *Ένα υποσύνολο* N *τού* M *ονομάζεται* R*-υπομόδιος τού* M*, εάν αποτελεί μια αβελιανή υποομάδα τού* M*, η οποία είναι κλειστή ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό με τα στοιχεία τού* R*.*

Με άλλα λόγια, ένα μη-κενό υποσύνολο N τού M είναι ένας υποομόδιος τού M, εάν $\forall n, n', \in N$ και $r \in R$, τα $n - n'$ και nr είναι στοιχεία τού N. Προφανώς, κάθε υπομόδιος τού M είναι ένας δεξιός R-μόδιος.
Εάν ${}_R M$ είναι ένας αριστερός R-μόδιος, τότε ένας ορισμός αντίστοιχος τού Ορισμού 3.4.1 ισχύει για τους υπομόδιους τού ${}_R M$.

Παράδειγμα 3.4.2. *Έστω* K *ένα σώμα και* V *ένας* K*-διανυσματικός χώρος, βλέπε Παράδειγμα 3.1.3. Κάθε διανυσματικός υπόχωρος* W *τού* V*, είναι ένας υπομόδιος τού* K*-μοδίου* V*.*

Παράδειγμα 3.4.3. *Έστω* $(G, +)$ *ένας δεξιός* $\mathbb{Z}$*-μόδιος, δηλαδή μια αβελιανή ομάδα, βλέπε Παράδειγμα 3.1.4. Κάθε υποομάδα* H *τής* G *είναι ένας υπομόδιος τού* G*.*

Παράδειγμα 3.4.4. *Κάθε δεξιό, αντιστοίχως αριστερό, ιδεώδες, ενός δακτυλίου* R *είναι υπομόδιος τού δεξιά κανονικού* R*-μοδίου* R_R*, αντιστοίχως τού αριστερά κανονικού* R*-μοδίου* ${}_R R$*.*

Ασκηση 53. *Έστω* $\mathcal{N} = \{N_i \mid i \in I\}$ *μια οικογένεια υπομοδίων ενός δεξιού* R*-μοδίου* M*.*

(α′) *Να δειχθεί ότι η τομή* $\cap_{i \in I} N_i$ *αποτελεί έναν υπομόδιο τού* M_R*.*

(β′) *Να δειχθεί, με τη βοήθεια ενός παραδείγματος, ότι η ένωση* $\cup_{i\in I} N_i$ *δεν αποτελεί πάντοτε έναν υπομόδιο τού* M_R.

Ασκηση 54. *Έστω* $\varphi : M \to M'$ *ένας ομομορφισμός* R*-μοδίων.*

(α′) *Να δειχθεί ότι, εάν* N *είναι ένας* R*-υπομόδιος τού* M*, τότε το* $\varphi(N) = \{\varphi(n) \mid n \in N\}$ *αποτελεί έναν* R*-υπομόδιο τού* M'.

(β′) *Να δειχθεί ότι, εάν* N' *είναι ένας* R*-υπομόδιος τού* M'*, τότε το* $\varphi^{-1}(N') = \{n \in M \mid \varphi(n) \in N'\}$ *αποτελεί έναν* R*-υπομόδιο τού* M' *που περιέχει τον πυρήνα* $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Υπομόδιοι και Σύνολα Γεννητόρων

Έστω ότι M είναι ένας δεξιός R-μόδιος, X ένα υποσύνολό του και ότι $\mathcal{N}_X$ είναι η ακόλουθη οικογένεια υποομοδίων τού M:

$$\mathcal{N}_X := \{N \mid N \text{ υπομόδιος τού } M, X \subseteq N\}.$$

Η τομή όλων των υπομοδίων N τού M που περιέχουν το X, δηλαδή το σύνολο

$$\bigcap_{N\in\mathcal{N}_X} N$$

αποτελεί έναν υπομόδιο τού M που ονομάζεται ο *παραγόμενος από το* X *υπομόδιος* τού M και παριστάνεται με $\langle X\rangle$. Το σύνολο X ονομάζεται *σύνολο γεννητόρων* τού $\langle X\rangle$ και τα στοιχεία τού X ονομάζονται *γεννήτορες* τού $\langle X\rangle$.
Για κάθε δεξιό R-μόδιο M έχουμε $\langle M\rangle = M$. Συνεπώς, κάθε R-μόδιος παράγεται από κάποιο υποσύνολό του.

Παρατήρηση 3.4.5. *Ο παραγόμενος από το* $X \subseteq M$ *υπομόδιος* $\langle X\rangle$ *τού* M_R *είναι ο μικρότερος, ως προς τη σχέση «*$\subseteq$*», υπομόδιος τού* M *που περιέχει το* X.
Πράγματι, ο $\langle X\rangle$ *είναι ένας υπομόδιος τού* M *που περιέχει το* X*. Εάν* N *είναι ένας υπομόδιος τού* M *με* $X \subseteq N$*, τότε ο* N *συμμετέχει στην τομή* $\langle X\rangle = \cap_{N\in\mathcal{N}_X} N$ *και συνεπώς* $\langle X\rangle \subseteq N$.

Ασκηση 55. *Να δειχθεί ότι ο υπομόδιος ενός* R*-μοδίου* M_R *που παράγεται από το κενό σύνολο ισούται με τον μηδενικό υπομόδιο* $\{0_M\}$ *τού* M_R.

Από την ανωτέρω άσκηση διαπιστώνουμε, κατά τετριμμένο τρόπο, ότι *διαφορετικά σύνολα γεννητόρων μπορεί να παράγουν τον ίδιο υπομόδιο* ενός R-μοδίου. (Στην παρούσα περίπτωση $\langle\emptyset\rangle = \langle 0_M\rangle = \{0_M\}$.)
Από τη Θεωρία των Ομάδων υπενθυμίζουμε ότι οι κυκλικές ομάδες G με τάξη $\circ(G) > 2$ έχουν πάντοτε περισσότερους τού ενός γεννήτορες και από τη Γραμμική Άλγεβρα υπενθυμίζουμε ότι κάθε υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου V που περιέχει μια βάση τού V αποτελεί σύνολο γεννητόρων τού V.

Θα δώσουμε τώρα μια διαφορετική περιγραφή τού $\langle X\rangle$, όταν X είναι οποιοδήποτε μηκενό υποσύνολο ενός R-μοδίου M.

Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{X} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i r_i \mid x_i \in X, r_i \in R, n \in \mathbb{N} \right\},$$

δηλαδή το σύνολο όλων των πεπερασμένων R-γραμμικών συνδυασμών με στοιχεία από το X.

Λήμμα 3.4.6. *Έστω X ένα μη-κενό υποσύνολο ενός R-μοδίου M. Το σύνολο $\mathcal{X}$ ισούται με τον υπομόδιο $\langle X \rangle$ τού M_R.*

Απόδειξη Το $\mathcal{X}$ είναι ένας υπομόδιος τού M, αφού η διαφορά δύο στοιχείων από το $\mathcal{X}$ είναι και πάλι ένας πεπερασμένος R-γραμμικός συνδυασμός με στοιχεία από το X και για κάθε $\sum_{i=1}^{n} x_i r_i \in \mathcal{X}$ και $s \in R$, το βαθμωτό γινόμενο $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i r_i\right) s = \sum_{i=1}^{n} x_i (r_i s)$ ανήκει και πάλι το στο $\mathcal{X}$. Προφανώς, $X \subseteq \mathcal{X}$. Επιπλέον, κάθε υπομόδιος N τού M με $X \subseteq N$ περιέχει όλα τα στοιχεία τού $\mathcal{X}$, αφού πρόκειται για πεπερασμένους R-γραμμικούς συνδυασμούς στοιχείων τού X και συνεπώς και τού N. Επομένως, $\mathcal{X} \subseteq \langle X \rangle$. Αλλά ο $\langle X \rangle$ είναι ο μικρότερος υπομόδιος που περιέχει το X· άρα, $\mathcal{X} = \langle X \rangle$. ♦

Έστω $\mathcal{N} = \{N_i \mid i \in I\}$ μια οικογένεια υπομοδίων ενός δεξιού R-μοδίου M. Ο υπομόδιος τού M που παράγεται από τη συνολοθεωρητική ένωση όλων των υπομοδίων τής οικογένειας $\mathcal{N}$, δηλαδή ο $\langle \cup_{N \in \mathcal{N}} N \rangle$ ονομάζεται *άθροισμα υπεράνω τού* $\mathcal{N}$ και συμβολίζεται με $\sum_{N \in \mathcal{N}} N$. Σύμφωνα με το Λήμμα 3.4.6, πρόκειται για το σύνολο όλων των πεπερασμένων R-γραμμικών συνδυασμών από στοιχεία που ανήκουν σε τουλάχιστον έναν από τους υπομόδιους N τής $\mathcal{N}$. Όταν η οικογένεια $\mathcal{N}$ είναι πεπερασμένη, ας πούμε $\mathcal{N} = \{N_1, N_2, \dots, N_t\}$, τότε το άθροισμα $\sum_{i=1}^{t} N_i$ παριστάνεται και ως $N_1 + N_2 + \cdots + N_t$.

Ασκηση 56. *Έστω $\mathcal{N} = \{N_i \mid i \in I\}$ μια οικογένεια υπομοδίων ενός δεξιού R-μοδίου M. Να δειχθεί ότι το άθροισμα $\sum_{N \in \mathcal{N}} N$ είναι ο μεγαλύτερος, ως προς τη σχέση «⊆», υπομόδιος τού M που περιέχει τους υπομόδιους N τής οικογένειας $\mathcal{N}$.*

Ορισμός 3.4.7. *Ένας υπομόδιος N ενός R-μοδίου M ονομάζεται κυκλικός ή μονογενής, εάν παράγεται από κάποιο μονοσύνολο $X = \{x\}$.*

Σύμφωνα με το Λήμμα 3.4.6, ο N είναι ένας κυκλικός υποομόδιος, αν και μόνο αν ο N ισούται με $\langle \{x\} \rangle = \{xr \mid r \in R\}$. Ο παραγόμενος από το μονοσύνολο $\{x\}$ υπομόδιος τού M παριστάνεται με xR.

Προφανώς, οι κυκλικοί υπόμοδιοι τού R_R συμπίπτουν με τα δεξιά κύρια ιδεώδη τού R, βλέπε σελ. 7.

Ορισμός 3.4.8. *Ένας R-υπομόδιος N ενός R-μοδίου M ονομάζεται πεπερασμένως παραγόμενος, εάν υπάρχει κάποιο πεπερασμένο υποσύνολό του X με $N = \langle X \rangle$.*

Συνεπώς, ένας R-υπομόδιος N ενός μοδίου M είναι πεπερασμένως παραγόμενος, αν και μόνο αν υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ τού M με $N = x_1 R + x_2 R + \cdots + x_n R$.

3.4.2 *Πηλικομόδιοι*

Όταν ο N είναι ένας υπομόδιος τού R-μοδίου M, τότε, όπως είναι ήδη γνωστό, ο N είναι μια υποομάδα τής αβελιανής ομάδας M, και γι' αυτό μπορει να οριστεί η πηλικοομάδα M/N. Κατ' ουσίαν, η M/N είναι ένας R-μόδιος, όπου ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός ορίζεται ως ακολούθως:

$$\cdot : M/N \times R \to M/N, \quad (m + N, r) \mapsto mr + N.$$

Η ανωτέρω απεικόνιση είναι «καλά ορισμένη», επειδή για κάθε $n \in N$ και $r \in R$, το nr ανήκει επίσης στο N. Εφόσον ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός ορίζεται στο πηλίκο M/N με τη βοήθεια τού βαθμωτού πολλαπλασιασμού τού αρχικού μοδίου M, είναι εύκολη η επιβεβαίωση ότι η πηλικοομάδα M/N είναι ένας δεξιός R-μόδιος.

Ορισμός 3.4.9. *Ο R-μόδιος M/N ονομάζεται ο πηλικομόδιος τού M ως προς N.*

Η κανονική απεικόνιση $\pi_N : M \to M/N$ είναι ένας επιρριπτικός ομομορφισμός R-μοδίων με πυρήνα N που ονομάζεται ο *κανονικός επιμορφισμός*.

Παράδειγμα 3.4.10. *Έστω ότι R είναι ένας δακτύλιος και I ένα δεξιό ιδεώδες του. Εφόσον το I είναι ένας δεξιός υποομόδιος τού δεξιά κανονικού μοδίου R_R, ορίζεται πάντοτε ο πηλικομόδιος R_R/I. Εάν $r + I$ είναι ένα στοιχείο τού R_R/I, τότε $r + I = (1_R + I)r$. Με άλλα λόγια, κάθε στοιχείο τού R_R/I είναι R-πολλαπλάσιο τού $1 + I$. Δηλαδή, ο R_R/I είναι ένας κυκλικός R-μόδιος.*

Ασκηση 57. *Έστω N ένας υπομόδιος ενός R-μοδίου M και $\pi_N : M \to M/N$ ο κανονικός επιμορφισμός. Να δειχθεί ότι για κάθε υποσύνολο $Y \neq \emptyset$, τού M, το $\pi_N^{-1}(\pi_N(Y)) = Y + N = \{y + n \mid y \in Y, n \in N\}$.*

Ασκηση 58. *Έστω ότι M είναι ένας R-μόδιος και L ένα αμφίπλευρο ιδεώδες τού R.*

(α') Να δειχθεί ότι το σύνολο

$$ML = \left\{ \sum_{i=1}^{n} m_i \ell_i \mid n \in \mathbb{N}, m_i \in M, \ell_i \in L \right\}$$

είναι ένας R-υπομόδιος τού M.

(β') Να δειχθεί ότι η αντιστοιχία

$$M/ML \times R/L \to M/ML, \quad (m + ML, r + L) \mapsto mr + ML$$

είναι μια καλά ορισμένη απεικόνιση, η οποία δομεί την πηλικοομάδα $M/ML = \{m + ML \mid m \in M\}$ σε έναν R/L-μόδιο.

Θεώρημα 3.4.11 (*Το Θεώρημα Αντιστοιχίας για Μοδίους*)**.** *Έστω ότι N είναι ένας υπομόδιος ενός R-μοδίου M. Η αντιστοιχία $\alpha : L \mapsto L/N = \{\ell + N \mid \ell \in L\}$ ορίζει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ τού συνόλου όλων των υπομοδίων L τού M που περιέχουν το N και τού συνόλου όλων των υπομοδίων τού M/N. Αντίστροφη τής α είναι η $\beta : T \mapsto \pi_N^{-1}(T)$, όπου $\pi_N : M \to M/N$ είναι ο κανονικός επιμορφισμός.*

Απόδειξη Έστω $\pi_N : M \to M/N$ ο κανονικός επιμορφισμός. Σύμφωνα με την Άσκηση 54, τα $\pi_N(L)$, όπου L οποιοσδήποτε υπομόδιος τού M και $\pi_N^{-1}(T)$, όπου T οποιοσδήποτε υπομόδιος τού M/N αποτελούν πάντοτε υπομόδιους των M/N και M αντιστοίχως. Για κάθε υπομόδιο T τού M/N, έχουμε $\beta(T) = \pi_N^{-1}(T) \supseteq \pi_N^{-1}(\{0+N\}) = N$· συνεπώς ο $\pi_N^{-1}(T)$ είναι ανήκει στο σύνολο των υπομοδίων τού M που περιέχουν τον N. Επιπλέον, $\alpha\beta(T) = \pi_N(\pi_N^{-1}(T)) = T$, αφού ο π_N είναι ένας επιμορφισμός. Τέλος, αν L είναι ένας υπομόδιος τού M με $L \supseteq N$, τότε $\beta\alpha(L) = \pi_N^{-1}(\pi_N(L)) = L + N = L$. Συνεπώς, η απεικόνιση α (αντιστοίχως β) είναι αντίστροφη τής β (αντιστοίχως τής α). ♦

Τώρα, θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε τα βασικά θεωρήματα ισομορφισμού για μόδιους που είναι ανάλογα των θεωρημάτων που ισχύουν για ομάδες.

3.4.3 *Τα Θεωρήματα Ισομορφισμού για Μοδίους*

Θεώρημα 3.4.12 (*Το Θεώρημα Παραγοντοποίησης για Μοδίους*).
Έστω $\varphi : M \to M'$ ένας ομομορφισμός R-μοδίων και N ένας υπομόδιος τού M. Εάν ο N περιέχεται στον πυρήνα $\mathrm{Ker}(\varphi)$ τού φ, τότε υπάρχει ένας μοναδικός ομομορφισμός $\overline{\varphi}$: $M/N \to M'$ με $\overline{\varphi} \circ \pi_N = \varphi$.
Επιπλέον, (i) *ο πυρήνας τού $\overline{\varphi}$ ισούται με* $\mathrm{Ker}(\varphi)/N$,
(ii) *ο $\overline{\varphi}$ είναι ένας επιμορφισμός, αν και μόνο αν ο φ είναι ένας επιμορφισμός,*
(iii) *ο $\overline{\varphi}$ είναι ένας μονομορφισμός, αν και μόνο αν* $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$ *και τέλος*
(iv) *ο $\overline{\varphi}$ είναι ένας ισομορφισμός, αν και μόνο αν ο φ είναι ένας επιμορφισμός και ο* N *ισούται με* $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Απόδειξη Η αντιστοιχία $\overline{\varphi} : M/N \to M', m + N \mapsto \overline{\varphi}(m+N) := \varphi(m)$ είναι μια καλά ορισμένη απεικόνιση, αφού αν $m_1 + N = m_2 + N$, τότε $m_1 - m_2 \in N \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$· συνεπώς, $\varphi(m_1) = \varphi(m_2)$ και γι' αυτό $\overline{\varphi}(m_1 + N) = \overline{\varphi}(m_2 + N)$. Αφήνουμε να επιβεβαιώσει ο αναγνώστης ότι η $\overline{\varphi}$ είναι ομομορφισμός R-μοδίων και ότι $\overline{\varphi} \circ \pi_N = \varphi$. Εάν τώρα $\psi : M/N \to M'$ είναι ένας ομομορφισμός R-μοδίων με $\psi \circ \pi_N = \varphi$, τότε για κάθε $m + N \in M/N$, έχουμε: $\psi(m+N) = \psi \circ \pi_N(m) = \varphi(m) = \overline{\varphi} \circ \pi_N(m) = \overline{\varphi}(m+N)$, δηλαδή $\psi = \overline{\varphi}$. Συνεπώς, ο $\overline{\varphi}$ είναι ο μοναδικός ομομορφισμός από το M/N στο M' με $\overline{\varphi} \circ \pi_N = \varphi$.

(i) Το στοιχείο $m + N \in \mathrm{Ker}(\overline{\varphi})$, αν και μόνο αν $\overline{\varphi}(m+N) = \varphi(m) = 0_{M'}$, αν και μόνο αν $m \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Επομένως, $\mathrm{Ker}(\overline{\varphi}) = \mathrm{Ker}(\varphi)/N$.

(ii) Εάν ο $\overline{\varphi}$ είναι επιμορφισμός, τότε είναι και ο $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi_N$ επιμορφισμός, ως σύνθεση επιμορφισμών. Εάν ο φ είναι επιμορφισμός, τότε είναι και ο $\overline{\varphi}$, αφού όταν η σύνθεση $f \circ g$ δύο οποιονδήποτε συνολοθεωρητικών απεικονίσεων είναι επίρριψη, τότε η f είναι πάντοτε επίρριψη.

(iii) Σύμφωνα με το (i), ο $\mathrm{Ker}(\overline{\varphi}) = \mathrm{Ker}(\varphi)/N$. Εάν λοιπόν, $\mathrm{Ker}(\varphi) = N$, τότε $\mathrm{Ker}(\overline{\varphi}) = \mathrm{Ker}(\varphi)/\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0 + \mathrm{Ker}(\varphi)\}$, και ο $\overline{\varphi}$ είναι μονομορφισμός.
Αντιστρόφως, αν ο $\overline{\varphi}$ είναι μονομορφισμός, τότε $\mathrm{Ker}(\overline{\varphi}) = \{0 + N\} = \mathrm{Ker}(\varphi)/N$ και συνεπώς $\mathrm{Ker}(\varphi) = N$.

(iv) Το συμπέρασμα είναι άμεσο από τα (ii) και (iii). ♦

Το ανωτέρω θεώρημα είναι ανάλογο τού Θεωρήματος Παραγοντοποίησης για Δακτυλίους, βλέπε Θεώρημα 1.3.5.

Θεώρημα 3.4.13 (*Το Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμού για Μοδίους*). *Εάν η απεικόνιση* $\varphi : M \to M'$ *είναι ένας ομομορφισμός* R*-μοδίων, τότε*

$$M/\mathrm{Ker}(\varphi) \cong \varphi(M).$$

Απόδειξη Θεωρούμε τον επαγόμενο από τον φ επιμορφισμό $\varphi' : M \to \varphi(M), m \mapsto \varphi(m)$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα Παραγοντοποίησης 3.4.12. ♦

Παρατήρηση 3.4.14. *Έστω* R *ένας δακτύλιος και* $M = mR$ *ένας κυκλικός* R*-μόδιος. Η απεικόνιση* $R_R \to mR, r \mapsto mr$ *είναι ένας επιρριπτικός ομομορφισμός* R*-μοδίων (γιατί;) με πυρήνα το δεξιό ιδεώδες* $I_m = \{r \in R \mid mr = 0_M\}$*. Σύμφωνα με το Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμού για Μοδίους, ο κυκλικός* R*-μόδιος* mR *είναι ισόμορφος με τον πηλικομόδιο* R_R/I_m*. Όπως ήδη γνωρίζουμε, βλέπε Παράδειγμα 3.4.10, κάθε πηλικομόδιος* R_R/I*, όπου* I *είναι ένα δεξιό ιδεώδες τού* R *είναι κυκλικός, αφού παράγεται από* $1_R + I$*. Συνεπώς, ένας* R*-μόδιος* M *είναι κυκλικός, αν και μόνο αν* $M \cong R_R/I$*, όπου* I *είναι ένα δεξιό ιδεώδες τού* R.

Ο Εκμηδενιστής ενός Μοδίου

Έστω R ένας δακτύλιος και M ένας δεξιός R-μόδιος.

Ορισμός 3.4.15. *Το σύνολο* $I_m = \{r \in R \mid mr = 0_M\}$ *ονομάζεται ο εκμηδενιστής τού στοιχείου* $m \in M$ *και παριστάνεται με* $\mathrm{Ann}_R(m)$.

Προφανώς, το I_m αποτελεί ένα δεξιό ιδεώδες τού R. Γενικότερα, αν N είναι ένα υποσύνολο τού M, τότε το υποσύνολο $\mathrm{Ann}_R(N) = \{r \in R \mid nr = 0_M, \forall n \in N\}$ είναι πάντοτε ένα δεξιό ιδεώδες τού R (*γιατί;*) και ονομάζεται ο εκμηδενιστής τού N.

Παρατήρηση 3.4.16. *Εάν ο* N *είναι ένας υπομόδιος τού* M*, τότε ο* $\mathrm{Ann}_R(N)$ *είναι ένα αμφίπλευρο ιδεώδες τού* R*. Σύμφωνα με όσα είπαμε, ο* $\mathrm{Ann}_R(N)$ *είναι ένα δεξιό ιδεώδες τού* R*. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι ο* $\mathrm{Ann}_R(N)$ *είναι κλειστός ως προς τον πολλαπλασιασμό από τα αριστερά με τα στοιχεία τού* R*. Εάν λοιπόν* $r \in R, r'\mathrm{Ann}_R(N)$*, τότε* $\forall n \in N$ *είναι* $n(rr') = (nr)r'$ *και επειδή το* $nr \in N$*, έπεται* $(nr)r' = 0$*, δηλαδή* $rr' \in \mathrm{Ann}_R(N)$.

Ασκηση 59. *Έστω* M *ένας δεξιός* R*-μόδιος. Να δειχθεί ότι*

$$\mathrm{Ann}_R(M) = \bigcap_{m \in M} \mathrm{Ann}_R(m).$$

Ασκηση 60. *Έστω ότι* R *είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος και* M *ένας* R*-μόδιος. Να δειχθεί ότι, εάν* $\mathcal{X}$ *είναι ένα σύνολο γεννητόρων τού* M*, τότε*

$$\mathrm{Ann}_R(M) = \bigcap_{x \in \mathcal{X}} \mathrm{Ann}_R(x).$$

Ασκηση 61. *Έστω ότι* S *είναι ένας δακτύλιος και* $R = \mathbb{M}_n(S)$ *ο δακτύλιος των* $n \times n$ *πινάκων με συνιστώσες από τον* S.

(α′) *Να δειχθεί ότι για κάθε στοιχειώδη πίνακα $e_{\kappa\kappa}$, ο κυκλικός R-μόδιος $e_{\kappa\kappa}R$ αποτελείται από εκείνους τους πίνακες τού R που έχουν όλες τις συνιστώσες τους ίσες με μηδέν, εκτός πιθανόν από τις συνιστώσες τής κ-οστής γραμμής.*

(β′) *Να δειχθεί ότι ο εκμηδενιστής $\mathrm{Ann}_R(e_{\kappa\kappa})$ αποτελείται από εκείνους τους πίνακες τού R που έχουν όλες τις συνιστώσες τής κ-οστής γραμμής ίσες με μηδέν.*

(γ′) *Να δειχθεί ότι ο εκμηδενιστής $\mathrm{Ann}_R(e_{\kappa\kappa}R)$ ισούται με $\{0_R\}$.*

Ορισμός 3.4.17. *Ένας R-μόδιος M ονομάζεται πιστός, όταν ο εκμηδενιστής του $\mathrm{Ann}_R(M)$ ισούται με το τετριμμένο ιδεώδες $\{0_R\}$.*

Παρατήρηση 3.4.18. *Έστω ότι M είναι ένας R-μόδιος και I ένα αμφίπλευρο ιδεώδες τού R με $I \subseteq \mathrm{Ann}_R(M)$. Η αντιστοιχία $M \times R/I \to M, (m, r + I) \mapsto mr$ αποτελεί μια καλά ορισμένη απεικόνιση, αφού αν $r + I = r' + I$, τότε $r - r' \in I$ και επειδή το I περιέχεται στον εκμηδενιστή τού M έχουμε $m(r - r') = 0$, δηλαδή $mr = mr'$. Χρησιμοποιώντας την ανωτέρω απεικόνιση ο R-μόδιος M προσλαβάνει τη δομή ενός R/I-μοδίου (γιατί);.*

Ασκηση 62. *Να δειχθεί ότι εάν $I \subseteq \mathrm{Ann}_R(M)$, τότε $\mathrm{Ann}_{R/I}(M) = \mathrm{Ann}_R(M)/I$.*

Παρατήρηση 3.4.19. *Η αμέσως προηγούμενη άσκηση φανερώνει ότι κάθε R-μόδιος M είναι πιστός, θεωρούμενος ως μόδιος υπεράνω τού πηλικοδακτυλίου $R/\mathrm{Ann}_R(M)$.*

Θεώρημα 3.4.20 (*Το Δεύτερο Θεώρημα Ισομορφισμού για Μοδίους*). *Εάν L και N είναι δύο υπομόδιοι ενός R-μοδίου M, τότε*

$$L + N/N \cong L/L \cap N.$$

Απόδειξη Έστω η αντιστοιχία $\varphi : L + N \to L/L \cap N, \ell + n \mapsto \ell + L \cap N$. Πρόκειται για μια καλά ορισμένη απεικόνιση, αφού αν $\ell + n = \ell' + n'$, τότε $\ell - \ell' = n - n' \in L \cap N$. Συνεπώς, $\ell + L \cap N = \ell' + L \cap N$. Επιπλέον, πρόκειται για έναν επιμορφισμό R-μοδίων (*γιατί;*). Θα υπολογίσουμε τώρα τον πυρήνα $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Ένα στοιχείο $\ell + n \in L + N$ ανήκει στον πυρήνα τού φ, αν και μόνο αν $\varphi(\ell + n) = \ell + L \cap N = 0 + L \cap N$, αν και μόνο αν $\ell \in L \cap N$, αν και μόνο αν $\ell + n \in N$. Επομένως, $\mathrm{Ker}(\varphi) = N$. Έτσι, από το Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμού για Μοδίους έπεται $L + N/N \cong \varphi(L + N) = L/L \cap N$. ♦

Θεώρημα 3.4.21 (*Το Τρίτο Θεώρημα Ισομορφισμού για Μοδίους*). *Έστω ότι L και N είναι δύο υπομόδιοι ενός R-μοδίου M. Εάν $N \subseteq L$, τότε*

$$M/L \cong (M/N)/(L/N).$$

Απόδειξη Θεωρούμε την αντιστοιχία $\varphi : M/N \to M/L, m + N \to m + L$. Πρόκειται για μια καλά ορισμένη απεικόνιση, αφού αν $m + N = m' + N$, τότε $m - m' \in N \subseteq L$ και επομένως $m + L = m' + L$. Επιπλέον, η φ είναι ένας επιμορφισμός R-μοδίων (*γιατί;*). Θα υπολογίσουμε τώρα τον πυρήνα $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Ένα στοιχείο $m + N \in M/N$ ανήκει στον πυρήνα τού φ, αν και μόνο αν $m + L = 0 + L$, αν και μόνο αν το στοιχείο m ανήκει στο L. Άρα, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{m + N \mid m \in L\} = L/N$. Έτσι, από το Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμού για Μοδίους έπεται $(M/N)/(L/N) \cong M/L$. ♦

Ειδικότερα, τα ανωτέρω δύο θεωρήματα εφαρμόζονται στην περίπτωση δύο δεξιών (αντιστοίχως αριστερών) ιδεωδών I και J ενός δακτυλίου R, εφόσον αυτά μπορούν να θεωρηθούν ως δεξιά (αντιστοίχως αριστερά) R-υπομόδια τού δεξιού R-μοδίου R_R (αντιστοίχως τού αριστερού R-μοδίου ${}_R R$). Στη βιβλιογραφία αναφέρονται συχνά ως το Δεύτερο και Τρίτο Θεώρημα Ισομορφισμού για Δακτυλίους. Μια εξειδικευμένη εφαρμογή τού Τρίτου Θεωρήματος Ισομορφισμού για Μοδίους είναι η περίπτωση όπου R είναι ένας δακτύλιος και I, J είναι δύο αμφίπλευρα ιδεώδη του με $I \subseteq J$, βλέπε Άσκηση 19.

Ασκηση 63. *(α′) Να δειχθεί ότι κάθε υπομόδιος τού πηλικομοδίου M/N μπορεί να εκφραστεί ως $(L+N)/N$, όπου N είναι κάποιος υπομόδιος τού M.*

(β′) Να εξεταστεί εάν το L οφείλει να περιέχει το N.

3.5 Υποάλγεβρες και Πηλικοάλγεβρες

3.5.1 *Υποάλγεβρες*

Έστω A μια R-άλγεβρα. Ένας R-υπομόδιος B τής A που είναι και υποδακτύλιος τής A ονομάζεται μια R-*υποάλγεβρα* τής A.

Παράδειγμα 3.5.1. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος και $\mathbb{M}_n(R)$ η R-άλγεβρα των $n \times n$ πινάκων με συνιστώσες από τον R. Το σύνολο των άνω τριγωνικών πινάκων, δηλαδή όλων των πινάκων (r_{ij}) με $r_{ij} = 0$ όταν $j < i$ αποτελεί μια υποάλγεβρα τής $\mathbb{M}_n(R)$. Η συγκεκριμένη άλγεβρα ονομάζεται η άλγεβρα των άνω τριγωνικών πινάκων και συμβολίζεται με $T_n(R)$.*

Παράδειγμα 3.5.2. *Το σύνολο των διαγώνιων πινάκων (r_{ij}), δηλαδή όλων των πινάκων (r_{ij}) με $r_{ij} = 0$ όταν $i \neq j$ αποτελεί μια υποάλγεβρα τής $\mathbb{M}_n(R)$. Η συγκεκριμένη άλγεβρα ονομάζεται η άλγεβρα των διαγώνιων πινάκων και συμβολίζεται με $D_n(R)$.*

Παράδειγμα 3.5.3. *Το σύνολο όλων των πινάκων τής μορφής*

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & \dots & r_{n-1} & r_n \\ 0 & r_1 & r_2 & \dots & r_{n-2} & r_{n-1} \\ 0 & 0 & r_1 & \dots & r_{n-3} & r_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_1 & r_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r_1 \end{pmatrix}$$

αποτελεί μια υποάλγεβρα τής $\mathbb{M}_n(R)$. Εάν ο δακτύλιος R είναι σώμα, η διάσταση τής ανωτέρω άλγεβρας ισούται με n. Η συγκεκριμένη άλγεβρα ονομάζεται η άλγεβρα Jordan και συμβολίζεται με $J_n(R)$.

Παράδειγμα 3.5.4. *Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και H μια υποομάδα της. Η ομαδοάλγεβρα $K[H]$ είναι υποάλγεβρα τής $K[G]$.*

Παράδειγμα 3.5.5. *Το κέντρο[2] $C(A)$ μιας R-άλγεβρας A είναι R-υποάλγεβρα τής A.*

[2]Υπενθυμίζουμε ότι το κέντρο οποιουδήποτε δακτυλίου A είναι ένας υποδακτύλιος τού A.

Ιδιαιτέρως για τις πεπερασμένης διάστασης άλγεβρες υπεράνω ενός σώματος έχουμε την εξής συνέπεια τού Πορίσματος 3.2.10:

Πόρισμα 3.5.6. *Έστω K ένα σώμα. Κάθε K-υποάλγεβρα μιας πεπερασμένης διάστασης διαιρετικής K-άλγεβρας είναι επίσης μια διαιρετική άλγεβρα. Ιδιαιτέρως, το κέντρο μιας πεπερασμένης διάστασης διαιρετικής K-άλγεβρας είναι σώμα.*

3.5.2 *Πηλικοάλγεβρες*

Έστω μια R-άλγεβρα A και I ένα αμφίπλευρο ιδεώδες I τής A. Το ιδεώδες I αποτελεί έναν δεξιό R-μόδιο, αφού $\forall i \in I, r \in R$ είναι $i \cdot r = (i1_A) \cdot r = i(r \cdot 1_A)\cdot$ το τελευταίο στοιχείο ανήκει στο I, αφού το I είναι ιδεώδες τής A. Επομένως, ο πηλικοδακτύλιος A/I είναι επίσης και R-πηλικομόδιος. Τώρα, λαμβάνοντας υπόψιν (i) τον επαγόμενο πολλαπλασιασμό στον πηλικοδακτύλιο A/I, (ii) τον επαγόμενο R-βαθμωτό πολλαπλασιασμό στον πηλικομόδιο A/I και (iii) το γεγονός ότι η A είναι μια R-άλγεβρα, δηλαδή τις σχέσεις (3.1) έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\forall a+I, b+I, r \in R,\\
&[(a+I)(b+I)]\cdot r = (ab+I)\cdot r = ((ab)\cdot r + I) = a(b\cdot r) + I =\\
&(a+I)(b\cdot r + I) = (a+I)[(b+I)\cdot r],\\
&a(b\cdot r) + I = (a\cdot r)b + I = [(a\cdot r)+I](b+I) = [(a+I)\cdot r](b+I)
\end{aligned}$$

και γι' αυτό

$$\begin{aligned}
&\forall a+I, b+I, r \in R,\\
&[(a+I)(b+I)]\cdot r = (a+I)[(b+I)\cdot r] = [(a+I)\cdot r](b+I).
\end{aligned}$$

Συνεπώς, το A/I είναι μια R-άλγεβρα.
Ένα θεώρημα ανάλογο των θεωρημάτων αντιστοιχίας για δακτυλίους και μόδιους, βλέπε Θεώρημα 1.3.4 και Θεώρημα 3.4.11, καθώς και των θεωρημάτων παραγοντοποίησης για δακτυλίους και μόδιους ισχύει και στην περίπτωση των πηλικοαλγεβρών, βλέπε Θεωρήματα 1.3.5 και 3.4.12. Τέλος, το Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμού για Δακτυλίους, βλέπε Θεώρημα 1.3.7, επεκτείνεται και στην περίπτωση των αλγεβρών.

Μονογενείς K-Άλγεβρες

Έστω ότι A είναι μια άλγεβρα (όχι απαραίτητα πεπερασμένης διάστασης) υπεράνω ενός σώματος K και ότι a είναι ένα στοιχείο της. Η απεικόνιση

$$\varphi_a : K[x] \to A, \quad f(x) \mapsto f(a)$$

είναι ένας ομομορφισμός K-αλγεβρών (*γιατί;*).
Ο πυρήνας τού φ_a είναι ένα (αμφίπλευρο) ιδεώδες[3] τού $K[x]$ και η εικόνα $\varphi_a(K[x])$ είναι

[3]Ούτως ή άλλως, ο $K[x]$ έχει μόνο αμφίπλευρα ιδεώδη, αφού είναι μεταθετικός δακτύλιος.

η K-υποάλγεβρα $\{f(a) \in A \mid f(x) \in K[x]\} \subseteq A$. Η συγκεκριμένη υποάλγεβρα ονομάζεται η *μονογενής υποάλγεβρα τής* A *που παράγεται από το στοιχείο* a και παριστάνεται με $K[a]$. Συμφωνα με την επέκταση του Πρώτου Θεωρήματος Ισομορφισμού Δακτυλίων στην περίπτωση των αλγεβρών, βλέπε Θεώρημα 1.3.7, έχουμε τον ακόλουθο ισομορφισμό K-αλγεβρών:

$$K[x]/\mathrm{Ker}(\varphi_a) \cong K[a], \quad f(x) + \mathrm{Ker}(\varphi_a) \mapsto f(a).$$

Πρόταση 3.5.7. (i) *Ο πυρήνας τού ομομορφισμού* $\varphi_a : K[x] \to A$ *είναι ένα κύριο ιδεώδες* $\langle p(x)\rangle$ *τού* $K[x]$.

(ii) *Η* K-*υποάλγεβρα* $K[a]$ *έχει πεπερασμένη* K-*διάσταση αν και μόνο αν* $\mathrm{Ker}(\varphi_a) = \langle p(x)\rangle \neq \{0\}$ *και στην περίπτωση αυτή η διάστασή της* $\dim_K K[a]$ *ισούται με τον βαθμό* $\deg p(x)$ *τού πολυωνύμου* $p(x)$.

Απόδειξη Ένα πολύ γνωστό αποτέλεσμα της Θεωρίας Μεταθετικών Δακτυλίων μάς πληροφορεί ότι ο δακτύλιος πολυωνύμων $K[x]$ μιας μεταβλητής υπεράνω ενός σώματος K αποτελεί περιοχή κυρίων ιδεωδών, βλέπε σελ. 13. Ωστόσο, εδώ θα εκτελέσουμε μια άμεση απόδειξη.
(i) Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
(α') $\mathrm{Ker}(\varphi_a) = \{0\}$. Επομένως, ο πυρήνας είναι ένα κύριο ιδεώδες τού $K[x]$.
(β') $\mathrm{Ker}(\varphi_a) \neq \{0\}$. Έστω $p(x) \neq 0$ ένα πολυώνυμο ελάχιστου βαθμού μεταξύ των πολυωνύμων που ανήκουν στον $\mathrm{Ker}(\varphi_a)$. Θα δείξουμε ότι $\mathrm{Ker}(\varphi_a) = \langle p(x)\rangle$.
Προφανώς, $\langle p(x)\rangle \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi_a)$.
Υπολείπεται η απόδειξη ότι $\mathrm{Ker}(\varphi_a) \subseteq \langle p(x)\rangle$. Εάν $g(x) \in \mathrm{Ker}(\varphi_a)$, τότε εκτελώντας την ευκλείδεια διαίρεση με υπόλοιπο τού $g(x)$ δια $p(x)$ παίρνουμε:

$$g(x) = p(x)\ell(x) + r(x), \text{ όπου ή } r(x) = 0, \text{ ή } \deg r(x) < \deg p(x).$$

Στη δεύτερη περίπτωση έπεται $0 = g(a) = p(a)\ell(a) + r(a) = 0 + r(a) = r(a)$, δηλαδή το $r(x)$ ανήκει στον πυρήνα $\mathrm{Ker}(\varphi_a)$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού πρόκειται για ένα πολυώνυμο με βαθμό μικρότερο από τον βαθμό τού $p(x)$, το οποίο έχει τον ελάχιστο βαθμό μεταξύ των των πολυωνύμων που ανήκουν $\mathrm{Ker}(\varphi_a)$. Άρα, $r(x) = 0$ και το $g(x) \in \langle p(x)\rangle$.
Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.
(ii) Εάν $\mathrm{Ker}(\varphi_a) = \{0\}$, τότε $K[x] \cong K[a]$ και εφόσον η $K[x]$ είναι άπειρης διάστασης, το ίδιο συμβαίνει και με την $K[a]$.
Εάν $\mathrm{Ker}(\varphi_a) = \langle p(x)\rangle \neq \{0\}$, τότε $K[x]/\langle p(x)\rangle \cong K[a]$. Η K-διάσταση τής $K[x]/\langle p(x)\rangle$ ισούται με $\deg p(x)$, βλέπε Άσκηση 64· άρα και $\dim_K K[a] = \deg p(x)$. ♦

Ασκηση 64. *Να δειχθεί ότι* $\dim_K K[x]/\langle p(x)\rangle = \deg p(x)$.
(Υπόδειξη: Να αποδείξετε ότι το $\{1 + \langle p(x)\rangle, x + \langle p(x)\rangle, \ldots, x^{\deg p(x)-1} + \langle p(x)\rangle\}$ *αποτελεί μια* K-*βάση τού* $K[x]/\langle p(x)\rangle$.*)*

Εάν $\mathrm{Ker}(\varphi_a) = \langle p(x)\rangle \neq \{0\}$ και $\alpha \neq 0$ είναι ο συντελεστής τού μεγιστοβάθμιου όρου τού $p(x)$, τότε το ιδεώδες $\langle p(x)\rangle = \langle \alpha^{-1}p(x)\rangle$, βλέπε Άσκηση 15.
Το πολυώνυμο $\alpha^{-1}p(x)$ είναι το *μοναδικό πολυώνυμο με μεγιστοβάθμιο συντελεστή το* 1_K *που παράγει το κύριο ιδεώδες* $\mathrm{Ker}(\varphi_a)$ *(γιατί;)* και ονομάζεται το *ελάχιστο πολυώνυμο* τού στοιχείου $a \in A$. Θα το συμβολίζουμε με $m_a(x)$.

Παρατήρηση 3.5.8. *(α′) Εάν A είναι μια πεπερασμένης διάστασης άλγεβρα υπεράνω ενός σώματος K, τότε $\forall a \in A$, η αντίστοιχη μονογενής υποάλγεβρα $K[a]$ είναι επίσης πεπερασμένης διάστασης υπεράνω τού K, αφού πρόκειται για K-υπόχωρο τής A. Συνεπώς, το ελάχιστο πολυώνυμο $m_a(x)$ ορίζεται για κάθε $a \in A$.*

(β′) Σύμφωνα με την Πρόταση 3.5.7, κάθε $f(x) \in K[x]$ με $f(a) = 0$ διαιρείται από το $m_a(x)$.

Πρόταση 3.5.9. *Έστω A μια πεπερασμένης διάστασης άλγεβρα υπεράνω ενός σώματος K. Εάν A είναι μια διαιρετική άλγεβρα, τότε για κάθε $a \in A$, το ελάχιστο πολυώνυμο $m_a(x)$ είναι ένα ανάγωγο πολυώνυμο τού $K[x]$.*

Απόδειξη Εάν $m_a(x) = f(x)g(x)$ με $\deg f(x), \deg g(x) < \deg m_a(x)$, τότε $0 = m_a(a) = f(a)g(a)$. Αυτό είναι άτοπο, αφού τα $f(x), g(x)$ έχοντας βαθμούς μικρότερους από το $m_a(x)$ δεν ανήκουν στον $\mathrm{Ker}(\varphi_a)$, γι' αυτό $f(a) \neq 0$ και $g(a) \neq 0$ και επειδή η A είναι μια διαιρετική άλγεβρα, έπεται $0 \neq f(a)g(a)$. ♦

Πόρισμα 3.5.10. *Εάν K είναι ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα, τότε η μοναδική διαιρετική άλγεβρα A πεπερασμένης διάστασης υπεράνω τού K είναι το ίδιο το K.*

Απόδειξη Έστω $a \in A$ και $m_a(x)$ το ελάχιστο πολυώνυμο τού a. Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, το $m_a(x)$ είναι ανάγωγο. Αλλά τα μοναδικά ανάγωγα πολυώνυμα ενός αλγεβρικώς κλειστού σώματος είναι τα γραμμικά πολυώνυμα και έτσι $m_a(x) = x - a \in K[x]$. Ο σταθερός όρος τού $m_a(x)$ ανήκει στο σώμα K, δηλαδή $a \in K$. ♦

Η Ταξινόμηση των Αλγεβρών Διάστασης μικρότερης ή ίσης τού δύο υπεράνω ενός Σώματος K

Ο θεμελιώδης σκοπός οποιασδήποτε μαθηματικής θεωρίας είναι η ταξινόμηση των αντικειμένων που μελετά. Στην παρούσα ενότητα χρησιμοποιώντας ορισμένες από τις έννοιες που είδαμε μέχρι τώρα, θα ταξινομήσουμε τις K-άλγεβρες A με διάσταση $\dim_K A \leq 2$.

Εάν $\dim_K A = 1$, τότε μια K-βάση τής A είναι το μονοοσύνολο $\{1_A\}$ και η απεικόνιση $K \to A, k \mapsto 1_A k$ είναι ένας ισομορφισμός K-αλγεβρών. Συνεπώς, η A είναι ένα σώμα ισόμορφο, ως δακτύλιος, με το K.

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση $\dim_K A = 2$.

Θεώρημα 3.5.11. *Έστω A μια K-άλγεβρα υπεράνω ενός σώματος K. Εάν η K-διάσταση τής A ισούται με 2, τότε η A εντάσσεται σε ακριβώς μία από τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:*

(i) *ή διαθέτει μια K-βάση $\{1_A, b\}$ με $b^2 = 0$,*

(ii) *ή διαθέτει μια K-βάση $\{1_A, b\}$ με $b^2 = b$,*

(iii) *ή είναι ένα σώμα.*

Απόδειξη Η άλγεβρα A διαθέτει μια βάση, όπου, χωρίς περιορισμό τής γενικότητας, ένα από τα δύο στοιχεία της είναι το 1_A· έστω την $\{1_A, a\}$.

Η απεικόνιση $\varphi_a : K[x] \to A, f(x) \mapsto f(a)$ είναι ένας επιμορφισμός K-αλγεβρών (*γιατί;*) με πυρήνα το κύριο ιδεώδες $\langle m_a(x) \rangle$, όπου $m_a(x)$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο τού a και ο ομομορφισμός K-αλγεβρών

$$\overline{\varphi}_a : K[x]/\langle m_a(x) \rangle \to A, f(x) + \langle m_a(x) \rangle \mapsto f(a),$$

είναι ένας ισομορφισμός.
Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:
(i) Το $m_a(x)$ διαθέτει μια διπλή θέση μηδενισμού κ στο σώμα K, δηλαδή $m_a(x) = (x-\kappa)^2$, τότε το στοιχείο $\theta = (x-\kappa)+\langle m_a(x) \rangle \in K[x]/\langle m_a(x) \rangle$ υψούμενο στο τετράγωνο ισούται με μηδέν και γι' αυτό και η εικόνα $\overline{\varphi}_a(\theta) = a - \kappa = b \in A$ υψούμενη στο τετράγωνο ισούται με μηδέν. Προφανώς, το σύνολο $\{1_A, b\}$ αποτελεί K-βάση τής A.
(ii) Το $m_a(x)$ διαθέτει δύο διαφορετικές θέσεις μηδενισμού κ_1 και κ_2 στο σώμα K, δηλαδή $m_a(x) = (x - \kappa_1)(x - \kappa_2)$, τότε στην άλγεβρα $K[x]/\langle m_a(x) \rangle$ έχουμε

$$(x - \kappa_1)x + \langle m_a(x) \rangle = (x - \kappa_1)\kappa_2 + \langle m_a(x) \rangle. \qquad (*)$$

Θεωρούμε το στοιχείο $\theta = (x - \kappa_1)(\kappa_2 - \kappa_1)^{-1} + \langle m_a(x) \rangle \in K[x]/\langle m_a(x) \rangle$ και ισχυριζόμαστε ότι υψούμενο στο τετράγωνο ισούται με τον εαυτό του.
Πράγματι,

$$\theta^2 = [(x - \kappa_1)x - (x - \kappa_1)\kappa_1](\kappa_2 - \kappa_1)^{-2} + \langle m_a(x) \rangle$$

και λόγω τής $(*)$ έπεται

$$\begin{aligned}\theta^2 &= (x - \kappa_1)\kappa_2 - (x - \kappa_1)\kappa_1](\kappa_2 - \kappa_1)^{-2} + \langle m_a(x) \rangle = \\ &(x - \kappa_1)(\kappa_2 - \kappa_1)(\kappa_2 - \kappa_1)^{-2} + \langle m_a(x) \rangle = (x - \kappa_1)(\kappa_2 - \kappa_1)^{-1} + \langle m_a(x) \rangle = \theta.\end{aligned}$$

Επομένως, για την εικόνα $\overline{\varphi}_a(\theta) = (a-\kappa_1)(\kappa_2-\kappa_1)^{-1} = b$, έχουμε $b^2 = b$. Προφανώς, το σύνολο $\{1_A, b\}$ αποτελεί K-βάση τής A.
(iii) Το $m_a(x)$ δεν διαθέτει θέσεις μηδενισμού στο σώμα K· τότε βέβαια είναι ένα ανάγωγο πολυώνυμο τού K[x] και η άλγεβρα $K[x]/\langle m_a(x) \rangle$ είναι σώμα[4], άρα και η ισόμορφη K-άλγεβρα A είναι σώμα. ♦

Παρατήρηση 3.5.12. *(α') Είναι φανερό ότι αν* A *και* A' *είναι δύο K-άλγεβρες που εμπίπτουν στην περίπτωση (i) τού Θεωρήματος 3.5.11, τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός K-αλγεβρών από τη μία στην άλλη, αφού και οι δύο είναι ισόμορφες με την K-άλγεβρα* $K[x]/\langle x^2 \rangle$ *(γιατί;).*
Το ίδιο ισχύει και για τις K-άλγεβρες που εμπίπτουν στην περίπτωση (ii)· είναι όλες ισόμορφες με την K-άλγεβρα $K[x]/\langle x(x-1) \rangle$ *(γιατί;).*
Όμως δύο K-άλγεβρες που εμπίπτουν στην περίπτωση (iii), δηλαδή δύο σώματα, δεν είναι απαραίτητο να είναι ισόμορφα, βλέπε Άσκηση 66.

[4]Έστω K[x] ο δακτύλιος πολυωνύμων μιας μεταβλητής υπεράνω ενός σώματος K[x] και $p(x)$ ένα ανάγωγο πολυώνυμό του. Είναι γνωστό από τη Θεωρία των Μεταθετικών Δακτυλίων ότι ο πηλικοδακτύλιος $K[x]/\langle p(x) \rangle$ είναι σώμα. Ωστόσο, θα παρουσιάσουμε εδώ μια άμεση απόδειξη. Εάν $f(x) + \langle p(x) \rangle \neq 0 + \langle p(x) \rangle$, τότε το πολυώνυμο $f(x)$ δεν είναι πολλαπλάσιο τού $p(x)$ και επειδή το $p(x)$ είναι ανάγωγο, ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $p(x)$ και $f(x)$ είναι ίσος με 1. Γι' αυτό $1 = p(x)h(x) + f(x)g(x)$, για κάποια πολυώνυμα $h(x), g(x) \in K[x]$. Επομένως, $1 + \langle p(x) \rangle = (p(x)h(x) + f(x)g(x)) + \langle p(x) \rangle = f(x)g(x) + \langle p(x) \rangle$ και το στοιχείο $g(x) + \langle p(x) \rangle$ είναι το αντίστροφο τού $f(x) + \langle p(x) \rangle$ στον δακτύλιο $K[x]/\langle p(x) \rangle$.

(β′) *Εάν το K είναι ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα, τότε η περίπτωση (iii) τού ανωτέρω θεωρήματος είναι αδύνατη.*

Ασκηση 65. *Έστω K ένα σώμα.*

(α′) *Να δειχθεί ότι η άλγεβρα Jordan $A = J_2(K)$, βλέπε σελ. 52, διαθέτει μια K-βάση με $\{1_A, b\}$ με $b^2 = 0$.*

(β′) *Να δειχθεί ότι η άλγεβρα των διαγώνιων πινάκων $A = D_2(K)$, βλέπε σελ. 52, διαθέτει μια K-βάση με $\{1_A, b\}$ με $b^2 = b$.*

Ασκηση 66. *Στο Παράδειγμα 3.2.11 είδαμε ότι οι $\mathbb{Q}$-άλγεβρες $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ και $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ είναι διάστασης 2 υπεράνω τού $\mathbb{Q}$ καθώς επίσης ότι πρόκειται για σώματα. Να δειχθεί ότι οι συγκεκριμένες άλγεβρες δεν είναι ισόμορφες. (Πρόκειται για σώματα που εμπίπτουν στην περίπτωση (iii) τού Θεωρήματος 3.5.11.)*

3.6 Ευθέα Αθροίσματα και ελεύθεροι Μόδιοι

Έστω $(M_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια R-μοδίων, όπου R είναι ένας δακτύλιος. Το *ευθύ γινόμενο* τής οικογένειας $(M_i)_{i\in I}$ των R-μοδίων M_i, $i \in I$, ορίζεται όπως και το ευθύ γινόμενο δακτυλίων, βλέπε σελ. 18. Στοιχεία τού ευθέος γινομένου είναι τα $(m_i)_{i\in I}$, $m_i \in M_i$, η πρόσθεση ορίζεται ως $(m_i)_{i\in I} + (m'_i)_{i\in I} := (m_i + m'_i)_{i\in I}$ και το βαθμωτό γινόμενο με τα στοιχεία $r \in R$ ως $(m_i)_{i\in I} \cdot r := (m_i r)_{i\in I}$.

Το ευθύ γινόμενο τής οικογένειας $(M_i)_{i\in I}$ συμβολίζεται με $\prod_{i\in I} M_i$. Για κάθε $j \in I$, η απεικόνιση $p_j : \prod_{i\in I} M_i \to M_j$, $(m_i)_{i\in I} \mapsto m_j$ είναι ένας επιμορφισμός R-μοδίων και ονομάζεται η *κανονική προβολή* στην j-οστή συνιστώσα.

Ασκηση 67. *(Η Καθολικότητα τού ευθέος Γινομένου Μοδίων.) Να δειχθεί ότι για οποιαδήποτε οικογένεια $(\varphi_i : M \to M_i)_{i\in I}$ ομομορφισμών R-μοδίων υπάρχει ένας μοναδικός ομομορφισμός $\varphi : M \to \prod_{i\in I} M_i$ με $\varphi_j = p_j \circ \varphi, \forall j \in I$.*

Παρατηρούμε ότι όταν το σύνολο των δεικτών I είναι άπειρο και $(M_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια μη-μηδενικών μοδίων, τότε *δεν εκφράζεται* κάθε στοιχείο $(m_i)_{i\in I}$ ως άθροισμα των συνιστωσών του, αφού δεν γενικώς δεν ορίζεται άθροισμα στοιχείων με άπειρους το πλήθος μη-μηδενικούς προσθετέους. Ωστόσο, υπάρχει μια παρεμφερής τού ευθέος γινομένου έννοια που παρακάμπτει αυτή τή δυσκολία.

3.6.1 *Το ευθύ Άθροισμα Μοδίων*

Ορισμός 3.6.1. *Το εξωτερικό ευθύ άθροισμα τής οικογένειας $(M_i)_{i\in I}$ αποτελείται από τα στοιχεία $(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$ που έχουν το πολύ πεπερασμένο το πλήθος μη μηδενικές συνιστώσες.*

Δηλαδή, $m_i \neq 0_{M_i}$ μόνο για ένα πεπερασμένο ή κενό υποσύνολο J τού I. Το εξωτερικό ευθύ άθροισμα τής οικογένειας $(M_i)_{i\in I}$ συμβολίζεται με $\oplus_{i\in I} M_i$.
Προφανώς, εάν το σύνολο δεικτών I είναι πεπερασμένο, τότε $\prod_{i\in I} M_i = \oplus_{i\in I} M_i$. Τέλος,

αν για κάθε $i \in I$, έχουμε $M_i = M$ και το I διαθέτει πεπερασμένο το πλήθος στοιχεία, ας πούμε n, τότε το ευθύ άθροισμα τής οικογένειας $(M_i)_{i\in I}$ παριστάνεται και ως $M^{(n)}$.

Ορισμός 3.6.2. *Ο R-μόδιος M είναι το εσωτερικό ευθύ άθροισμα τής οικογένειας των υπομοδίων $(M_i)_{i\in I}$, όταν κάθε $m \in M$ μπορεί να εκφραστεί κατά μοναδικό τρόπο ως ένα (πεπερασμένο) άθροισμα από στοιχεία των M_i, δηλαδή $m = m_{i_1} + m_{i_2} + \cdots + m_{i_n}, m_{i_k} \in M_{i_k}, 1 \le k \le n$, όπου $\forall k, \ell, 1 \le k, \ell \le n$ και $k \ne \ell$ είναι $i_k \ne i_\ell$. (Ο φυσικός n και τα m_{i_k} εξαρτώνται από το m.)*

Πρόταση 3.6.3. *Εάν ο R-μόδιος M είναι το εσωτερικό άθροισμα τής οικογένειας των υπομοδίων $(M_i)_i \in I$, τότε το εξωτερικό ευθύ άθροισμα $\oplus_{i\in I} M_i$ είναι ισόμορφο με τον R-μόδιο M.*

Απόδειξη Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση

$$\varphi : \oplus_{i\in I} M_i \to M, \quad (m_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} m_i$$

είναι ένας ισομορφισμός R-μοδίων. Πράγματι, το άθροισμα $\sum_{i\in I} m_i$ είναι καλά ορισμένο, εφόσον το πολύ πεπερασμένο το πλήθος συνιστώσες m_i μπορεί να είναι διάφορες τού 0_M και γι' αυτό η απεικόνιση φ είναι επίσης καλά ορισμένη. Προτείνουμε ως άσκηση στον αναγνώστη την επιβεβαίωση ότι η φ είναι ένας R-ομομορφισμός μοδίων.
Εάν $m \in M$, τότε υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία $m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_n}$ με $m = \sum_{k=1}^{n} m_{i_k}$, όπου $m_{i_k} \in M_{i_k}, \forall k, 1 \le k \le n$. Έστω $(m'_i)_{i\in I}$ το στοιχείο τού $\oplus_{i\in I} M_i$ με

$$m'_i = \begin{cases} 0_M, \text{ αν } i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}, \\ m_{i_k}, \text{ αν } i = i_k, \text{ για κάποιο } k, 1 \le k \le n. \end{cases}$$

Η εικόνα $\varphi((m'_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} m'_i$ ισούται με m και γι' αυτό η φ είναι μια επίρριψη.
Εάν $(m_i)_{i\in I}$ και $(m'_i)_{i\in I}$ είναι δύο στοιχεία τού $\oplus_{i\in I} M_i$ με την ίδια εικόνα, δηλαδή με $\varphi((m_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} m_i = \sum_{i\in I} m'_i = \varphi((m'_i)_{i\in I})$, τότε από τη μοναδικότητα τής παράστασης των στοιχείων τού εσωτερικού ευθέος αθροίσματος, έπεται ότι για κάθε $i \in I$, $m_i = m'_i$ και συνεπώς η φ είναι μια ένριψη. ♦

Έστω $\oplus_{i\in I} M_i$ το εξωτερικό ευθύ άθροισμα μιας οικογένειας R-μοδίων $(M_i)_{i\in I}$. Για κάθε $j \in I$, ορίζεται η απεικόνιση $\iota_j : M_j \to \oplus_{i\in I} M_i, m_j \mapsto (m'_i)_{i\in I}$, όπου $m'_i = 0_{M_i}, \forall i \in I, i \ne j$ και $m'_j = m_j$. Η απεικόνιση ι_j ονομάζεται η *κανονική ένριψη* από την j-οστή συνιστώσα.

Ασκηση 68. *(α′) Να δειχθεί ότι $\forall j \in I$, η κανονική ένριψη $\iota_j : M_j \to \oplus_{i\in I} M_i$ αποτελεί έναν ενριπτικό ομομορφισμό R-μοδίων.*

(β′) Να δειχθεί ότι για κάθε $i, j \in I$, ισχύει:

$$p_j \circ \iota_i = \begin{cases} \zeta_{M_i M_j}, & \text{αν } i \ne j \\ id_{M_i}, & \text{αν } i = j, \end{cases}$$

όπου $\zeta_{M_i M_j}$ είναι ο μηδενικός ομομορφισμός από τον R-μόδιο M_i στον R-μόδιοM_j και id_{M_i} είναι ο ταυτοτικός ομομορφισμός τού M_i.

(γ') *Να δειχθεί ότι ο R-μόδιος $\oplus_{i\in I}M_i$ ισούται με το εσωτερικό ευθύ άθροισμα τής οικογένειας των υπομοδίων του $(\iota_i(M_i))_{i\in I}$.*

Παρατήρηση 3.6.4. *Λόγω τής Πρότασης 3.6.3 και τής Άσκησης 68 από εδώ και στο εξής δεν θα κάνουμε διάκριση παρά μόνο αν είναι απαραίτητο μεταξύ τού εσωτερικού και τού εσωτερικού ευθέος αθροίσματος μοδίων και θα αναφερόμαστε απλώς στο ευθύ άθροισμα μοδίων. Στην περίπτωση αυτή η κανονική προβολή $p_j : M \to M_j$ μπορεί να ταυτιστεί με την απεικόνιση $M \to M_j, m \mapsto m_j$, όπου m_j είναι το μοναδικό στοιχείο τού M_j που εμφανίζεται στην έκφραση τού $m = \sum_{i\in I} m_i$ ως άθροισμα στοιχείων των M_i και η κανονική ένριψη $\iota_j : M_j \to M$ μπορεί να ταυτιστεί με την απεικόνιση $M_j \to M, m_j \mapsto m_j$.*

Ασκηση 69. *(Η Καθολικότητα τού ευθέος Αθροίσματος Μοδίων.) Να δειχθεί ότι για οποιαδήποτε οικογένεια $(\varphi_i : M_i \to T)_{i\in I}$ ομομορφισμών R-μοδίων υπάρχει ένας μοναδικός ομομορφισμός $\varphi : \oplus_{i\in I}M_i \to T$ με $\varphi \circ \iota_j = \varphi_j, \forall j \in I$.*

Ορισμός 3.6.5. *Εάν ένας R-μόδιος M ισούται με το ευθύ άθροισμα $\oplus_{i\in I}M_i$, τότε λέμε ότι ο M διασπάται στο ευθύ άθροισμα τής οικογένειας $(M_i)_{i\in I}$ των υπομοδίων του.*

Ορισμός 3.6.6. *Ένας R-μόδιος $M \neq \{0_M\}$ ονομάζεται αδιάσπαστος, αν η μοναδική διάσπαση σε ευθύ άθροισμα υπομοδίων του είναι η τετριμμένη διάσπαση $M = M\oplus\{0_M\} = \{0_M\}\oplus M$. Στην αντίθετη περίπτωση ο M ονομάζεται διασπάσιμος.*

Με άλλα λόγια, ο R-μόδιος $M \neq \{0_M\}$ είναι αδιάσπαστος, αν από $M = N_1 \oplus N_2$, όπου N_1 N_2 είναι υπομόδιοι τού M, έπεται ή $M = N_1$ και $N_2 = \{0_M\}$ ή $M = N_2$ και $N_1 = \{0_M\}$.

Θεώρημα 3.6.7. *Ένας R-μόδιος M είναι το ευθύ άθροισμα τής οικογένειας των υπομοδίων του $(M_i)_{i\in I}$, αν και μόνο αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

(i) $M = \sum_{i\in I} M_i$, *δηλαδή για κάθε στοιχείο $m \in M$, υπάρχουν κάποια στοιχεία $m_{i_k} \in M_{i_k}, 1 \leq k \leq n$ με $m = \sum_{k=1}^{n} m_{i_k}$.*

(ii) *Για κάθε $k \in I$, $M_k \cap \sum_{j\neq k} M_j = \{0\}$.*

Απόδειξη «$\Rightarrow$» Η απεικόνιση $\varphi : \oplus_{i\in I}M_i \to M, (m_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} m_i$ είναι ένας ισομορφισμός R-μοδίων. Επομένως, το (i) είναι αληθές.
Εστω $m \in M_k \cap \sum_{j\neq k} M_j$, δηλαδή $m = \sum_{j\neq k} m_j$. Εφόσον το $m \in M_k$, η i-συνιστώσα τού $\varphi^{-1}(m) = (m_i)_{i\in I}$ ισούται με 0_M για κάθε $i \neq k$, και η k-συνιστώσα του ισούται με m. Επειδή όμως το $\varphi^{-1}(m)$ ανήκει και στο $\varphi^{-1}(\sum_{j\neq k} M_j)$, η k-συνιστώσα του οφείλει να ισούται με 0_M. Άρα, $m = 0_M$ και η (ii) είναι αληθής.
«$\Leftarrow$» Θα αποδείξουμε ότι, εάν ικανοποιούνται οι συνθήκες (i) και (ii), τότε ο ομομορφισμός $\varphi : \oplus_{i\in I}M_i \to M, (m_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} m_i$ είναι ένας ισομορφισμός. Λόγω τής (i), ο φ είναι επιρριπτική απεικόνιση.
Εάν $\mathrm{Ker}(\varphi)$ περιέχει ένα μη-μηδενικό στοιχείο $(m_i)_{i\in I}$, τότε $\exists k \in I$ με $m_k \neq 0_M$ και επειδή $\sum_{i\in I} m_i = 0_M$ έχουμε $m_k = -\sum_{j\neq k} m_j \in \sum_{j\neq k} M_j$, δηλαδή $m_k \in M_k \cap \sum_{j\neq k} M_j$. Όμως, σύμφωνα με το (ii) $M_k \cap \sum_{j\neq k} M_j = \{0_M\}$ και έτσι $m_k = 0_M$. Αυτό αντιβαίνει στην αρχική υπόθεσή μας ότι $m_k \neq 0_M$. Συνεπώς, ο $\mathrm{Ker}(\varphi)$ αποτελείται μόνο

από το μηδενικό στοιχείο και έτσι ο ομομορφισμός φ είναι μια ένρριψη. Άρα, ο φ είναι ένας ισομορφισμός. ♦

Παράδειγμα 3.6.8. *(α′) Ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Z}$, δηλαδή η αβελιανή ομάδα των ακεραίων αριθμών, είναι ένας διασπάσιμος μόδιος, αφού αν p, q είναι δύο πρώτοι αριθμοί με $p \neq q$, τότε $\mathbb{Z} = p\mathbb{Z} \oplus q\mathbb{Z}$ (γιατί;).*

(β′) Ένας διανυσματικός χώρος V υπεράνω ενός σώματος K είναι αδιάσπαστος, αν και μόνο αν $\dim_K V = 1$ (γιατί;).

3.6.2 *Ελεύθεροι Μόδιοι*

Εάν M είναι ένας R-μόδιος και X ένα σύνολο γεννητόρων του, τότε γνωρίζουμε, βλέπε Λήμμα 3.4.6, ότι κάθε στοιχείο τού M εκφράζεται ως ένας (πεπερασμένος) R-γραμμικός συνδυασμός στοιχείων τού X. Με άλλα λόγια, αν το m είναι ένα στοιχείο τού M, τότε $m = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i$, όπου ο n είναι ένας φυσικός αριθμός, τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι στοιχεία τού X και τα $r_1, r_2, \ldots, r_n$ είναι στοιχεία τού R. Σημειώστε, ότι εν γένει ο n εξαρτάται από το m και ότι ούτε τα x_i ούτε τα r_i είναι μοναδικά στην R-γραμμική τού m. Όμως στην περίπτωση ενός πεπερασμένης διάστασης διανυσματικού V υπεράνω ενός σώματος K, η Γραμμική Άλγεβρα μάς πληροφορεί ότι υπάρχει ένα μοναδικό n, πρόκειται για την K-διάσταση τού χώρου, ούτως ώστε για κάθε σύνολο γεννητόρων X τού V με $|X| = n$, δηλαδή για κάθε βάση, και για κάθε $v \in V$, να υπάρχουν μοναδικά[5] $\lambda_i \in K$ με $v = x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + \cdots + x_n\lambda_n$. Στην παρούσα ενότητα θα επεκτείνουμε την έννοια τής βάσης ενός K-διανυσματικού χώρου σε μόδιους γενικότερων δακτυλίων και θα παρουσιάσουμε συνθήκες που εξασφαλίζουν την ύπαρξη βάσεων.

Ορισμός 3.6.9. *Έστω ένα υποσύνολο X ενός R-μοδίου M. Εάν για κάθε (πεπερασμένο) R-γραμμικό συνδυασμό στοιχείων τού X που ισούται με το μηδενικό στοιχείο τού M, έπεται ότι όλοι οι συντελεστές τού συνδυασμού είναι ίσοι με το μηδενικό στοιχείο τού R, τότε το X ονομάζεται R-γραμμικώς ανεξάρτητο.*
Το κενό σύνολο θεωρείται γραμμικώς ανεξάρτητο.

Με άλλα λόγια, αν από $\sum_{i=1}^{n} x_i r_i = 0_M$, όπου $\forall i, 1 \leq i \leq n$, τα $x_i \in X$ και τα $r_i \in R$, έπεται $r_i = 0_M, \forall i, 1 \leq i \leq n$.
Ένα υποσύνολο τού M που δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητο ονομάζεται *γραμμικώς εξαρτημένο*.
Προφανώς, κανένα R-γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο ενός R-μοδίου δεν μπορεί να περιέχει το 0_M, αφού στον R-γραμμικό συνδυασμό $0_M \cdot 1_R = 0_M$ ο συντελεστής τού 0_M ισούται με 1_R. Επομένως, κάθε υποσύνολο ενός R-μοδίου που περιέχει το μηδενικό στοιχείο τού μοδίου είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

Ορισμός 3.6.10. *Ένα R-γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο γεννητόρων X ενός R-μοδίου M ονομάζεται R-βάση τού M.*

Ορισμός 3.6.11. *Ένας R-μόδιος M ονομάζεται ελεύθερος, όταν διαθέτει μια R-βάση.*

[5] εξαρτώμενα βέβαια από την εκάστοτε βάση X και το στοιχείο $v \in V$

Ο μηδενικός R-μόδιος θεωρείται ελεύθερος με βάση το κενό σύνολο.

Παράδειγμα 3.6.12. *Ο δακτύλιος $\mathbb{M}_n(R)$ θεωρούμενος ως δεξιός R-μόδιος, βλέπε Παράδειγμα 3.1.7, είναι ελεύθερος με βάση το σύνολο των στοιχειωδών πινάκων $\{e_{\kappa\lambda} \mid 1 \leq \kappa, \lambda \leq n\}$.*

Παράδειγμα 3.6.13. *Ο δακτύλιος $R[x]$ των πολυωνύμων μιας μεταβλητής υπεράνω ενός μεταθετικού δακτυλίου R είναι ελέυθερος με βάση το σύνολο $\{1, x, x^2, \ldots, \}$*

Υπάρχει πληθώρα δακτυλίων που διαθέτουν μόδιους, οι οποίοι *δεν είναι ελεύθεροι.*

Παράδειγμα 3.6.14. *Έστω ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Z}_n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Εάν X είναι ένα μη-κενό υποσύνολό του και x οποιοδήποτε στοιχείο τού X, τότε $xn = 0_{\mathbb{Z}_n}$. Επομένως, το X είναι ένα $\mathbb{Z}$-γραμμικώς εξαρτημένο σύνολο, αφού $n \neq 0_{\mathbb{Z}}$. Συνεπώς, ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Z}_n$ δεν είναι ελεύθερος.*

Ασκηση 70. *Να εξεταστεί, εάν μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα μπορεί να είναι ένας ελεύθερος $\mathbb{Z}$-μόδιος.*

Παρατήρηση 3.6.15. *Κάθε δακτύλιος είναι ελεύθερος ως δεξιός (αντιστοίχως αριστερός) R-μόδιος. Πράγματι, το σύνολο $\{1_R\}$ αποτελεί μια R-βάση τού R_R, (γιατί;).*

Γενικότερα, έστω $(R_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια R-μοδίων αποτελούμενη από αντίγραφα τού δεξιά κανονικού R-μοδίου R_R, όπου ο R είναι ένας δακτύλιος, δηλαδή $\forall i \in I, R_i = R_R$. Ο R-μόδιος $\oplus_{i\in I} R_i$ είναι ελεύθερος. Πράγματι, το σύνολο

$$\mathcal{E} = \{\epsilon_\lambda = (\epsilon_{\lambda i})_{i\in I} \mid \lambda \in I\} \subseteq \oplus_{i\in I} R_i, \text{ όπου } \epsilon_{\lambda i} = \begin{cases} 0_R, \text{ αν } i \neq \lambda \\ 1_R, \text{ αν } i = \lambda \end{cases}$$

αποτελεί μια R-βάση τού $\oplus_{i\in I} R_i$ (γιατί;). Κατ' αναλογία με την περίπτωση των διανυσματικών χώρων, θα ονομάζουμε τη βάση $\mathcal{E}$ κανονική βάση τού ελεύθερου μοδίου $\oplus_{i\in I} R_i$.

Οι ελεύθεροι R-μόδιοι έχουν την εξής θεμελιώδη ιδιότητα:

Θεώρημα 3.6.16. *Έστω ότι F είναι ένας ελεύθερος δεξιός R-μόδιος με βάση $\mathcal{B} \subseteq F$ και M οποιοσδήποτε R-μόδιος. Εάν $\{m_b, b \in \mathcal{B}\}$ είναι στοιχεία τού M, τότε υπάρχει ένας μοναδικός R-ομομορφισμός $\varphi : F \to M$ με $\varphi(b) = m_b$, για κάθε $b \in \mathcal{B}$.*

Απόδειξη Εάν υπάρχει ένας ομομορφισμός $\varphi : F \to M$ με $\varphi(b) = m_b$, για κάθε $b \in \mathcal{B}$, τότε επειδή κάθε $x \in F$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $x = \sum_{b\in\mathcal{B}} br_b$ έχουμε:

$$\varphi\left(\sum_{b\in\mathcal{B}} br_b\right) = \sum_{b\in\mathcal{B}} \varphi(b)r_b = \sum_{b\in\mathcal{B}} m_b r_b.$$

Συνεπώς, αν υπάρχει ένας ομομορφισμός $F \to M$ που να ικανοποιεί το συμπέρασμα τού θεωρήματος, τότε είναι μοναδικός.

Τώρα θα κατασκευάσουμε έναν τέτοιου είδους ομομορφισμό. Θεωρούμε την αντιστοιχία:

$$\varphi : F \to M, \quad \sum_{b\in\mathcal{B}} br_b \mapsto \sum_{b\in\mathcal{B}} m_b r_b.$$

Πρόκειται για μια καλά ορισμένη απεικόνιση, αφού κάθε στοιχείο $x \in F$ εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο ως ένας R-γραμμικός συνδυασμός στοιχείων από τη βάση $\mathcal{B}$. Επιπλέον, $\forall b \in \mathcal{B}, \varphi(b) = \varphi(b1_R) = m_b 1_R = m_b$.
Η φ είναι ένας ομομορφισμός R-μοδίων. Πράγματι, εάν $x = \sum_{b\in\mathcal{B}} br_b \in F, y = \sum_{b\in\mathcal{B}} br'_b \in F$ και $r \in R$, τότε

$$\varphi(x+y) = \varphi\left(\sum_{b\in\mathcal{B}} br_b + \sum_{b\in\mathcal{B}} br'_b\right) = \varphi\left(\sum_{b\in\mathcal{B}} b(r_b + r'_b)\right) =$$

$$\sum_{b\in\mathcal{B}} m_b(r_b + r'_b) = \sum_{b\in\mathcal{B}} m_b r_b + \sum_{b\in\mathcal{B}} m_b r'_b = \varphi\left(\sum_{b\in\mathcal{B}} br_b\right) + \varphi\left(\sum_{b\in\mathcal{B}} br'_b\right) =$$

$$\varphi(x) + \varphi(y).$$

Κατ' ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται η συμπεριφορά τής φ και ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό, δηλαδή ότι $\forall x \in F, r \in R, \varphi(xr) = \varphi(x)r$ (*γιατί;*). Άρα, η ανωτέρω απεικόνιση φ αποτελεί έναν R-ομομορφισμό. ♦

Πόρισμα 3.6.17. *Για κάθε δεξιό R-μόδιο M, υπάρχει ένας επιμορφισμός R-μοδίων $F \to M$, όπου ο F είναι ένας ελεύθερος δεξιός R-μόδιος.*

Απόδειξη Έστω X ένα (μη-κενό) σύνολο γεννητόρων τού M. Σχηματίζουμε τον ελεύθερο R-μόδιο $F = \oplus_{x\in X} R_x$, όπου για κάθε $x \in X$, ο μόδιος R_x ισούται με τον δεξιά κανονικό R-μόδιο R_R, βλέπε Παρατήρηση 3.6.15.
Η απεικόνιση $\varphi : \mathcal{E} \to X, \epsilon_x \mapsto x$ από την κανονική βάση $\mathcal{E}$ τού F στο σύνολο των γεννητόρων X τού M επεκτείνεται σε έναν R-ομομορφισμό

$$\varphi : \mathcal{E} \to X, \quad \sum_{x\in X} \epsilon_x r_x \mapsto \sum_{x\in X} x r_x,$$

ο οποίος είναι επιμορφισμός, αφού το X παράγει το M. ♦

Επομένως, από το Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμού Μοδίων συμπεραίνουμε ότι κάθε R-μόδιος είναι πηλικομόδιος ενός ελεύθερου R-μοδίου.
Η δομή ενός ελεύθερου R-μοδίου είναι εξαιρετικά απλή:

Πρόταση 3.6.18. *Εάν ο R-μόδιος F είναι ελεύθερος και $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του,τότε*

$$F \cong \oplus_{b\in\mathcal{B}} R_b,$$

όπου για κάθε $b \in \mathcal{B}$, ο R-μόδιος R_b ισούται με τον δεξιό R-μόδιο R_R.

Απόδειξη Η απεικόνιση $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{E}, b \mapsto \epsilon_b$ από τη βάση $\mathcal{B}$ τού F στην κανονική βάση $\mathcal{E}$ τού $\oplus_{b\in\mathcal{B}} R_b$ επεκτείνεται σε έναν R-ομομορφισμό

$$\varphi : F \to \oplus_{b\in\mathcal{B}} R_b, \quad \sum_{b\in\mathcal{B}} br_b \mapsto \sum_{b\in\mathcal{B}} \epsilon_b r_b,$$

βλέπε Θεώρημα 3.6.16. Ο ομομορφισμός φ είναι επιρριπτικός, αφού κάθε στοιχείο τού $\oplus_{b\in\mathcal{B}}R_b$ είναι ένας R-γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων τής βάσης $\mathcal{E}$. Εάν το στοιχείο $m = \sum_{b\in\mathcal{B}} br_b$ ανήκει στον πυρήνα τού φ, τότε $\sum_{b\in\mathcal{B}} \epsilon_b r_b = 0$ και επειδή το $\mathcal{E}$ είναι βάση, έχουμε $\forall b \in \mathcal{B}, r_b = 0$. Συνεπώς, το στοιχείο $m = 0_F$ και τελικώς ο φ είναι ένας ισομορφισμός. ♦

Μόδιοι υπεράνω διαιρετικών Δακτυλίων

Στην παρούσα ενότητα θα δείξουμε ότι κάθε μόδιος υπεράνω ενός διαιρετικού δακτυλίου διαθέτει μια βάση, δηλαδή είναι ελεύθερος. Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα γενικεύει την αντίστοιχη πρόταση που ισχύει στην περίπτωση των διανυσματικών χώρων, δηλαδή μοδίων υπεράνω σώματος.

Θεώρημα 3.6.19. *Έστω ότι* D *είναι ένας διαιρετικός δακτύλιος,* M *ένας δεξιός* D*-μόδιος και* X *ένα σύνολο γεννητόρων τού* M*. Εάν* U *είναι ένα* D*-γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο τού* X*, τότε υπάρχει ένα υποσύνολο* $\mathcal{B}$ *τού* X *με* $U \subseteq \mathcal{B} \subseteq X$ *που αποτελεί βάση τού* M*.*

Απόδειξη Θα εφαρμόσουμε το Λήμμα Zorn στο σύνολο

$$\mathcal{S} = \{Y \subseteq M \mid U \subseteq Y \subseteq X, \text{ όπου το } Y \text{ είναι D-γραμμικώς ανεξάρτητο}\}$$

με σχέση μερικής διάταξης την «$\subseteq$».
Προφανώς, $\mathcal{S} \neq \emptyset$, εφόσον $U \in \mathcal{S}$. Τώρα θα αποδείξουμε ότι το $\mathcal{S}$ έχει μεγιστοτικά στοιχεία. Σύμφωνα με το Λήμμα Zorn, αρκεί να επιβεβαιώσουμε ότι κάθε αλυσίδα στοιχείων τού $\mathcal{S}$, διαθέτει ένα άνω φράγμα στο $\mathcal{S}$.
Έστω ότι $\mathcal{K}$ είναι μια αλυσίδα στοιχείων τού $\mathcal{S}$ και ότι $\mathcal{Y} = \cup_{Y\in\mathcal{K}} Y$ είναι η ένωση των στοιχείων τής $\mathcal{K}$. Προφανώς, $U \subseteq \mathcal{Y} \subseteq X$ · επιπλέον, για κάθε $Y \in \mathcal{K}$, έχουμε $Y \subseteq \mathcal{Y}$. Συνεπώς, για να αποτελεί το σύνολο $\mathcal{Y}$ ένα άνω φράγμα τού $\mathcal{K}$ στο $\mathcal{S}$ αρκεί να είναι D-γραμμικώς ανεξάρτητο. Έστω ότι ένας D-γραμμικός συνδυασμός στοιχείων τού $\mathcal{Y}$ ισούται με το μηδενικό στοιχείο τού M, δηλαδή ότι $\sum_{i=1}^{n} y_i r_i = 0_M$, όπου $\forall i, 1 \leq i \leq n$, τα $y_i \in \mathcal{Y}$ και τα $r_i \in D$. Εφόσον το $\mathcal{Y}$ είναι η ένωση των στοιχείων $Y \in \mathcal{K}$, κάθε y_i ανήκει σε κάποιο Y_{κ_i}. Επειδή η αλυσίδα $\mathcal{K}$ είναι ένα ολικώς διατεταγμένο υποσύνολο τού $\mathcal{S}$ και το πλήθος των Y_{κ_i} είναι πεπερασμένο, υπάρχει κάποιος δείκτης κ_ℓ με $Y_{\kappa_\ell} \supseteq Y_{\kappa_i}, \forall \kappa_i, 1 \leq i \leq n$. Έτσι διαπιστώνουμε ότι το $\sum_{i=1}^{n} y_i r_i = 0_M$ είναι ένας D-γραμμικός συνδυασμός στοιχείων τού Y_{κ_ℓ} και αφού το Y_{κ_ℓ} είναι ένα D-γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο τού M, έπεται ότι όλοι οι συντελεστές r_i είναι ίσοι με το μηδενικό στοιχείο τού D. Σύμφωνα λοιπόν με το Λήμμα Zorn, το $\mathcal{S}$ διαθέτει (τουλάχιστον) ένα μεγιστοτικό στοιχείο· έστω το $\mathcal{B}$.
Θα αποδείξουμε ότι το $\mathcal{B}$ είναι μια βάση τού M. Το $\mathcal{B}$ είναι D-γραμμικώς ανεξάρτητο, αφού ανήκει στο $\mathcal{S}$. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι το $\mathcal{B}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων τού M. Ας υποθέσουμε ότι το $\mathcal{B}$ *δεν είναι* ένα σύνολο γεννητόρων. Τότε υπάρχει κάποιο $m \in M$ το οποίο *δεν ανήκει* στον υπομόδιο $\langle\mathcal{B}\rangle$ που παράγεται από το $\mathcal{B}$. Το σύνολο $\{m\}\cup\mathcal{B}$ οφείλει να είναι D-γραμμικώς εξαρτημένο, αφού διαφορετικά το $\{m\}\cup\mathcal{B}$ όντας γραμμικώς ανεξάρτητο θα ανήκε στο $\mathcal{S}$, γεγονός που αντιβαίνει στο ότι το $\mathcal{B}$ είναι ένα μεγιστοτικό στοιχείο τού $\mathcal{S}$. Επομένως, υπάρχουν κάποια $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathcal{B}$ και κάποια $r, r_1, \ldots, r_n \in D$ που δεν είναι όλα ίσα με το μηδενικό στοιχείο τού D, έτσι ώστε

$$mr + b_1 r_1 + b_2 r_2 + \cdots + b_n r_n = 0_M. \qquad (*)$$

Ιδιαιτέρως, ο συντελεστής τού r δεν μπορεί να ισούται με μηδέν, αφού στην αντίθετη περίπτωση η σχέση $m0_D + b_1r_1 + b_2r_2 + \cdots + b_nr_n = 0_M$ μάς πληροφορεί ότι το $\mathcal{B}$ είναι D-γραμμικώς εξαρτημένο, γεγονός άτοπο. Αφού λοιπόν το $r \neq 0_D$ και επειδή ο D είναι ένας *διαιρετικός δακτύλιος*[6] υπάρχει το αντίστροφο r^{-1} τού r και έτσι από τη σχέση (*) παίρνουμε τη σχέση:

$$m = -r^{-1}(b_1r_1 + b_2r_2 + \cdots + b_nr_n).$$

Η ανωτέρω σχέση δηλώνει ότι το m *ανήκει* στον υπομόδιο $\langle\mathcal{B}\rangle$. Αλλά αυτό το συμπέρασμα είναι άτοπο, αφού η αρχική υπόθεσή μας ήταν ότι $m \notin \langle\mathcal{B}\rangle$. Άρα, το $\mathcal{B}$ παράγει τον D-μόδιο M και αφού, όπως ήδη γνωρίζουμε, είναι D-γραμμικώς ανεξάρτητο, συμπεραίνουμε ότι αποτελεί μια βάση τού M. ♦

Πόρισμα 3.6.20. *Κάθε μόδιος υπεράνω ενός διαιρετικού δακτυλίου διαθέτει μια βάση.*

Απόδειξη Σύμφωνα με το ανωτέρω θεώρημα, αρκεί κάθε R-μόδιος M να διαθέτει ένα σύνολο γεννητόρων και ένα R-γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο. Επιλέγουμε ως σύνολο γεννητόρων το ίδιο το M και ως R-γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο το κενό σύνολο που έχουμε δεχθεί ότι είναι πάντοτε R-γραμμικώς ανεξάρτητο, βλέπε Ορισμό 3.6.9. ♦

Με άλλα λόγια κάθε δεξιός (ή αριστερός) μόδιος υπεράνω ενός διαιρετικού δακτυλίου διαθέτει μια βάση.
Στην περίπτωση μοδίων υπεράνω ενός διαιρετικού δακτυλίου υπάρχει μια έννοια αντίστοιχη τής διάστασης διανυσματικών χώρων υπεράνω ενός σώματος.

Θεώρημα 3.6.21. *Δύο οποιεσδήποτε βάσεις ενός δεξιού* R*-μοδίου* M *υπεράνω ενός διαιρετικού δακτυλίου* R *έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.*

Απόδειξη Θα εκτελέσουμε την απόδειξη μόνο στην περίπτωση, όπου ο M διαθέτει μια άπειρη βάση· όταν ο M έχει μια πεπερασμένη βάση, η απόδειξη είναι ταυτόσημη με εκείνη που εκτελείται για διανυσματικούς χώρους και την οποία ο αναγνώστης έχει σίγουρα συναντήσει σε κάποιο εισαγωγικό μάθημα Γραμμικής Άλγεβρας.
Έστω λοιπόν ότι $\mathcal{B} = (b_i)_{i\in I}$ είναι μια βάση τού M, όπου το I είναι ένα σύνολο με άπειρο το πλήθος στοιχεία και ότι $\mathcal{C} = (c_j)_{j\in J}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων τού M. Εάν αποδείξουμε την πρόταση:

(A) «*Η δύναμη* (το πλήθος των στοιχείων) *τού* I *είναι μικρότερη ή ίση από τη δύναμη τού* J, δηλαδή $\mathrm{card}(I) \leq \mathrm{card}(J)$.»,
τότε το ισχυρισμός τού θεωρήματος είναι αληθής, αφού αν αμφότερα τα $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$ είναι βάσεις, τότε $\mathrm{card}(I) \leq \mathrm{card}(J)$ και $\mathrm{card}(J) \leq \mathrm{card}(I)$· συνεπώς, $\mathrm{card}(I) = \mathrm{card}(J)$.
Απόδειξη τής (A):
Κάθε $c_j \in \mathcal{C}$ είναι ένας R-γραμμικός συνδυασμός ορισμένων πεπερασμένο το πλήθος b_i. Ας συμβολίσουμε με L_j το σύνολο εκείνων των δεικτών $i \in I$ για τους οποίους η i-συνιστώσα τού c_j δεν ισούται με μηδέν. Άρα, το L_j είναι ένα υποσύνολο τού I με πεπερασμένο το πλήθος στοιχεία. Ας συμβολίσουμε τώρα με $L = \cup_{j\in J} L_j$ την ένωση των L_j. Προφανώς, $L \subseteq I$·

[6]είναι το μοναδικό σημείο σε όλη την απόδειξη, όπου χρησιμοποιούμε αυτή την υπόθεση τού θεωρήματος!

επιπλέον, $L = I$. Πράγματι, εάν υπήρχε κάποιο $i_0 \in I \setminus L$, τότε η i_0-συνιστώσα οποιουδήποτε $c_j \in \mathcal{C}$ θα ήταν ίση με 0_R και έτσι θα ήταν αδύνατο να εκφραστεί το b_{i_0} ως γραμμικός συνδυασμός των $c_j \in \mathcal{C}$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι το $\mathcal{C}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων. Έτσι έχουμε $I = L = \cup_{j \in J} L_j$.
Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε, χωρίς απόδειξη, ένα αποτέλεσμα από τη Θεωρία Συνόλων: Το L είναι η ένωση των L_j υπεράνω τού J, όπου κάθε L_j έχει πεπερασμένο το πλήθος στοιχεία. Συνεπώς, το J είναι ένα σύνολο με άπειρο το πλήθος στοιχεία και επιπλέον $\mathrm{card}(\cup_{j \in J} L_j) \leq \mathrm{card}(J)$. Άρα, $\mathrm{card}(I) \leq \mathrm{card}(J)$. ♦

Ορισμός 3.6.22. *Έστω M ένας R-μόδιος υπεράνω ενός διαιρετικού δακτυλίου R. Καλούμε R-βάθμημα τού M τη δύναμη $\mathrm{card}(\mathcal{B})$ οποιασδήποτε βάσης $\mathcal{B}$ τού M.*

Θα συμβολίζουμε το βάθμημα ενός R-μοδίου M με $\mathrm{rank}_R(M)$.
Τα όσα εκθέσαμε μέχρι τώρα μάς οδηγούν στο ακόλουθο ερώτημα:
Έστω M ένας ελεύθερος R-μόδιος. Είναι αλήθεια ότι δύο οποιεσδήποτε βάσεις τού M έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων;
Η απάντηση εν γένει δεν είναι καταφατική. Εν τούτοις, μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.6.23. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος. Εάν ο M είναι ένας ελεύθερος R-μόδιος, τότε δύο οποιεσδήποτε βάσεις του έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.*

Απόδειξη Έστω ότι J είναι ένα μεγιστοτικό ιδεώδες τού R και $K := R/J$ ο αντίστοιχος πηλικοδακτύλιος, ο οποίος είνα σώμα, αφού το J είναι μεγιστοτικό. Από την Άσκηση 58 γνωρίζουμε ότι το M/MJ είναι ένας K-μόδιος, δηλαδή ένας διανυσματικός χώρος. Έστω $\mathcal{B} = \{b_i \in M \mid i \in I\}$ μια R-βάση τού M. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\overline{\mathcal{B}} = \{b + MJ \mid b \in \mathcal{B}\}$ αποτελεί μια K-βάση τού M/MJ. Προφανώς, το $\overline{\mathcal{B}}$ παράγει τον K-μόδιο M/MJ. Υπολείπεται η απόδειξη ότι το $\overline{\mathcal{B}}$ είναι K-γραμμικώς ανεξάρτητο. Εάν $\sum_{i=1}^{n}(b_i + MJ)(r_i + J) = 0 + MJ$, τότε $\sum_{i=1}^{n} b_i r_i \in MJ$, δηλαδή $\sum_{i=1}^{n} b_i r_i = \sum_{j=1}^{\ell} b_j s_j$, όπου $\forall j, 1 \leq j \leq \ell, s_j \in J$. Αφού όμως το $\mathcal{B}$ είναι μια R-βάση, έπεται ότι $n = \ell$ και μια εκ νέου αρίθμηση, αν είναι απαραίτητο, δίνει $\forall i, 1 \leq i \leq n, r_i = s_i$, δηλαδή όλα τα r_i ανήκουν στο J. Γι' αυτό $\forall i, 1 \leq i \leq n, r_i + J = 0 + J$ και συνεπώς το $\overline{\mathcal{B}}$ είναι K-γραμμικώς ανεξάρτητο. Η διάσταση τού M/MJ υπεράνω τού K εξαρτάται μόνο από τα M, R και J και όχι από κάποια συγκεκριμένη βάση τού M· άρα, ο ισχυρισμός τού θεωρήματος είναι αληθής. ♦

3.7 Δακτύλιοι Ενδομορφισμών και Διάσπαση Pierce

3.7.1 *Η Ομάδα Ομομορφισμών*

Έστω M και N δύο δεξιοί R-μόδιοι. Συμβολίζουμε με $\mathrm{Hom}_R(M_R, N_R)$ το σύνολο των R-ομομορφισμών από τον M στον N. Συχνά γράφουμε απλώς $\mathrm{Hom}_R(M, N)$, όταν είναι σαφές από τα συμφραζόμενα αν πρόκειται για δεξιούς ή αριστερούς R-μόδιους. Το $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ είναι ένα σύνολο διάφορο τού κενού, αφού η μηδενική απεικόνιση $\zeta_{MN} : M \to N, m \mapsto 0_N$ είναι πάντοτε ένας ομομορφισμός R-μοδίων.

Λήμμα 3.7.1. *Εάν* M *και* N *είναι δεξιοί* R*-μόδιοι υπεράνω ενός δακτυλίου* R*, τότε η απεικόνιση*

$$+ : \mathrm{Hom}_R(M,N) \times \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R(M,N), \quad (\varphi,\psi) \mapsto \varphi+\psi,$$

όπου

$$\varphi+\psi : M \to N, \quad m \mapsto (\varphi+\psi)(m) := \varphi(m)+\psi(m)$$

δομεί το σύνολο $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ *σε μια αβελιανή ομάδα,.*

Απόδειξη Εάν $\varphi,\psi \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$, τότε η

$$\varphi+\psi : M \to N, \quad m \mapsto (\varphi+\psi)(m) := \varphi(m)+\psi(m)$$

είναι επίσης ένας ομομορφισμός R-μοδίων, αφού για κάθε $m, m' \in M$ και $r \in R$ έχουμε:

$(\varphi+\psi)(m+m') = \varphi(m+m')+\psi(m+m') = \varphi(m)+\varphi(m')+\psi(m)+\psi(m') =$
$\varphi(m)+\psi(m)+\varphi(m')+\psi(m') = (\varphi+\psi)(m)+(\varphi+\psi)(m')$
και
$(\varphi+\psi)(mr) = \varphi(mr)+\psi(mr) = \varphi(m)r+\psi(m)r = (\varphi(m)+\psi(m))r =$
$(\varphi+\psi)(m)r.$

Επομένως, η

$$+ : \mathrm{Hom}_R(M,N) \times \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R(M,N), \quad (\varphi,\psi) \mapsto \varphi+\psi,$$

αποτελεί μια πράξη επί τού $\mathrm{Hom}_R(M,N)$, η οποία ονομάζεται *πρόσθεση ομομορφισμών*. Ο μηδενικός ομομορφισμός $\zeta_{MN} : M \to N, m \mapsto 0_N$ είναι το ουδέτερο στοιχείο τού $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ ως προς την ορισθείσα πράξη. Εάν $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$, τότε η απεικόνιση $M \to N, m \mapsto -\varphi(m)$ αποτελεί επίσης έναν R-ομομορφισμό ο οποίος είναι ο αντίθετος τού φ ως προς την πράξη τής πρόσθεσης ομομορφισμών. Ο συγκεκριμένος ομομορφισμός παριστάνεται με $-\varphi$. Τέλος, είναι φανερό ότι για κάθε $\varphi,\psi \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ έχουμε $\varphi+\psi = \psi+\varphi$ και έτσι το $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ αποτελεί μια αβελιανή ομάδα. ♦

Παρατήρηση 3.7.2. *Λαμβάνοντας υπόψιν την Παρατήρηση 3.3.4 διαπιστώνουμε ότι η συνολοθεωρητική ισότητα* $\mathrm{Hom}_{R^{op}}({}_{R^{op}}M, {}_{R^{op}}N) = \mathrm{Hom}_R(M_R, N_R)$ *είναι επίσης ισότητα αβελιανών ομάδων.*

Πρόταση 3.7.3. *Εάν* R *είναι ένας δακτύλιος και* M *ένας δεξιός* R*-μόδιος, τότε η αντιστοιχία*

$$\begin{aligned} \cdot :&\mathrm{Hom}_R(R_R,M) \times R \to \mathrm{Hom}_R(R_R,M), \quad (\varphi,r) \mapsto \varphi\cdot r, \ \text{όπου} \\ &\varphi\cdot r : R_R \to M, \quad s \mapsto \varphi(rs) = \varphi(1_R)rs. \end{aligned}$$

δομεί την ομάδα $\mathrm{Hom}_R(R_R,M)$*. σε έναν δεξιό* R*-μόδιο.*

Επιπλέον, η απεικόνιση

$$\Phi_M : \mathrm{Hom}_R(R_R,M) \to M, \quad \varphi \mapsto \varphi(1_R)$$

αποτελεί έναν ισομορφισμό R*-μοδίων.*

Απόδειξη Σχετικώς με το πρώτο τμήμα τού θεωρήματος θα αποδείξουμε μόνο τα εξής:

(α′) ότι η ανωτέρω αντιστοιχία αποτελεί μια καλά ορισμένη απεικόνιση, δηλαδή ότι

$$\forall \varphi \in \mathrm{Hom}_R(R_R, M), r \in R, \text{ η απεικόνιση } \varphi \cdot r \in \mathrm{Hom}_R(R_R, M)$$

(β′) και ότι ο συγκεκριμένος βαθμωτός πολλαπλασιασμός συμπεριφέρεται προσεταιριστικά ως προς τον πολλαπλασιασμό τού δακτυλίου, δηλαδή ότι

$$\forall \varphi \in \mathrm{Hom}_R(R_R, M), r_1, r_2 \in R \text{ έχουμε } \varphi \cdot (r_1 r_2) = (\varphi \cdot r_1) \cdot r_2.$$

(i) Για κάθε $r \in R$ και $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(R_R, M)$, η απεικόνιση $\varphi \cdot r : R_R \to M$, είναι ένας ομομορφισμός R-μοδίων, αφού $\forall s_1, s_2 \in R$ έχουμε:

$$(\varphi \cdot r)(s_1 + s_2) = \varphi(r(s_1 + s_2)) = \varphi(rs_1) + \varphi(rs_2) = (\varphi \cdot r)(s_1) + (\varphi \cdot r)(s_2),$$
$$(\varphi \cdot r)(s_1 s_2) = \varphi(r(s_1 s_2)) = \varphi(rs_1)s_2 = (\varphi \cdot r)(s_1)s_2.$$

Άρα, πρόκειται για ομομορφισμό R-μοδίων και γι' αυτό ορίζεται η απεικόνιση

$$\cdot : \mathrm{Hom}_R(R_R, M) \times R \to \mathrm{Hom}_R(R_R, M), \quad (\varphi, r) \mapsto \varphi \cdot r.$$

(ii) Η απόδειξη ότι η ομάδα $\mathrm{Hom}_R(R_R, M)$ δομείται με τη βοήθεια τής ανωτέρω απεικόνισης σε έναν R-μόδιο, προτείνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. Εδώ, θα επιβεβαιώσουμε απλώς την προσεταιριστικότητα τής πράξης τού βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως προς την πράξη τού πολλαπλασιασμού τού δακτυλίου R.
Για κάθε $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(R_R, M)$ και κάθε $r_1, r_2, s \in R$ έχουμε:

$$[(\varphi \cdot r_1) \cdot r_2](s) = [(\varphi \cdot r_1)](r_2 s) = \varphi(r_1(r_2 s)) = \varphi((r_1 r_2)s) = [(\varphi \cdot (r_1 r_2)](s).$$

Επομένως, $(\varphi \cdot r_1) \cdot r_2 = \varphi \cdot (r_1 r_2)$.

Σχετικώς με το δεύτερο τμήμα τού θεωρήματος προτείνουμε ως άσκηση την επιβεβαίωση ότι η απεικόνιση $\Phi_M : \mathrm{Hom}_R(R_R, M) \to M, (\varphi, m) \mapsto \varphi(1_R)$ είναι ομομομορφισμός R-μοδίων. Εδώ θα ελέγξουμε μόνο ότι ο Φ_M αποτελεί μια αμφίρριψη.
Πράγματι, αν $\Phi_M(\varphi) = \varphi(1_R) = 0_M$, τότε $\forall r \in \varphi(r) = \varphi(1_R)r = 0_M r = 0_M$ και συνεπώς $\varphi = \zeta_{RM}$. Ώστε, ο Φ_M είναι ένας ενριπτικός ομομορφισμός.
Τέλος, αν $m \in M$, τότε η απεικόνιση $\varphi_m : R \to M, r \mapsto mr$ είναι ένας R-ομομορφισμός (*γιατί;*) και επειδή $\Phi(\varphi_m) = \varphi_m(1_R) = m$, έπεται ότι ο Φ_M αποτελεί μια επίρριψη. ♦

Ασκηση 71. *Έστω $\Phi_M : \mathrm{Hom}_R(R_R, M) \to M$ ο ισομορφισμός τού ανωτέρω θεωρήματος. Ποιος είναι ο αντίστροφός του;*

3.7.2 *Ο Δακτύλιος Ενδομορφισμών ενός Μοδίου*

Έστω M ένας δεξιός R-μόδιος υπεράνω ενός δακτυλίου R. Ονομάζουμε R-*ενδομορφισμό* τού M κάθε R-ομομορφισμό $M \to M$, δηλαδή κάθε στοιχείο τού $\mathrm{Hom}_R(M, M)$. Το σύνολο των R-ενδομορφισμών τού M το συμβολίζουμε με $\mathrm{End}_R(M_R)$ ή απλώς $\mathrm{End}_R(M)$, όταν είναι σαφές από τα συμφραζόμενα εάν ο M είναι δεξιός ή αριστερός R-μόδιος. Σύμφωνα με το Λήμμα 3.7.1 το $\mathrm{End}_R(M)$ αποτελεί μια αβελιανή ομάδα με πράξη την πρόσθεση των ομομορφισμών. Επιπλέον, εάν φ και ψ είναι δύο ενδομορφισμοί τού M, τότε η σύνθεσή τους

$$\varphi \circ \psi : M \to M, \quad m \mapsto (\varphi \circ \psi)(m) := \varphi(\psi(m))$$

είναι επίσης ένας R-ενδομορφισμός τού M. Έτσι, η απεικόνιση

$$\circ : \mathrm{End}_R(M) \times \mathrm{End}_R(M) \to \mathrm{End}_R(M), (\varphi, \psi) \mapsto \varphi \circ \psi,$$

ορίζει μία ακόμη πράξη επί τού $\mathrm{End}_R(M)$ που την ονομάζουμε *πολλαπλασιασμό ενδομορφισμών.*

Πρόταση 3.7.4. *Η αβελιανή ομάδα* $\mathrm{End}_R(M)$ *εφοδιασμένη με την πράξη τού πολλαπλασιασμού ενδομορφισμών αποτελεί έναν δακτύλιο.*

Προτείνουμε ως άσκηση στον αναγνώστη την απόδειξη τού ισχυρισμού. Εμείς απλώς σημειώνουμε ότι το μοναδιαίο στοιχείο ως προς τον πολλαπλασιασμό είναι ο ταυτοτικός ομομορφισμός $\mathrm{id}_M : M \to M, m \mapsto m$.

Παρατήρηση 3.7.5. *Έστω* M *ένας δεξιός* R*-μόδιος. Από την την Παρατήρηση 3.7.2 προκύπτει ισότητα των δακτυλίων* $\mathrm{End}_R(M_R)$ *και* $\mathrm{End}_{R^{op}}({}_{R^{op}}M)$.

Παρατήρηση 3.7.6. *Ο δακτύλιος* $\mathrm{End}_R(R_R)$*, δηλαδή ο δακτύλιος ενδομορφισμών τού δεξιά κανονικού* R*-μοδίου* R_R*, είναι ισόμορφος ως δακτύλιος με τον δακτύλιο* R*. Πράγματι, από την Πρόταση 3.7.3 γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση*

$$\Phi_R : \mathrm{End}_R(R_R) \to R_R, \quad \varphi \mapsto \Phi_R(\varphi) := \varphi(1_R) \in R_R$$

είναι ένας ισομορφισμός των υποκείμενων αβελιανών ομάδων, αφού πρόκειται για έναν ισομορφισμό των R*-μοδίων.*
Επιπλέον, η εικόνα $\Phi(\mathrm{id}_R)$ *τού ταυτοτικού ενδομορφισμού τού* R_R *ισούται με* $\mathrm{id}_R(1_R) = 1_R$*.*
Τέλος, $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{End}_R(R_R)$*, έχουμε*

$$\Phi(\varphi_1 \circ \varphi_2) = (\varphi_1 \circ \varphi_2)(1_R) \stackrel{*}{=} \varphi_1(\varphi_2(1_R)) = \varphi_1(1_R)\varphi_2(1_R) = \Phi(\varphi_1)\Phi(\varphi_2).$$

(Στην ισότητα «$\stackrel{*}{=}$*» χρησιμοποιούμε ότι ο* φ_1 *είναι ένας ομομορφισμός* R*-μοδίων.) Άρα, η* Φ *είναι ένας ισομορφισμός δακτυλίων.*

Παράδειγμα 3.7.7. *Ο δακτύλιος* $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n)$*, δηλαδή ο δακτύλιος ενδομορφισμών τού* $\mathbb{Z}$*-μοδίου* $\mathbb{Z}_n$*, είναι ισόμορφος ως δακτύλιος με τον δακτύλιο* $\mathbb{Z}_n$*. Πράγματι, ας θεωρήσουμε την απεικόνιση*

$$\alpha : \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n) \to \mathbb{Z}_n, \quad \varphi \mapsto \alpha(\varphi) := \varphi(\overline{1}) \in \mathbb{Z}_n, \textit{ όπου } \overline{1} = 1 + \mathrm{mod}\, n.$$

Εάν $\varphi, \psi \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n)$*, τότε* $\alpha(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi)(\overline{1}) = \varphi(\overline{1}) + \psi(\overline{1}) = \alpha(\varphi) + \alpha(\psi)$*. Επιπλέον,* $\alpha(\varphi \circ \psi) = (\varphi \circ \psi)(\overline{1}) = \varphi(\psi(\overline{1}))$ *και θέτοντας* $\psi(\overline{1}) = \overline{s}$*, όπου* $\overline{s} = s + \mathrm{mod}\, n$*, παίρνουμε* $\varphi(\psi(\overline{1})) = \varphi(\overline{s}) = \varphi(\overline{1}s) = \varphi(\overline{1})s$*, αφού το* $\mathbb{Z}_n$ *είναι* *ένας $\mathbb{Z}$-μόδιος. Θεωρώντας τώρα το $\varphi(\overline{1})s$ ως στοιχείο τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_n$ έχουμε $\varphi(\overline{1})s = \varphi(\overline{1})\overline{s} = \varphi(\overline{1})\psi(\overline{1}) = \alpha(\varphi)\alpha(\psi)$. Τέλος, $\alpha(\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_n}) = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_n}(\overline{1}) = \overline{1}$. Άρα, πρόκειται για ομομορφισμό δακτυλίων. Προτείνουμε ως άσκηση στον αναγνώστη την απόδειξη ότι ο α είναι ένας ισομορφισμός.*

Ασκηση 72. *Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος ενδομορφισμών $\mathrm{End}_R({}_RR)$ τού αριστερά κανονικού μοδίου ${}_RR$ είναι ισόμορφος ως δακτύλιος με τον αντικείμενο δακτύλιο R^{op}, βλέπε Ενότητα 2.3.4.*

Ο Δακτύλιος Ενδομορφισμών ενός Μοδίου υπεράνω μιας Άλγεβρας

Λήμμα 3.7.8. *Έστω ότι ο R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος και ότι M, N είναι δύο δεξιοί R-μόδιοι. Η αντιστοιχία*

$$\begin{aligned}&\cdot :\mathrm{Hom}_R(M,N) \times R \to \mathrm{Hom}_R(M,N), (\varphi, r) \mapsto \varphi \cdot r, \quad \textit{όπου}\\ &\varphi \cdot r : M \to N, m \mapsto \varphi(m)r\end{aligned}$$

δομεί την αβελιανή ομάδα $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ σε έναν δεξιό R-μόδιο.

Απόδειξη Θα αποδείξουμε μόνο τα εξής:

(α′) ότι η ανωτέρω αντιστοιχία είναι μια καλά ορισμένη απεικόνιση, δηλαδή

$$\forall \varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,N), r \in R \text{ η απεικόνιση } \varphi \cdot r \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$$

(β′) και ότι ο συγκεκριμένος βαθμωτός πολλαπλασιασμός συμπεριφέρεται προσεταιριστικά ως προς τον πολλαπλασιασμό τού δακτυλίου, δηλαδή ότι

$$\forall \varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,N), r, s \in R \text{ έχουμε } \varphi \cdot (rs) = (\varphi \cdot r) \cdot s.$$

Η επαλήθευση των υπόλοιπων ιδιοτήτων που απαιτούνται, ώστε να αποτελεί ο $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ έναν R-μόδιο, προτείνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

(i) Για κάθε $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,N), m_1, m_2 \in M, r \in R$ έχουμε:

$$\begin{aligned}&(\varphi \cdot r)(m_1 + m_2) = \varphi(m_1 + m_2)r = \varphi(m_1)r + \varphi(m_2)r =\\ &(\varphi \cdot r)(m_1) + (\varphi \cdot r)(m_2)).\end{aligned}$$

Για κάθε $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,N), m \in M, r, s \in R$ έχουμε:

$$(\varphi \cdot r)(ms) = \varphi(ms)r = \varphi(m)(sr) \overset{*}{=} \varphi(m)(rs) = (\varphi(m)r)s = (\varphi \cdot r)(m)s.$$

(Στην ισότητα «$\overset{*}{=}$» χρησιμοποιούμε ότι ο R είναι μεταθετικός.)
Συνεπώς για κάθε $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ και $r \in R$ η απεικόνιση $\varphi \cdot r$ είναι ένας R-ομομορφισμός μοδίων.

(ii) Για κάθε $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,N), r, s \in R, m \in M$ έχουμε:

$$(\varphi \cdot (rs))(m) = \varphi(m)(rs) = (\varphi(m)r)s = ((\varphi \cdot r)(m))s = ((\varphi \cdot r) \cdot s)(m).$$

Άρα για κάθε $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ και $r, s \in R$, έχουμε $\varphi \cdot (rs) = (\varphi \cdot r) \cdot s$. ♦

Λήμμα 3.7.9. *Έστω ότι* R *είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος και* M *ένας δεξιός μόδιος υπεράνω τού* R*. Η απεικόνιση*

$$\begin{aligned} \cdot :&\mathrm{End}_R(M_R) \times R \to \mathrm{End}_R(M_R), (\varphi, r) \mapsto \varphi \cdot r, \quad \textit{όπου} \\ &\varphi \cdot r : M \to M, m \mapsto \varphi(m)r \end{aligned}$$

ορίζει επί τού $\mathrm{End}_R(M)$ *τη δομή μιας* R*-άλγεβρας.*

Απόδειξη Από το Λήμμα 3.7.8, γνωρίζουμε ότι ο δακτύλιος $\mathrm{End}_R(M_R)$ αποτελεί έναν δεξιό R-μόδιο. Υπολείπεται η απόδειξη ότι $\forall \varphi, \psi \in \mathrm{End}_R(M_R), r \in R$ ισχύει

$$(\varphi \circ \psi) \cdot r = \varphi \circ (\psi \cdot r) = (\varphi \cdot r) \circ \psi.$$

Για κάθε $m \in M$ έχουμε

$$[(\varphi \circ \psi) \cdot r](m) = (\varphi \circ \psi)(m)r = \varphi(\psi(m)r) = \varphi \circ (\psi \cdot r)(m)$$

και

$$(\varphi \cdot r) \circ \psi(m) = (\varphi \cdot r)(\psi(m)) = \varphi(\psi(m)r).$$

♦

Σύμφωνα με τα λεχθέντα στις σελίδες 36 και 45, εάν A είναι μια R-άλγεβρα, τότε κάθε δεξιός A-μόδιος είναι δυνατόν να θεωρηθεί ως ένας δεξιός R-μόδιος. Επίσης εάν M και N είναι δύο δεξιοί A-μόδιοι, τότε κάθε A-ομομορφισμός $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένας R-ομομορφισμός. Συνεπώς, η αβελιανή ομάδα $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια αβελιανή υποομάδα τού R-μοδίου $\mathrm{Hom}_R(M, N)$.

Πρόταση 3.7.10. *Έστω ότι* A *είναι μια* R*-άλγεβρα και ότι* M, N *είναι δύο* A*-μόδιοι. Η αβελιανή υποομάδα* $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ *είναι ένας* R*-υπομόδιος τού* R*-μοδίου* $\mathrm{Hom}_R(M, N)$.

Απόδειξη Επειδή $\mathrm{Hom}_A(M, N) \subseteq \mathrm{Hom}_R(M, N)$, είναι φανερό ότι $\forall \varphi \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ και $\forall r \in R$, η απεικόνιση $\varphi \cdot r$ είναι ένας R-ομομορφισμός, βλέπε Λήμμα 3.7.8. Υπολείπεται η απόδειξη ότι ο R-ομομορφισμός $\varphi \cdot r$ είναι ένας A-ομομορφισμός.
Για κάθε $a \in A, m \in M$ έχουμε $(\varphi \cdot r)(ma) = \varphi(ma)r = \varphi(m)ar$ και επειδή $ar = ra$, βλέπε Παρατήρηση 3.2.2, συμπεραίνουμε ότι $\varphi(m)ar = \varphi(m)ra = (\varphi \cdot r)(m)a$. Άρα, η $\varphi \cdot r$ είναι ένας A-ομομορφισμός. ♦

Θεώρημα 3.7.11. *Έστω* M *ένας δεξιός* A*-μόδιος υπεράνω μιας* R*-άλγεβρας* A*. Ο δακτύλιος* $\mathrm{End}_R(M_R)$ *των ενδομορφισμών τού* M *(θεωρούμενου ως* R*-μοδίου) αποτελεί μια* R*-άλγεβρα και ο δακτύλιος* $\mathrm{End}_A(M_A)$ *αποτελεί μια* R*-υποάλγεβρα τής* $\mathrm{End}_R(M_R)$.

Απόδειξη Από τις Προτάσεις 3.7.4, 3.7.10 και λαμβάνοντας υπόψιν ότι η πολλαπλασιαστικές δομές των $\mathrm{End}_R(M_R)$ και $\mathrm{End}_A(M_A)$ ορίζονται με τη βοήθεια τής σύνθεσης των απεικονίσεων, έπεται ότι ο $\mathrm{End}_A(M_A)$ είναι υποδακτύλιος και συγχρόνως R-υπομόδιος τού $\mathrm{End}_R(M_R)$, δηλαδή ο $\mathrm{End}_A(M_A)$ είναι μια R-υποάλγεβρα τής $\mathrm{End}_R(M_R)$. ♦

Θεώρημα 3.7.12. *Έστω ότι* A *είναι μια* R*-άλγεβρα. Ο ισομορφισμός δακτυλίων* $\Phi_A : \mathrm{End}_A(A_A) \to A, \varphi \mapsto \varphi(1_A)$ (βλέπε Παρατήρηση 3.7.6) *είναι ένας ισομορφισμός* R*-αλγεβρών.*

Απόδειξη Ο δακτύλιος $\mathrm{End}_A(A_A)$ αποτελεί μια R-άλγεβρα και ο ισομορφισμός δακτυλίων $\Phi_A : \mathrm{End}_A(A_A) \to A$ είναι ένας ομομορφισμός R-μοδίων, αφού $\forall \varphi \in \mathrm{End}_A(A_A), r \in R$ έχουμε $\Phi_A(\varphi \cdot r) = (\varphi \cdot r)(1_A) = \varphi(1_A)r = \Phi_A(\varphi)r$. ♦

Ο Δακτύλιος Ενδομορφισμών τού eR

Πρόταση 3.7.13. *Έστω e ένα ταυτοδύναμο στοιχείο ενός δακτυλίου R. Ο δακτύλιος ενδομορφισμών $\mathrm{End}_R(eR)$ είναι ισόμορφος με τον δακτύλιο eRe.*

Απόδειξη Θα δείξουμε ότι η αντιστοιχία

$$\Phi : \mathrm{End}_R(eR) \to eRe, \quad \varphi \mapsto \varphi(e)$$

ορίζει έναν ισομορφισμό δακτυλίων.
Εν πρώτοις, για κάθε $\varphi \in \mathrm{End}_R(eR)$, το $\Phi(\varphi) = \varphi(e)$ ανήκει στον δακτύλιο eRe. Παρατηρούμε ότι το $\varphi(e)$ είναι στοιχείο τού eR, αφού ο φ είναι ενδομορφισμός τού eR· επιπλέον έχουμε $\varphi(e) = \varphi(ee) = \varphi(e)e$ και επομένως $\varphi(e) \in eRe$. Άρα, η Φ αποτελεί μια απεικόνιση από τον $\mathrm{End}_R(eR)$ στον eRe.
Τώρα θα δείξουμε ότι πρόκειται για έναν ομομορφισμό δακτυλίων.
Για κάθε $\varphi, \psi \in \mathrm{End}_R(eR)$, έχουμε:

$$\Phi(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi)(e) = \varphi(e) + \psi(e) = \Phi(\varphi) + \Phi(\psi)$$

και ακόμη, θέτοντας $\psi(e) = er$, παίρνουμε:

$$\Phi(\varphi\psi) = \varphi(\psi(e)) = \varphi(er) = \varphi(eer) = \varphi(e)er = \varphi(e)\psi(e) = \Phi(\varphi)\Phi(\psi).$$

Τέλος, $\Phi(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_M(e) = e$ (το μοναδιαίο στοιχείο τού eRe). Άρα, ο Φ είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων.
Εάν $\varphi \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, τότε $\varphi(e) = 0$ και έτσι έχουμε $\forall er \in eR$, $\varphi(er) = \varphi(e)r = 0r = 0$. Συνεπώς, $\varphi = \zeta_{eR}$ και ο Φ είναι ένας μονομορφισμός.
Υπολείπεται η απόδειξη ότι ο Φ είναι μια επιρριπτική απεικόνιση. Αλλά εάν $a = exe \in eRe$, τότε η απεικόνιση $\varphi_a : eR \to eR$, $er \mapsto ar$ είναι ένας ενδομορφισμός τού eR (*γιατί;*) με $\varphi_a(e) = ae = exee = exe = a$ και συνεπώς ο Φ είναι ένας επιμορφισμός. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ♦

Παράδειγμα 3.7.14. *Έστω $R = \mathbb{M}_n(S)$ ο δακτύλιος πινάκων υπεράνω ενός δακτυλίου S. Ο στοιχειώδης πίνακας $e_{\kappa\kappa}$, όπου $1 \leq \kappa \leq n$, είναι ένα ταυτοδύναμο στοιχείο τού R και σύμφωνα με την αμέσως προηγούμενη πρόταση, ο δακτύλιος ενδομορφισμών τού $e_{\kappa\kappa}R$ είναι ισόμορφος με τον δακτύλιο $e_{\kappa\kappa}Re_{\kappa\kappa}$. Από την Παρατήρηση 2.3.1 γνωρίζουμε ότι οι όλες συνιστώσες ενός πίνακα τής μορφής $e_{\kappa\kappa}(s_{ij})e_{\kappa\kappa}$ είναι ίσες με το μηδενικό στοιχείο τού S με πιθανή εξαίρεση την (κ,κ)-συνιστώσα η οποία ισούται με την (κ,κ)-συνιστώσα τού (s_{ij}), δηλαδή με το στοιχείο $s_{\kappa\kappa}$ τού S.*
Η απεικόνιση

$$\sigma : e_{\kappa\kappa}Re_{\kappa\kappa} \to S, \quad e_{\kappa\kappa}(s_{ij})e_{\kappa\kappa} \mapsto s_{\kappa\kappa}$$

ορίζει έναν ισομορφισμό δακτυλίων.
Προτείνουμε ως άσκηση στον αναγνώστη την απόδειξη τής παρατήρησης.

3.7.3 *Ο Αμφιμεταθέτης*

Έστω M ένας δεξιός R-μόδιος και $S = \mathrm{End}_R(M_R)$ ο δακτύλιος ενδομορφισμών του. Η απεικόνιση

$$\cdot : S \times M \to M, \quad (\varphi, m) \mapsto \varphi \cdot m := \varphi(m)$$

προσδίδει στον R-μόδιο M τη δομή ενός *αριστερού* S-μοδίου. Σημειώστε ότι ο M είναι ήδη μια αβελιανή ομάδα, αφού πρόκειται για έναν μόδιο υπεράνω τού R. Η επιβεβαίωση των υπολοιπόμενων ιδιοτήτων ώστε να αποτελεί ο M αριστερό S-μόδιο είναι εύκολη και προτείνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. Έτσι, ο M είναι συγχρόνως R-δεξιός και S-αριστερός μόδιος. Επιπλέον, για κάθε $\varphi \in S, r \in R, m \in M$, έχουμε $\varphi \cdot (mr) = (\varphi \cdot m)r$, επειδή το $\varphi \in S$ είναι ένας ενδομορφισμός τού M.

Ορισμός 3.7.15. *Έστω S και R δύο δακτύλιοι. Μια αβελιανή ομάδα M, η οποία είναι αριστερός μόδιος υπεράνω τού S, δεξιός μόδιος υπεράνω τού R και που ικανοποιεί την επιπλέον συνθήκη :*

$$\forall s \in S, r \in R, m \in M, \quad s(mr) = (sm)r$$

ονομάζεται S-R-αμφιμόδιος.

Προφανώς, κάθε δακτύλιος R είναι R-R-αμφιμόδιος. Επιπλέον, καθε αμφίπλευρο ιδεώδες τού R είναι ένας R-R-αμφιμόδιος

Παράδειγμα 3.7.16. *Σύμφωνα με όσα προείπαμε, κάθε δεξιός R-μόδιος M είναι ένας $\mathrm{End}_R(M)$-R-αμφιμόδιος.*

Ασκηση 73. *Έστω ότι M είναι ένας αριστερός R-μόδιος και ότι $\mathrm{End}_R({}_RM)$ είναι ο δακτύλιος ενδομορφισμών του.*

Να δειχθεί

(α′) ότι η απεικόνιση

$$\cdot : M \times \mathrm{End}_R({}_RM)^{op} \to M, \quad (m, \varphi) \to m \cdot \varphi := \varphi(m)$$

προσδίδει στον M τη δομή ενός δεξιού $\mathrm{End}_R({}_RM)^{op}$-μοδίου και

(β′) ότι ο M είναι ένας R-$\mathrm{End}_R({}_RM)^{op}$-αμφιμόδιος.

Έστω και πάλι ένας δεξιός R-μόδιος M και $S = \mathrm{End}_R(M_R)$ ο δακτύλιος ενδομορφισμών του. Όπως ήδη γνωρίζουμε ο M είναι ένας αριστερός S-μόδιος.

Ορισμός 3.7.17. *Ο δακτύλιος $\mathrm{End}_S({}_SM)$ των ενδομορφισμών τού αριστερού S-μοδίου M ονομάζεται ο αμφιμεταθέτης τού δεξιού R-μοδίου M και παριστάνεται με $\mathrm{Bicom}_R(M_R)$.*

Πρόταση 3.7.18. *Έστω M ένας δεξιός R-μόδιος. Η αντιστοιχία*

$$\alpha : R \to \mathrm{Bicom}_R(M_R)^{op}, \quad r \mapsto \alpha(r) := \rho_r,$$

όπου

$$\rho_r : M \to M, \quad m \mapsto \rho_r(m) = mr$$

ορίζει έναν ομομορφισμό από τον δακτύλιο R *στον αντικείμενο τού αμφιμεταθέτη* $\mathrm{Bicom}_R(M_R)$ *δακτύλιο.*
Ο πυρήνας $\mathrm{Ker}(\alpha)$ *τού* α *συμπίπτει με τον εκμηδενιστή* $\mathrm{Ann}_R(M)$ *τού* M.

Απόδειξη Έστω S ο δακτύλιος $\mathrm{End}_R(M)$ των R-ενδομορφισμών τού M. Για κάθε $r \in R$, η απεικόνιση $\rho_r : M \to M$ είναι ένας S-ενδομορφισμός[7]. Πράγματι, $\forall m_1, m_2 \in M$ έχουμε $\rho_r(m_1 + m_2) = (m_1 + m_2)r = m_1 r + m_2 r = \rho_r(m_1) + \rho_r(m_2)$. Ακόμη, $\forall m \in M, s \in S$ έχουμε $\rho_r(sm) = (sm)r$ και επειδή ο M είναι ένας S-R-αμφιμόδιος[8] $(sm)r = s(mr) = s\rho_r(m)$.
Θα δείξουμε τώρα ότι η απεικόνιση α είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων.
Το μοναδιαίο στοιχείο 1_R τού R απεικονίζεται στο μοναδιαίο στοιχείο τού S, δηλαδή στην ταυτοτική απεικόνιση id_M τού M. Πράγματι, $\forall m \in M$, έχουμε $\alpha(1_R)(m) = \rho_{1_R}(m) = m1_R = m$ και γι' αυτό η εικόνα ρ_{1_R} ισούται με id_M.
Ο έλεγχος ότι για κάθε $r_1, r_2 \in R$, οι S-ομομορφισμοί $\alpha(r_1 + r_2) = \rho_{r_1+r_2}$ και $\alpha(r_1) + \alpha(r_2) = \rho_{r_1} + \rho_{r_2}$ είναι εύκολος και αφήνουμε την εκτέλεσή του στον αναγνώστη.
Υπολείπεται η απόδειξη ότι $\forall r_1, r_2, \alpha(r_1 r_2) = \alpha(r_1) * \alpha(r_2)$, όπου με «$*$» παριστάνεται ο πολλαπλασιασμός στον αντικείμενο δακτύλιο $\mathrm{Bicom}_R(M)^{\mathrm{op}}$, δηλαδή $\alpha(r_1) * \alpha(r_2) = \alpha(r_2) \circ \alpha(r_1)$. Για κάθε $m \in M$, έχουμε

$$\begin{aligned}&\alpha(r_1 r_2)(m) = \rho_{r_1 r_2}(m) = m(r_1 r_2) = (mr_1)r_2 = \rho_{r_2}(\rho_{r_1}(m)) = \\ &(\rho_{r_2} \circ \rho_{r_1})(m) = (\alpha(r_2) \circ \alpha(r_1))(m) = (\alpha(r_1) * \alpha(r_2))(m).\end{aligned}$$

Άρα, ο α είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων.
Ένα στοιχείο $r \in R$ ανήκει στον $\mathrm{Ker}(\alpha)$, αν και μόνο αν ο ομομορφισμός $\alpha(r) = \rho_r$ ισούται με τη μηδενική απεικόνιση ζ_M επί τού M, δηλαδή $\forall m \in M, \alpha(r)(m) = \rho_r(m) = mr = 0_M$. Επομένως, $r \in \mathrm{Ker}(\alpha)$ αν και μόνο αν $r \in \mathrm{Ann}_R(M)$. ♦

Πόρισμα 3.7.19. *Εάν* R *είναι ένας δακτύλιος που διαθέτει έναν πιστό δεξιό* R*-μόδιο* M*, τότε ο* R *είναι ισόμορφος με έναν υποδακτύλιο τού* $\mathrm{Bicom}_R(M_R)^{\mathrm{op}}$.

Απόδειξη Ο εκμηδενιστής $\mathrm{Ann}_R(M)$ τού πιστού R-μοδίου M είναι το μηδενικό ιδεώδες τού R. Επομένως, ο $\mathrm{Ker}(\alpha)$ τού ομομορφισμού $\alpha : R \to \mathrm{Bicom}_R(M_R)^{\mathrm{op}}$ τής Πρότασης 3.7.18 ισούται με το μηδενικό ιδεώδες και γι' αυτό έχουμε $R \cong \alpha(R) \subseteq \mathrm{Bicom}_R(M_R)^{\mathrm{op}}$. ♦

Παρατήρηση 3.7.20. *Εάν* A *είναι μια* R*-άλγεβρα και* M *είναι ένας δεξιός* A*-μόδιος, τότε ο ομομορφισμός*

$$\alpha : A \to \mathrm{Bicom}_A(M_A)^{\mathrm{op}}, a \to \alpha(a) := \rho_a$$

τής Πρότασης 3.7.18 είναι ένας ομομορφισμός R*-αλγεβρών.*
Πράγματι, ο δακτύλιος ενδομορφισμών $S = \mathrm{End}_A(M_A)$ *αποτελεί μια* R*-άλγεβρα, βλέπε Θεώρημα 3.7.11, και γι' αυτό ο αμφιμεταθέτης* $\mathrm{Bicom}_A(M_A) = \mathrm{End}_S({}_S M)$ *και ο αντικείμενος δακτύλιος* $\mathrm{Bicom}_A(M_A)^{\mathrm{op}}$ *αποτελούν επίσης* R*-άλγεβρες. Το υπολειπόμενο τμήμα τής απόδειξης, δηλαδή ότι* $\forall r \in R, a \in A$ *ισχύει* $\alpha(ar) = \alpha(a)r$*, ή ισοδυνάμως ότι* $\forall r \in R, a \in A$ *ισχύει* $\rho_{ar} = \rho_a r$ *προτείνεται στον αναγνώστη ως άσκηση.*

[7]Σημειώνουμε ότι το υποκείμενο σύνολο στοιχείων τού $\mathrm{End}_S(M) = \mathrm{Bicom}_R(M)$ συμπίπτει με το υποκείμενο σύνολο στοιχείων τού $\mathrm{Bicom}_R(M)^{\mathrm{op}}$.
[8]Υπενθυμίζουμε ότι τα στοιχεία τού S είναι οι R-ομομορφισμοί.

3.7.4 *Δακτύλιοι Ενδομορφισμών και Δακτύλιοι Πινάκων*

Στην παρούσα ενότητα θα διασυνδέσουμε τους δακτυλίους ενδομορφισμών από πεπερασμένως παραγόμενους μόδιους με τους δακτυλίους πινάκων

Θεώρημα 3.7.21. *Εάν ο M είναι ένας πεπερασμένως παραγόμενος δεξιός R-μόδιος και $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του, τότε ο δακτύλιος ενδομορφισμών $\mathrm{End}_R(M_R)$ είναι επιμορφική εικόνα ενός υποδακτυλίου τού δακτυλίου πινάκων $\mathbb{M}_n(R)$. Ιδιαιτέρως, εάν ο M είναι ένας ελεύθερος δεξιός R-μόδιος και το σύνολο $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ αποτελεί μια βάση του, τότε $\mathrm{End}_R(M_R) \cong \mathbb{M}_n(R)$.*

Απόδειξη Θεωρούμε το ακόλουθο υποσύνολο πινάκων τού $\mathbb{M}_n(R)$:

$$T = \{t = (t_{ij}) \in \mathbb{M}_n(R) \mid \exists \varphi_t \in \mathrm{End}_R(M) \text{ με } \varphi_t(x_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i t_{ij}, \text{ για κάθε } j\}.$$

Το σύνολο T αποτελεί έναν υποδακτύλιο τού $\mathbb{M}_n(R)$.
Πράγματι, ο μοναδιαίος πίνακας **1** τού $\mathbb{M}_n(R)$ ανήκει στο T, αφού η ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{id}_M \in \mathrm{End}_R(M)$ και γι' αυτό $T \neq \emptyset$.
Εάν $t = (t_{ij}), t' = (t'_{ij}) \in T$, τότε για κάθε $x_j, 1 \leq j \leq n$, έχουμε:

$$(\varphi_t - \varphi_{t'})(x_j) = \varphi_t(x_j) - \varphi_{t'}(x_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i t_{ij} - \sum_{i=1}^{n} x_i t'_{ij} =$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t_{ij} - t'_{ij}) = \varphi_{t-t'}(x_j)$$

και έτσι $t - t' \in T$.
Επιπλέον, εάν $t = (t_{ij}), t' = (t'_{ij}) \in T$, τότε για κάθε $x_j, 1 \leq j \leq n$, έχουμε:

$$(\varphi_t \circ \varphi_{t'})(x_j) = \varphi_t(\varphi_{t'}(x_j)) = \varphi_t(\sum_{k=1}^{n} x_k t_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_t(x_k) t_{kj} =$$
$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_i t_{ik} t_{kj} = \sum_{i=1}^{n} x_i (\sum_{k=1}^{n} t_{ik} t_{kj}) = \varphi_{tt'}(x_j)$$

και έτσι $tt' \in T$.
Άρα, το T είναι ένας υποδακτύλιος τού $\mathbb{M}_n(R)$.
Η απεικόνιση

$$\Phi : T \to \mathrm{End}_R(M), \quad t \mapsto \Phi(t) := \varphi_t \tag{3.7}$$

είναι ένας επιμορφισμός δακτυλίων. Η διαδικασία ορισμού των $t \in T$ φανερώνει ότι η απεικόνιση Φ είναι επιρριπτική. Προτείνουμε ως άσκηση στον αναγνώστη την απόδειξη ότι η Φ αποτελεί έναν ομομορφισμό δακτυλίων. (Κατ' ουσίαν αρκεί η επανάληψη τής απόδειξης που εκτελέσαμε για να διαπιστώσουμε ότι ο T είναι υποδακτύλιος.)

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο M είναι ελεύθερος και ότι το $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ αποτελεί μια βάση του. Στην περίπτωση αυτή οποιοσδήποτε πίνακας $r = (r_{ij})$ τού $\mathbb{M}_n(R)$ ορίζει έναν ενδομορφισμό φ_r, αφού η απεικόνιση

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \to \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i r_{i1}, \sum_{i=1}^{n} x_i r_{i2}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} x_i r_{in}\right\}, \quad x_j \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i r_{ij}$$

επεκτείνεται σε έναν (*μοναδικό*) ενδομορφισμό φ_r τού M, όπου $\varphi_r(x_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i r_{ij}$, βλέπε Θεώρημα 3.6.16. Συνεπώς, $T = \mathbb{M}_n(R)$ και η απεικόνιση

$$\Phi : \mathbb{M}_n(R) \to \mathrm{End}_R(M), \quad t \mapsto \Phi(t) := \varphi_t \tag{3.8}$$

είναι ένας επιμορφισμός.
Εάν $r = (r_{ij}) \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, τότε $\Phi(r) = \varphi_r = \zeta_M$ (ο μηδενικός ενδομορφισμός τού M) και γι' αυτό $\forall j, 1 \leq j \leq n, \varphi_r(x_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i r_{ij} = 0_M$ και επειδή τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ αποτελούν μια βάση τού M έπεται $\forall i, j, 1 \leq i, j \leq n, r_{ij} = 0_M$, δηλαδή ο πίνακας $r = (r_{ij}) = \mathbf{0}$. Άρα, ο Φ είναι ισομορφισμός δακτυλίων. ♦

Ασκηση 74. *Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το ανωτέρω θεώρημα στην περίπτωση ενός αριστερού* R*-μοδίου.*

Πόρισμα 3.7.22. *Εάν ο* M *είναι ένας πεπερασμένως παραγόμενος δεξιός* D*-μόδιος υπεράνω ενός διαιρετικού δακτυλίου* D*, τότε* $\mathrm{End}_D(M_D) \cong \mathbb{M}_n(D)$*, όπου* $n \in \mathbb{N}$ *είναι το* D*-βάθμημα τού* M*.*

Απόδειξη Ο M είναι ένας ελεύθερος D-μόδιος, αφού ο D είναι ένας διαιρετικός δακτύλιος. Επιπλέον, ο M διαθέτει μια πεπερασμένη βάση πρόκειται για έναν πεπερασμένως παραγόμενο D-μόδιο το πλήθος των στοιχείων τής οποίας ισούται με το βάθμημα τού M, βλέπε Θεώρημα 3.6.21. Άρα, $\mathrm{End}_D(M) \cong \mathbb{M}_n(D)$. ♦

Παρατήρηση 3.7.23. *Έστω* $\mathbb{M}_n(R)$ *ο δακτύλιος των* $n \times n$ *πινάκων με συνιστώσες από έναν δακτύλιο* R*. Η απεικόνιση*

$$T : \mathbb{M}_n(R)^{op} \to \mathbb{M}_n(R^{op}), A \mapsto A^T,$$

όπου A^T *είναι ο ανάστροφος*[9] *τού* A*, αποτελεί έναν ισομορφισμό δακτυλίων. Πράγματι, διαπιστώνεται πολύ εύκολα ότι ο* T *είναι ένας ισομορφισμός των υποκείμενων αβελιανών ομάδων και ότι ο μοναδιαίος πίνακας τού* $\mathbb{M}_n(R)^{op}$ *απεικονίζεται μέσω τού* T *στον μοναδιαίο πίνακα τού* $\mathbb{M}_n(R^{op})$*. Θα δείξουμε ότι* $\forall A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ *είναι* $(A *' B)^T = A^T B^T$*, όπου «$*'$» παριστάνει τον πολλαπλασιασμό τού* $\mathbb{M}_n(R)^{op}$*· δηλαδή θα δείξουμε ότι* $(BA)^T = A^T B^T$*, όπου* BA *είναι ο πολλαπλασιασμός των πινάκων* B, A *στον* $\mathbb{M}_n(R)$ *και* $A^T B^T$ *είναι ο πολλαπλασιασμός των πινάκων* A^T, B^T *στον* $\mathbb{M}_n(R^{op})$*. Ανακαλώντας τις γνώσεις που έχουμε από την Γραμμική Άλγεβρα, η ισότητα* $(BA)^T = A^T B^T$ *φαίνεται «υπόπτως αυτονόητη».*

[9] Υπενθυμίζουμε, ότι αν $A = (a_{ij})$, τότε ο ανάστροφος τού A είναι ο πίνακας $B = (b_{ij})$, όπου $\forall i, j, 1 \leq i, j \leq n, b_{ij} = a_{ji}$.

Ωστόσο, στην προκείμενη περίπτωση ο δακτύλιος R *δεν είναι ούτε σώμα ούτε εν γένει μεταθετικός.*
Θέτοντας $A^T = (a'_{ij})$, $B^T = (b'_{ij})$, $A^T B^T = D = (d_{ij})$, $BA = C = (c_{ij})$ *και συμβολίζοντας με* $*$ *τον πολλαπλασιασμό τού* R^{op} *παίρνουμε* $\forall i, j, 1 \leq i, j \leq n$,

$$d_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a'_{i\ell} * b'_{\ell j} = \sum_{\ell=1}^{n} b'_{\ell j} a'_{i\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} b_{j\ell} a_{\ell i} = c_{ji}.$$

Επομένως, $(BA)^T = C^T = D = A^T B^T$. *Άρα, ο* T *είναι ένας ισομορφισμός δακτυλίων.*

Πόρισμα 3.7.24. *Εάν ο* M *είναι ένας πεπερασμένως παραγόμενος αριστερός* D*-μόδιος υπεράνω ενός διαιρετικού δακτυλίου* D*, τότε*

$$\mathrm{End}_D({}_D M) \cong \mathbb{M}_n(D^{op}) \cong \mathbb{M}_n(D)^{op},$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ *είναι το* D*-βάθμημα τού* M.

Απόδειξη Ο αντικείμενος δακτύλιος D^{op} είναι επίσης ένας διαιρετικός δακτύλιος. Ο M θεωρούμενος ως δεξιός μόδιος υπεράνω τού D^{op} είναι πεπερασμένως παραγόμενος με βάθμημα n. Έτσι έχουμε $\mathrm{End}_D({}_D M) = \mathrm{End}_{D^{op}}(M_{D^{op}})$. Σύμφωνα με το Πόρισμα 3.7.24, ο $\mathrm{End}_{D^{op}}(M_{D^{op}})$ είναι ισόμορφος με τον δακτύλιο πινάκων $\mathbb{M}_n(D^{op})$ και από την Παρατήρηση 3.7.23 έπεται ότι ο τελευταίος δακτύλιος είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{M}_n(D)^{op}$. ♦

Ορισμός 3.7.25. *Ο αντικείμενος δακτύλιος τού δακτυλίου ενδομορφισμών* $\mathrm{End}_D({}_D M)$ *ενός αριστερού* D*-μοδίου (όχι απαραίτητα πεπερασμένως παραγομένου) υπεράνω ενός διαιρετικού δακτυλίου* D *ονομάζεται πλήρως γραμμικός δακτύλιος.*

Δηλαδή, ονομάζουμε πλήρως γραμμικό δακτύλιο τον $(\mathrm{End}_D({}_D M))^{op}$, όπου ο M είναι ένας *αριστερός* D-μόδιος υπεράνω ενός διαιρετικού δακτυλίου D. Η ονομασία «πλήρως γραμμικός δακτύλιος» είναι απολύτως διακαιολογημένη, αφού αν το βάθμημα τού M είναι πεπερασμένο, έστω n, τότε $(\mathrm{End}_D({}_D M))^{op} \cong (\mathbb{M}_n(D)^{op})^{op} = \mathbb{M}_n(D)$.

Παρατήρηση 3.7.26. *Όταν ο* R *είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος, τότε γνωρίζουμε ότι ο* $\mathbb{M}_n(R)$ *αποτελεί μια* R*-άλγεβρα. (Υπενθυμίζουμε ότι το αποτέλεσμα τού βαθμωτού πολλαπλασιασμού τού* $(a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(R)$ *με το* $r \in R$ *είναι το* $(a_{ij}) \cdot r := (a_{ij} r)$*, βλέπε Παράδειγμα 3.2.5.)*
Με την ίδια υπόθεση, δηλαδή ότι ο R *είναι μεταθετικός, προκύπτει ότι και ο δακτύλιος* T *τού Θεωρήματος 3.7.21 είναι μια* R*-υποάλγεβρα τής* $\mathbb{M}_n(R)$*. Εδώ θα δείξουμε μόνο το πώς ορίζεται ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός*

$$\cdot : T \times R \to T, (t, r) \mapsto t \cdot r$$

και θα αφήσουμε να συμπληρώσει ο αναγνώστης τις υπόλοιπες λεπτομέρειες.
Πράγματι, αν $t = (t_{ij}) \in T$ *και* $r \in R$*, τότε ο πίνακας* $t \cdot r = (t_{ij} r)$ *ανήκει στον* $\mathbb{M}_n(R)$*. Έστω ότι* $\varphi_t \in \mathrm{End}_R(M)$ *είναι ο ενδομορφισμός που αντιστοιχεί στο* $t \in T$*. Θεωρούμε τον ενδομορφισμό* $\varphi_t \cdot r \in \mathrm{End}_R(M)$ *(το συγκεκριμένο γινόμενο έχει νόημα, αφού ο* $\mathrm{End}_R(M)$

είναι μια R-άλγεβρα, βλέπε Λήμμα 3.7.9). Το στοιχείο τού T που αντιστοιχεί στον $\varphi_t \cdot r$ είναι το $t \cdot r$, δηλαδή $\varphi_t \cdot r = \varphi_{t \cdot r}$. Άρα, ο $t \cdot r$ ανήκει στον T και έτσι ορίζεται ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός.
Το συμπέρασμα ότι ο επιμορφισμός $\Phi : T \to \mathrm{End}_R(M)$, βλέπε (3.7), είναι ένας επιμορφισμός R-αλγεβρών, έπεται επίσης από το ότι για κάθε $\varphi_t \in \mathrm{End}_R(M)$ και $r \in R$ έχουμε $\varphi_t \cdot r = \varphi_{t \cdot r}$ (γιατί;).

Ασκηση 75. *Έστω μια R-άλγεβρα A και $\mathbb{M}_n(A)$ ο δακτύλιος των $n \times n$-πινάκων με συνιστώσες από την A. Να δειχθεί ότι η απεικόνιση*

$$\mathbb{M}_n(A) \times R \to \mathbb{M}_n(A), (a_{ij}, r) \mapsto (a_{ij} r)$$

ορίζει τη δομή μιας R-άλγεβρας επί τού δακτυλίου $\mathbb{M}_n(A)$.

Πόρισμα 3.7.27. *Έστω A μια R-άλγεβρα. Εάν η A είναι ένας ελεύθερος δεξιός R-μόδιος με πεπερασμένο R-βάθμημα $n \in \mathbb{N}$, τότε η A είναι ισόμορφη, ως R-άλγεβρα, με μια υποάλγεβρα τής $\mathbb{M}_n(R)$.*

Απόδειξη Όπως ήδη γνωρίζουμε η A είναι ισόμορφη ως R-άλγεβρα με την $\mathrm{End}_A(A_A)$, βλέπε Θεώρημα 3.7.12. Η $\mathrm{End}_A(A_A)$ είναι υποάλγεβρα τής $\mathrm{End}_R(A_R)$, βλέπε Θεώρημα 3.7.11 και επειδή ως R-μόδιος η A είναι ελεύθερη με βάθμημα n, η $\mathrm{End}_R(A_R)$ είναι ως R-άλγεβρα είναι ισόμορφη με την $\mathbb{M}_n(R)$, βλέπε Θεώρημα 3.7.21 και Παρατήρηση 3.7.26. ♦

Ειδικότερα ισχύει το εξής:

Πόρισμα 3.7.28. *Εάν A είναι μια K-άλγεβρα διάστασης $n \in \mathbb{N}$ υπεράνω ενός σώματος K, τότε η A είναι ισόμορφη ως K-άλγεβρα με μια υποάλγεβρα τής K-άλγεβρας $\mathrm{End}_K(A) \cong \mathbb{M}_n(K)$.*

3.7.5 *Η Διάσπαση Pierce*

Στην παρούσα ενότητα θα δούμε πως διασυνδέεται η δομή τού δακτυλίου ενδομορφισμών ενός μοδίου με τη δομή τού ίδιου τού μοδίου και ιδιαιτέρως με τη διάσπασή του σε ένα πεπερασμένο ευθύ άθροισμα υπομοδίων του.
Έστω ότι M είναι ένας R-μόδιος και ότι $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots M_n, n \in \mathbb{N}$ είναι μια διάσπασή του σε ένα εσωτερικό ευθύ άθροισμα μιας πεπερασμένης οικογένειας υπομοδίων $(M_i)_{i \in I}, I = \{1, 2, \ldots, n\}$. Έστω ότι $p_j : M \to M_j$ είναι η κανονική προβολή στην j-συνιστώσα και ότι $\iota_j : M_j \to M$ είναι η κανονική ένριψη από την j-συνιστώσα, βλέπε Παρατήρηση 3.6.4. Η σύνθεση $M \xrightarrow{p_j} M_j \xrightarrow{\iota_j} M$ αποτελεί έναν R-ενδομορφισμό τού M. Για κάθε $j, 1 \leq j \leq n$, συμβολίζουμε με e_j τη σύνθεση $\iota_j \circ p_j$.

Λήμμα 3.7.29. *Το σύνολο $\{e_j \mid j \in I\} \subseteq \mathrm{End}_R(M)$ ορίζει μια διάσπαση τής μονάδος id_M τού δακτυλίου $\mathrm{End}_R(M)$.*

Απόδειξη Για κάθε $j, 1 \leq j \leq n$ και κάθε $m = \sum_{i \in I} m_i \in M$, έχουμε $e_j(m) = e_j(\sum_{i \in I} m_i) = (\iota_j \circ p_j)(\sum_{i \in I} m_i) = \iota_j(m_j) = m_j$. Ακόμη, $e_j^2(m) = e_j^2(\sum_{i \in I} m_i) = e_j(m_j) = m_j$. Άρα, $e_j^2 = e_j$.

Για κάθε ζεύγος (j,k), $1 \leq j,k \leq n$ με $j \neq k$ και κάθε $m = \sum_{i\in I} m_i \in M$, έχουμε $e_k \circ e_j(\sum_{i\in I} m_i) = e_k(m_j) = 0$. Άρα, $e_k e_j = \zeta_M$.
Συνεπώς, το σύνολο $\{e_j \mid j \in I\}$ είναι ένα σύνολο ταυτοδύναμων και ανά δύο ορθογώνιων στοιχείων τού $\mathrm{End}_R(M)$.
Επιπλέον, για κάθε $m = \sum_{i\in I} m_i \in M$, έχουμε

$$\sum_{j\in I} e_j(\sum_{i\in I} m_i) = \sum_{i,j\in I} e_j(m_i) = \sum_{j\in I} e_j(m_j) = \sum_{j\in I} m_j = m.$$

Επομένως, $\sum_{j\in I} e_j = \mathrm{id}_M$. Συνεπώς, το $\{e_j \mid j \in I\}$ ορίζει μια διάσπαση τής μονάδος id_M τού δακτυλίου ενδομορφισμών End. ♦

Θεώρημα 3.7.30. *Υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των διασπάσεων ενός* R*-μοδίου* M *σε ένα πεπερασμένο ευθύ άθροισμα υπομοδίων του και των υποσυνόλων τού* $\mathrm{End}_R(M)$ *που ορίζουν μια διάσπαση τής μονάδος του* id_M.

Απόδειξη Στο προηγούμενο λήμμα διαπιστώσαμε ότι μια διάσπαση ενός R-μοδίου M σε ένα πεπερασμένο ευθύ άθροισμα υπομοδίων του χορηγεί ένα υποσύνολο που ορίζει μια διάσπαση τής μονάδος id_M τού $\mathrm{End}_R(M)$.
Αντιστρόφως, έστω ότι το $\{e_j \mid j \in I\} \subseteq \mathrm{End}_R(M)$ ορίζει μια διάσπαση τής μονάδος id_M.
Για κάθε $j \in I$, θέτουμε $M_j = e_j(M)$. Θα δείξουμε ότι $M = \oplus_{j\in I} e_j(M)$ αποδεικνύοντας ότι ο M και η οικογένεια $(M_j)_{j\in I}$ των υπομοδίων του ικανοποιούν τις υποθέσεις (i) και (ii) τού Θεωρήματος 3.6.7.
Επειδή $\mathrm{id}_M = \sum_{j\in I} e_j$ έχουμε $\mathrm{id}_M(M) = \sum_{j\in I} e_j(M)$ και επομένως ικανοποιείται η συνθήκη (i).
Έστω $m \in M$ ένα στοιχείο που ανήκει στην τομή $M_j \cap \sum_{k\neq j} M_k$. Τότε $m = e_j(x) = \sum_{k\neq j} e_k(y_k)$, όπου τα x και y_k, $k \neq j$, είναι κάποια στοιχεία τού M. Εφαρμόζοντας τον ενδομορφισμό e_j στο m παίρνουμε $e_j(m) = e_j^2(x) = \sum_{k\neq j} e_j \circ e_k(y_k)$. Αλλά $e_j^2(x) = e_j(x) = m$, δηλαδή $e_j(m) = m$ και $\sum_{k\neq j} e_j \circ e_k(y_k) = 0_M$, αφού $e_j \circ e_k = \zeta_M$, επειδή $\forall k$ είναι $j \neq k$. Άρα, $m = 0_M$ και έτσι ικανοποιείται και η συνθήκη (ii) τού 3.6.7.
Εάν $M = \oplus_{j\in I} e_j(M)$ είναι η διάσπαση τού M η οποία προκύπτει από το σύνολο $\{e_j \mid j \in I\}$ που χορηγεί τη διάσπαση τής id_M και $p_j : M \to e_j(M)$, $\iota_j : e_j(M) \to M$ είναι η κανονική προβολή και η κανονική ένριψη που αντιστοιχούν στην j-στή συνιστώσα, τότε η σύνθεση $\iota_j \circ p_j$ συμπίπτει με τον ενδομορφισμό e_j, αφού αν $m = \sum_{i\in I} m_i = \sum_{i\in I} e_i(m)$, τότε $\iota_j \circ p_j(m) = \iota_j \circ p_j(\sum_{i\in I} e_i(m)) = e_j(m)$.
Αντιστρόφως, εάν $\{\iota_j \circ p_j = e_j \mid j \in I\}$ είναι το σύνολο που προέρχεται από τη διάσπαση $M = \oplus_{j\in I} M_j$, τότε το συγκεκριμένο σύνολο χορηγεί τη διάσπαση $M = \oplus_{j\in I} e_j(M)$ και επειδή για κάθε $j \in I$ είναι $e_j(M) = e_j^2(M) = e_j(M_j) = M_j$, προκύπτει η αρχική διάσπαση $M = \oplus_{j\in I} M_j$. ♦

Πόρισμα 3.7.31. *Ένας* R*-μόδιος* M *είναι αδιάσπαστος αν και μόνο αν τα μοναδικά ταυτοδύναμα στοιχεία τού δακτυλίου των ενδομορφισμών του* $\mathrm{End}_R(M)$ *είναι τα* id_M *και* ζ_M.

Παρατήρηση 3.7.32. *Εάν κάποιο σύνολο* $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subseteq R$ *χορηγεί τη διάσπαση τής μονάδος* 1_R *ενός δακτυλίου* R*, τότε χορηγεί και μια διάσπαση τής μονάδος* id_R *τού δακτυλίου ενδομορφισμών* $\mathrm{End}_R(R_R)$ *τού δεξιά κανονικού* R*-μοδίου* R*, αφού* $R \cong \mathrm{End}_R(R_R)$,

βλέπε Παρατήρηση 3.7.6. Συνεπώς, $R = \oplus_{i=1}^{n} e_i R$. *Η συγκεκριμένη διάσπαση ονομάζεται η δεξιά διάσπαση Pierce τού δακτυλίου* R. *Οι προσθετέοι* $e_i R$ *είναι δεξιά ιδεώδη τού* R. *Θεωρώντας τον αριστερό* R*-μόδιο* ${}_R R$, *προκύπτει η αριστερή διάσπαση Pierce τού* R, *δηλαδή η* $R = \oplus_{i=1}^{n} Re_i$, *οι προσθετέοι τής οποίας αποτελούν αριστερά ιδεώδη τού* R.
Τέλος, επειδή καθένα από τα Re_j *είναι ένας αριστερός* R*-μόδιος, έχουμε* $Re_j = \oplus_{i=1}^{n} e_i Re_j$ *και γι' αυτό* $R = \oplus_{i,j=1}^{n} e_i Re_j$. *Αυτή η διάσπαση τού* R *ονομάζεται η αμφίπλευρη διάσπαση Pierce. Συνήθως, οι συνιστώσες* $A_{ij} = e_i Re_j$ *τής συγκεκριμένης διάσπασης δεν είναι ούτε δεξιά ούτε αριστερά ιδεώδη τού* R. *Ωστόσο, με τη βοήθεια τής διάσπασης Pierce είναι δυνατόν να εκφραστούν τα στοιχεία τού* R *υπό μορφή πινάκων.*
Έστω ότι $r, s \in R$. *Χρησιμοποιώντας τη διάσπαση Pierce παίρνουμε:*

$$r = \sum_{i,j} r_{ij}, s = \sum_{i,j} s_{ij}, \text{ όπου } r_{ij} = e_i r e_j \text{ και } s_{ij} = e_i s e_j.$$

Τώρα έχουμε:

$$r + s = \sum_{i,j} (r_{ij} + s_{ij}) \text{ και } rs = \sum_{i,k} \sum_{\ell,j} r_{ik} s_{\ell j} = \sum_{i,j} \left(\sum_k r_{ik} s_{kj} \right),$$

αφού όταν $k \neq \ell$, *τότε* $r_{ik} s_{\ell j} = e_i r e_k e_\ell s e_j = 0$. *Συνεπώς,* $e_i (rs) e_j = \sum_k r_{ik} s_{kj}$.
Με βάση αυτές τις σχέσεις ταυτοποιούμε τα στοιχεία $r \in R$ *με τους* $n \times n$ *πίνακες*

$$A_r = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}, \text{ όπου } r_{ij} = e_i r e_j \in e_i R e_j$$

και διαπιστώνουμε ότι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός των στοιχείων r, s *τού* R *αντιστοιχούν στην πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό των πινάκων* A_r *και* A_s.

Ο Δακτύλιος Ενδομορφισμών ενός Μοδίου και η αμφίπλευρη Διάσπαση Pierce

Έστω ότι M είναι ένας R-μόδιος και ότι $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots M_n, n \in \mathbb{N}$ είναι μια διάσπασή του σε ένα ευθύ άθροισμα μιας πεπερασμένης οικογένειας υπομοδίων $(M_i)_{i \in I}, I = \{1, 2, \dots, n\}$. Σύμφωνα με το Λήμμα 3.7.29, οι ενδομορφισμοί $e_i = \iota_i \circ p_i : M \to M, 1 \leq i \leq n$ τού M, όπου $p_i : M \to M_i$ είναι η κανονική προβολή και $\iota_i : M_i \to M$) είναι η κανονική ένριψη, ορίζουν μια διάσπαση τής μονάδος id_M τού δακτυλίου $End_R(M)$. Επομένως, εάν $\varphi \in End_R(M)$, τότε

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix}, \text{ όπου } \varphi_{ij} = e_i \circ \varphi \circ e_j \in e_i End_R(M) e_j.$$

Προφανώς, το σύνολο $e_i\mathrm{End}_R(M)e_j$ αποτελεί μια προσθετική υποομάδα τού δακτυλίου $\mathrm{End}_R(M)$. Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση

$$\sigma : \mathrm{Hom}_R(M_j, M_i) \to \mathrm{End}_R(M), \psi \mapsto \iota_i \circ \psi \circ p_j.$$

αποτελεί έναν μονομορφισμό ομάδων με εικόνα την $e_i\mathrm{End}_R(M)e_j$ και ως εκ τούτου η $\mathrm{Hom}_R(M_j, M_i)$ μπορεί να ταυτιστεί με την υποομάδα $e_i\mathrm{End}_R(M)e_j$.

Είναι εύκολη η διαπίστωση ότι η σ αποτελεί έναν ομομορφισμό ομάδων (*γιατί;*). Από την Άσκηση 68 γνωρίζουμε ότι για κάθε ευθύ προσθετέο M_i ισχύει $p_i \circ \iota_i = \mathrm{id}_{M_i}$. Έτσι, εάν $\sigma(\psi) = \iota_i \circ \psi \circ p_j = \zeta_M$, τότε και $\psi = p_i \circ (\iota_i \circ \psi \circ p_j) \circ \iota_j = p_i \circ \zeta_M \circ \iota_j = \zeta_{M_j M_i}$. Ώστε ο σ είναι ένας μονομορφισμός.
Για την εικόνα κάθε $\psi \in \mathrm{Hom}_R(M_j, M_i)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sigma(\psi) = \iota_i \circ \psi \circ p_j = \iota_i \circ (p_i \circ (\iota_i \circ \psi \circ p_j) \circ \iota_j) \circ p_j = \\ (\iota_i \circ p_i) \circ (\iota_i \circ \psi \circ p_j) \circ (\iota_j \circ p_j) = e_i \circ (\iota_i \circ \psi \circ p_j) \circ e_j.\end{aligned}$$

Επομένως, $\mathrm{Im}(\sigma) \subseteq e_i\mathrm{End}_R(M)e_j$. Τέλος για κάθε $f \in \mathrm{End}_R(M)$, το στοιχείο $f_{ij} = e_i \circ f \circ e_j = (\iota_i \circ p_i) \circ f \circ (\iota_j \circ p_j) = \sigma(p_i \circ f \circ \iota_j)$, όπου προφανώς το $p_i \circ f \circ \iota_j$ ανήκει στην ομάδα $\mathrm{Hom}_R(M_j, M_i)$. Άρα, $e_i\mathrm{End}_R(M)e_j \subseteq \mathrm{Im}(\sigma)$ και τελικώς $\mathrm{Hom}_R(M_j, M_i) \cong e_i\mathrm{End}_R(M)e_j$.
Συνοψίζουμε την ανωτέρω ανάπτυξη στην

Πρόταση 3.7.33. *Έστω ότι R είναι ένας δακτύλιος, ότι $\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ είναι ένα σύνολο R-μοδίων και ότι M είναι το ευθύ άθροισμά τους. Τότε η απεικόνιση*

$$S = \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_R(M_1, M_1) & \mathrm{Hom}_R(M_2, M_1) & \ldots & \mathrm{Hom}_R(M_n, M_1) \\ \mathrm{Hom}_R(M_1, M_2) & \mathrm{Hom}_R(M_2, M_2) & \ldots & \mathrm{Hom}_R(M_n, M_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Hom}_R(M_1, M_n) & \mathrm{Hom}_R(M_2, M_n) & \ldots & \mathrm{Hom}_R(M_n, M_n) \end{pmatrix} \xrightarrow{\tau} \mathrm{End}_R(M_R),$$

$$(s_{ij}) \mapsto \sum_i^n \sum_j^n \iota_i \circ s_{ij} \circ p_j \text{ όπου } \forall i, j, 1 \le i, j \le n, s_{ij} \in \mathrm{Hom}_R(M_j, M_i).$$

είναι ένας ισομορφισμός δακτυλίων.

Απόδειξη Προτείνουμε να ελέγξει ο αναγνώστης μόνος του την αλήθεια τού ισχυρισμού, αφού το μεγαλύτερο μέρος τή απόδειξης εμπεριέχεται στην προηγηθείσα συζήτηση. Σημειώνουμε ότι κατά τον σχηματισμό τού γινομένου $(s_{ij})(t_{ij}) = (r_{ij})$ με $(s_{ij}), (t_{ij}) \in S$, ο προσθετέος $r_{ij} \in \mathrm{Hom}_R(M_j, M_i)$ ισούται με το $\sum_{\ell=1}^n s_{i\ell} \circ t_{\ell j}$, όπου $t_{\ell j} \in \mathrm{Hom}_R(M_j, M_\ell)$ και $s_{i\ell} \in \mathrm{Hom}_R(M_\ell, M_i)$.
Εναλλακτικώς μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι η απεικόνιση

$$\rho : \mathrm{End}_R(M_R) \to S, f \mapsto (s_{ij}) \text{ όπου } \forall i, j, 1 \le i, j \le n, s_{ij} = p_i \circ f \circ \iota_j$$

αποτελεί την αντίστροφη τής τ και εν συνεχεία να δείξει ότι η ρ είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων. ♦

Η περίπτωση τού κανονικού Μοδίου R_R

Έστω ότι R είναι ένας δακτύλιος και ότι $\mathcal{E} = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$ είναι ένα σύνολο που χορηγεί μια διάσπαση τής μονάδος τού R. Στην περίπτωση αυτή όπως ήδη γνωρίζουμε έχουμε $R = \epsilon_1 R \oplus \epsilon_2 R \oplus \cdots \oplus \epsilon_n R$. Όπως και προηγουμένως συμβολίζουμε με $p_i : R \to \epsilon_i R$ την κανονική προβολή και με $\iota_i : \epsilon_i R \to R$ την κανονική ένριψη που παίρνουμε από την διάσπαση τού R στο ανωτέρω ευθύ άθροισμα· επιπλέον συμβολίζουμε με e_i τη σύνθεσή τους $\iota_j \circ p_j$. Τώρα, με τη βοήθεια τού R-ισομορφισμού $\Phi : \mathrm{End}_R(R) \to R_R, \varphi \mapsto \varphi(1_R)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_R(\epsilon_j R, \epsilon_i R) \cong e_i \mathrm{End}(R_R) e_j \overset{\Phi}{\cong} \Phi(e_i)\Phi(\mathrm{End}(R_R))\Phi(e_j) = \\
&e_i(1_R) R e_j(1_R) = \epsilon_i R \epsilon_j .
\end{aligned}$$

Ασκηση 76. *Έστω ότι R είναι ένας δακτύλιος και ότι το υποσύνολο $\mathcal{E} = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$ τού R χορηγεί μια διάσπαση τής μονάδος τού R. Να δειχθεί με έναν απευθείας ισομορφισμό ότι* $\mathrm{Hom}_R(\epsilon_j R, \epsilon_i R) \cong \epsilon_i R \epsilon_j$.
(Υπόδειξη: $\varphi(\epsilon_j) = \varphi(\epsilon_j)\epsilon_j$.)

Κεφάλαιο 4

Απλοί Μόδιοι και πρωταρχικοί Δακτύλιοι

4.1 Εισαγωγή

Στην Επιστήμη των Μαθηματικών και ιδιαιτέρως στον κλάδο τής Άλγεβρας, έχουν μεγάλη σημασία οι λεγόμενες «δομικές προτάσεις». Πρόκειται για προτάσεις που περιγράφουν μεθόδους με τις οποίες συγκεκριμένα μαθηματικά αντικείμενα δομούνται από απλούστερα.
Για παράδειγμα:

(α′) Κάθε διανυσματικός χώρος V διάστασης n υπεράνω ενός σώματος K είναι ισόμορφος με το ευθύ άθροισμα n αντιγράφων τού σώματος K, δηλαδή

$$V \cong K \oplus K \oplus \cdots \oplus K \quad (n \text{ φορές }).$$

Εδώ, το απλό μαθηματικό αντικείμενο είναι το σώμα K και η μέθοδος είναι το ευθύ άθροισμα διανυσματικών χώρων.

(β′) Κάθε αβελιανή ομάδα G τάξης n είναι ισόμορφη με το ευθύ γινόμενο ορισμένων κυκλικών ομάδων, οι τάξεις των οποίων είναι δυνάμεις πρώτων αριθμών και το γινόμενο των τάξεων ισούται με την τάξη τής G, δηλαδή

$$G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{a_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_s^{a_s}},$$

όπου οι $p_1, p_2, \ldots, p_s$ είναι πρώτοι αριθμοί, οι $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{N}$ και το γινόμενο $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_s^{a_s} = n$.
Εδώ, τα απλά μαθηματικά αντικείμενα είναι οι κυκλικές ομάδες $\mathbb{Z}_{p_i^{a_i}}$ και η μέθοδος είναι το ευθύ γινόμενο ομάδων.

(γ′) Κάθε ομάδα με τάξη pq, όπου $p, q, p \neq q$ είναι δύο πρώτοι αριθμοί, είναι ισόμορφη με το ημιευθύ γινόμενο των ομάδων $\mathbb{Z}_p$ και $\mathbb{Z}_q$.

Εδώ, τα απλά μαθηματικά αντικείμενα είναι οι κυκλικές ομάδες $\mathbb{Z}_p$, p πρώτος και η μέθοδος είναι το ημιευθύ γινόμενο ομάδων.

Το τί ακριβώς σημαίνει «απλό μαθηματικό αντικείμενο» είναι μια ερώτηση που οφείλει να απαντηθεί σε κάθε συγκεκριμένη περίπτωση.
Θέμα τού παρόντος πονήματος είναι οι (όχι απαραιτήτως μεταθετικοί) δακτύλιοι και απλά αντικείμενα αποτελούν οι πλήρως γραμμικοί δακτύλιοι, βλέπε Ορισμό 3.7.25, δηλαδή δακτύλιοι ενδομορφισμών μοδίων υπεράνω διαιρετικών δακτυλίων. Εάν μάλιστα οι μόδιοι είναι πεπερασμένου βαθμήματος, τότε κατ' ουσίαν οι πλήρως γραμμικοί δακτύλιοι συμπίπτουν (είναι ισόμορφοι) με δακτυλίους πινάκων υπεράνω διαιρετικών δακτυλίων. Στην αμέσως επόμενη ενότητα θα δούμε πώς διασυνδέονται οι δακτύλιοι με τους πλήρως γραμμικούς δακτυλίους.

4.2 Απλοί Μόδιοι και Λήμμα Schur

Ορισμός 4.2.1. *Ένας δεξιός μόδιος M υπεράνω ενός δακτυλίου R ονομάζεται απλός, εάν $M \neq \{0\}$ και εάν οι μόνοι υπομόδιοι που διαθέτει είναι οι τετριμμένοι, δηλαδή οι M και $\{0\}$.*

Λήμμα 4.2.2. *Ένας δεξιός R-μόδιος $M \neq \{0\}$είναι απλός, αν και μόνο αν για κάθε $m \in M, m \neq 0$, ο κυκλικός R-μόδιος mR ισούται με τον M.*

Απόδειξη «$\Rightarrow$» Έστω ένα στοιχείο $m \neq 0$ τού M. Ο κυκλικός υπομόδιος mR δεν συμπίπτει με τον μηδενικό υπομόδιο τού M και γι' αυτό $mR = M$.
«$\Leftarrow$» Έστω $N \subseteq M$ ένας μη-μηδενικός υπομόδιος τού M. Εφόσον $N \neq \{0\}$, υπάρχει $n \in N$ με $n \neq 0$. Τώρα έχουμε $M = nR \subseteq N$. Άρα, $M = N$. ♦

Με άλλα λόγια ένας μη-μηδενικός R-μόδιος M είναι απλός, αν και μόνο αν για κάθε $m \neq 0$, ο υπομόδιος $\langle\{m\}\rangle \neq \{0\}$ συμπίπει με τον M.

Κάθε απλός δεξιός R-μόδιος είναι κυκλικός και προφανώς υπάρχουν κυκλικοί R-μόδιοι που δεν είναι απλοί. Επί παραδείγματι, ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Z}_4$ είναι κυκλικός αφού παράγεται από το $1 \mod 4$, αλλά δεν είναι απλός αφού διαθέτει έναν υπομόδιο, τον $\langle 2 \mod 4\rangle = \{0 \mod 4, 2 \mod 4\}$ που δεν είναι τετριμμένος.

Λήμμα 4.2.3 (*Το Λήμμα Schur*)**.** *Ο δακτύλιος ενδομορφισμών ενός απλού δεξιού R-μοδίου M είναι διαιρετικός.*

Απόδειξη Επειδή ο M είναι ένας απλός R-μόδιος, ο μηδενικός ενδομορφισμός ζ_M δεν συμπίπτει με τον ταυτοτικό ενδομορφισμό id_M και συνεπώς ο $\mathrm{End}_R(M)$ δεν είναι ο μηδενοδακτύλιος. Τώρα θα δείξουμε ότι κάθε $\varphi \in \mathrm{End}_R(M)$, $\varphi \neq \zeta_M$ είναι ένας ισομορφισμός και γι' αυτό αποτελεί ένα αντιστρέψιμο στοιχείο τού $\mathrm{End}_R(M)$.
Έστω λοιπόν ένας μη-μηδενικός ενδομορφισμός $\varphi : M \to M$. Εάν υπήρχε κάποιο $m \neq 0$ με $m \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, τότε θα ήταν $M = mR \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$, δηλαδή θα ήταν ο $\varphi = \zeta_M$· αυτό όμως είναι άτοπο. Άρα, ο φ είναι μονομορφισμός. Ας θεωρήσουμε τώρα την εικόνα $\varphi(M) \subseteq M$. Εάν ήταν $\varphi(M) \subsetneq M$, τότε θα ήταν $\varphi(M) = \{0\}$, αφού ο M είναι ένας απλός μόδιος, δηλαδή θα ήταν ο $\varphi = \zeta_M$· αυτό όμως είναι άτοπο. Άρα, ο φ είναι ισομορφισμός και γι'

αυτό πρόκειται για ένα αντιστρέψιμο στοιχείο τού $\mathrm{End}_R(M)$. Επομένως, ο $\mathrm{End}_R(M)$ είναι ένας δακτύλιος με διαίρεση. ♦

Σύμφωνα με το ανωτέρω λήμμα, αν ο M είναι ένας απλός R-μόδιος, τότε ο $D = \mathrm{End}_R(M)$ είναι ένας διαιρετικός δακτύλιος. Συνεπώς, αν θεωρήσουμε τον αμφιμεταθέτη $\mathrm{Bicom}_R(M)$, δηλαδή τον δακτύλιο $\mathrm{End}_D(M)$ των D-ενδομορφισμών του, και εν συνεχεία τον αντικείμενο τού αντιμεταθέτη δακτύλιο, δηλαδή τον δακτύλιο $\mathrm{Bicom}_R(M)^{op}$, τότε διαπιστώνουμε ότι ο τελευταίος είναι ένας πλήρως γραμμικός δακτύλιος, βλέπε Ορισμό 3.7.25.

Παράδειγμα 4.2.4. *Έστω D ένας διαιρετικός δακτύλιος και $R = \mathbb{M}_n(D)$ ο δακτύλιος των $n \times n$ πινάκων υπεράνω τού D. Από την Άσκηση 61 γνωρίζουμε ότι ο δεξιός R-μόδιος $e_{\kappa\kappa}R$, όπου $e_{\kappa\kappa}$ είναι ο στοιχειώδης (κ, κ)-πίνακας, αποτελείται ακριβώς από τους πίνακες τής μορφής[1]:*

$$(s_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_{\kappa 1} & s_{\kappa 2} & \dots & s_{\kappa\lambda} & \dots & s_{\kappa(n-1)} & s_{\kappa n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

όπου $\forall j, 1 \leq j \leq n, s_{\kappa j} \in D$.
Θα δείξουμε ότι ο $e_{\kappa\kappa}R$ είναι απλός R-μόδιος. Πράγματι, αν N είναι ένας μη-μηδενικός υπομόδιος τού $e_{\kappa\kappa}R$, τότε υπάρχει ένα στοιχείο $(s_{ij}) \in N$ με κάποια από τις συνιστώσες του, ας πούμε την (κ, λ)-συνιστώσα $s_{\kappa\lambda}$, διάφορη από το 0_D. Το γινόμενο $(s_{ij})e_{\lambda\lambda}$, όπου $e_{\lambda\lambda}$ είναι ο στοιχειώδης (λ, λ)-πίνακας, ανήκει στον N και όλες οι συνιστώσες του ισούνται με 0_D, εκτός από την (κ, λ)-συνιστώσα που ισούται με $s_{\kappa\lambda}$. Πολλαπλασιάζοντας τώρα τον $(s_{ij})e_{\lambda\lambda}$ με τον βαθμωτό πίνακα $\alpha(s_{\kappa\lambda}^{-1})$, βλέπε σελ. 19, προκύπτει ο πίνακας $e_{\kappa\lambda}$ που ανήκει στον υπομόδιο N. Αλλά τώρα, κάθε πίνακας $e_{\kappa\lambda}e_{\lambda j} = e_{\kappa j}, 1 \leq j \leq n$ ανήκει επίσης στον N και γι' αυτό κάθε στοιχείο $(s_{ij}) \in e_{\kappa\kappa}R$ ανήκει στον υπομόδιο N, αφού $(s_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} e_{\kappa j}\alpha(s_{\kappa j})$. Άρα, $N = e_{\kappa\kappa}R$ και ο R-μόδιος $e_{\kappa\kappa}R$ είναι απλός.
Σύμφωνα με το Λήμμα Schur ο δακτύλιος ενδομορφισμών $\mathrm{End}_R(e_{\kappa\kappa}R)$ οφείλει να είναι ένας διαιρετικός δακτύλιος. Πράγματι, από το Παράδειγμα 3.7.14 γνωρίζουμε ότι ο $\mathrm{End}_R(e_{\kappa\kappa}R)$ είναι ισόμορφος με τον διαιρετικό δακτύλιο D. Σημειώστε, ότι από την Άσκηση 61 ξέρουμε ότι ο εκμηδενιστής $\mathrm{Ann}_R(e_{\kappa\kappa}R)$ ισούται με το μηδενικό ιδεώδες τού R. Ώστε, όταν ο D είναι ένας διαιρετικός δακτύλιος, τότε ο δακτύλιος $R = \mathbb{M}_n(D)$, διαθέτει έναν πιστό και απλό R-μόδιο και συγκεκριμένα τον $e_{\kappa\kappa}R$.

Το αμέσως προηγούμενο παράδειγμα φανερώνει ότι ο $R = \mathbb{M}_n(D)$ διαθέτει τουλάχιστον n το πλήθος απλούς και πιστούς R-μόδιους, πρόκειται για τούς $e_{ii}R, 1 \leq i \leq n$. Ωστόσο, σύμφωνα με την επόμενη άσκηση, οι συγκεκριμένοι R-μόδιοι είναι όλοι ισόμορφοι μεταξύ τους.

[1]Βέβαια, αν $\kappa = 1$, τότε όλες οι γραμμές τού πίνακα, εκτός πιθανόν από την πρώτη, αποτελούνται μόνο από το 0_D.

Ασκηση 77. *Έστω $R = \mathbb{M}_n(D)$ ο δακτύλιος των $n \times n$ πινάκων υπεράνω ενός διαιρετικού δακτυλίου D. Να δειχθεί ότι για οποιοδήποτε ζεύγος $(\kappa, \lambda), 1 \leq \kappa, \lambda \leq n$, οι R-μόδιοι $e_{\kappa\kappa}R$ και $e_{\lambda\lambda}R$ είναι ισόμορφοι.*

Ασκηση 78. *Έστω M και N δύο απλοί και μή-ισόμορφοι δεξιοί R-μόδιοι.Να δειχθεί ότι η ομάδα $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ των ομομορφισμών τους είναι η τετριμμένη ομάδα $\{\zeta_{MN}\}$.*

Ασκηση 79. *Έστω M ένας απλός δεξιός R-μόδιος και N οποιοσδήποτε δεξιός R-μόδιος.*

(α′) Να δειχθεί ότι οποιοσδήποτε μη-μηδενικός ομομορφισμός $\varphi : M \to N$ είναι ενριπτικός.

(β′) Να δειχθεί ότι οποιοσδήποτε μη-μηδενικός ομομορφισμός $\varphi : N \to M$ είναι επιρριπτικός.

Πρόταση 4.2.5. *Εάν M και N είναι δύο απλοί δεξιοί R-μόδιοι τού δακτυλίου $R = \mathbb{M}_n(D)$, όπου ο D είναι ένας διαιρετικός δακτύλιος, τότε $M \cong N$.*

Απόδειξη Θα δείξουμε ότι οποιοσδήποτε απλός δεξιός R-μόδιος M είναι ισόμορφος με κάποιο $e_{ii}R, 1 \leq i \leq n$ και επειδή σύμφωνα με την Άσκηση 77 όλοι οι R-μόδιοι $e_{ii}R, 1 \leq i \leq n$ είναι ισόμορφοι μεταξύ τους, προκύπτει ότι δύο οποιοιδήποτε R-μόδιοι είναι ισόμορφοι.
Έστω ένας απλός R-μόδιος M και $m \neq 0 \in M$. Από το Λήμμα 4.2.2 γνωρίζουμε ότι $mR = M$. Το σύνολο των στοιχειωδών πινάκων $\{e_{ii} \mid 1 \leq i \leq n\}$ τού R ορίζει μια διάσπαση τής μονάδος τού R και γι' αυτό ο $R = \oplus_{i=1}^{n} e_{ii}R$, όπου $\oplus_{i=1}^{n} e_{ii}R$ είναι η δεξιά διάσπαση Pierce. Τώρα, $M = mR = \oplus_{i=1}^{n} me_{ii}R$ και επειδή ο M είναι απλός R-μόδιος και οι $me_{ii}R$ είναι υπομόδιοι τού M υπάρχει ένας μοναδικός δείκτης $\kappa, 1 \leq \kappa \leq n$ με $M = me_{\kappa\kappa}R$ και $me_{ii}R = \{0_M\}$, όταν $i \neq \kappa$. Η απεικόνιση $\varphi : e_{\kappa\kappa}R \to me_{\kappa\kappa}R, e_{\kappa\kappa}r \mapsto me_{\kappa\kappa}r$ είναι ένας μη-μηδενικός ομομορφισμός R-μοδίων και εφόσον οι $me_{\kappa\kappa}R = M$ και $e_{\kappa\kappa}R$ είναι απλοί R-μόδιοι, έπεται ότι ο φ είναι ένας ισομορφισμός. ♦

Παρατήρηση 4.2.6. *Αναλόγως, ορίζεται η έννοια τού απλού αριστερού R-μοδίου ενός δακτυλίου R. Όλες οι προτάσεις που αποδείξαμε για τους δεξιούς R-μόδιους ισχύουν και για αριστερούς R-μόδιους.*

Ασκηση 80. *Έστω $R = \mathbb{M}_n(D)$ ο δακτύλιος των $n \times n$ πινάκων υπεράνω ενός διαιρετικού δακτυλίου D και το σύνολο των στοιχειωδών πινάκων $\{e_{ii} \mid 1 \leq i \leq n\}$.*

(α′) Να δειχθεί ότι για κάθε $i, 1 \leq i \leq n$ οι αριστεροί R-μόδιοι Re_{ii} είναι απλοί και ισόμορφοι μεταξύ τους.

(β′) Να δειχθεί ότι όλοι οι απλοί αριστεροί μόδιοι υπεράνω τού δακτυλίου R είναι ισόμορφοι.

(γ′) Να δειχθεί ότι ο απλός αριστερός R-μόδιος $Re_{\kappa\kappa}$ συνίσταται από τους πίνακες τού R που όλες οι στήλες τους αποτελούνται από το μηδενικό στοιχείο τού D με εξαίρεση την κ-στήλη, οι συνιστώσες τής οποίας είναι οποιαδήποτε στοιχεία τού D.

4.2.1 *Απλοί Μόδιοι και δεξιά μεγιστοτικά Ιδεώδη*

Από την Παρατήρηση 3.4.14 γνωρίζουμε ότι κάθε κυκλικός R-μόδιος $M = mR$ είναι ισόμορφος με έναν R-μόδιο τής μορφής R_R/I, όπου I είναι ένα δεξιό ιδεώδες. Επομένως και κάθε απλός δεξιός R-μόδιος είναι ισόμορφος με κάποιον R_R/I. Ωστόσο, στην περίπτωση αυτή μπορούμε να περιγράψουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια το δεξιό ιδεώδες I.

Πρόταση 4.2.7. *Ένας δεξιός R-μόδιος M είναι απλός, αν και μόνο αν είναι ισόμορφος με έναν πηλικομόδιο τής μορφής R_R/I, όπου το I είναι ένα δεξιό μεγιστοτικό ιδεώδες τού R.*

Απόδειξη «$\Rightarrow$» Έστω ότι $m \in M$ είναι ένα μη-μηδενικό στοιχείο τού M ότι $\varphi : R_R \to mR = M$ είναι ο ομομορφισμός R-μοδίων που απεικονίζει κάθε $r \in R$ στο $mr \in M$ και ότι $I = \mathrm{Ker}(\varphi)$ είναι ο πυρήνας τού φ. Σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε, ο φ είναι ένας επιμορφισμός και $M \cong R_R/I$. Ας υποθέσουμε ότι το J είναι ένα δεξιό ιδεώδες τού R, τέτοιο ώστε $I \subsetneq J \subsetneq R$, τότε ο J/I είναι ένας μη-τετριμμένος υπομόδιος τού R_R/I, δηλαδή $I/I \subsetneq J/I \subsetneq R_R/I$ και γι' αυτό ο $\varphi^{-1}(J/I)$ είναι ένας μη-τετριμμένος υπομόδιος τού M, δηλαδή $\{0_M\} \subsetneq \varphi^{-1}(J/I) \subsetneq M$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού ο M, όντας απλός μόδιος, δεν διαθέτει μη-τετριμμένους γνήσιους υπομόδιους. Επομένως, είτε $J = I$ είτε $J = R$ και γι' αυτό είναι το J ένα δεξιό μεγιστοτικό ιδεώδες.
«$\Leftarrow$» Ας υποθέσουμε ότι ο M δεν είναι απλός R-μόδιος. Τότε ο M διαθέτει έναν γνήσιο μη-τετριμμένο υπομόδιο N, δηλαδή $\{0_M\} \subsetneq N \subsetneq M$ και γι' αυτό ο $\varphi(N)$ είναι ένας υπομόδιος τού R_R/I, τέτοιος ώστε $I/I \subsetneq \varphi(N) \subsetneq R_R/I$. Σύμφωνα με το Θεώρημα Αντιστοιχίας για Μοδίους, βλέπε Θεώρημα 3.4.11, υπάρχει ένας δεξιός υπομόδιος J τού R_R, δηλαδή ένα δεξιό ιδεώδες J, με $I \subsetneq J \subsetneq R$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού το I είναι ένα μεγιστοτικό ιδεώδες. Επομένως, ο M είναι ένας απλός μόδιος. ♦

Παρατήρηση 4.2.8. *Σημειώνουμε ότι ο πυρήνας $\mathrm{Ker}(\varphi)$ τού επιμορφισμού $\varphi : R \to mR$ συμπίπτει με τιν εκμηδενιστή $\mathrm{Ann}_R(m)$ τού στοιχείου $m \in M$.*

Πόρισμα 4.2.9. *Κάθε δακτύλιος R με $1_R \neq 0_R$ διαθέτει απλούς δεξιούς μόδιους.*

Απόδειξη Σύμφωνα με το Πόρισμα 1.3.10, κάθε δακτύλιος διαθέτει δεξιά μεγιστοτικά ιδεώδη και ως εκ τούτου και δεξιούς απλούς μόδιους. ♦

Στο ανωτέρω πόρισμα είναι απαραίτητη η συνθήκη $1_R \neq 0_R$, αφού όταν ο R είναι ο μηδενοδακτύλιος, τότε δεν μπορεί να έχει μεγιστοτικά ιδεώδη.

Παρατήρηση 4.2.10. *Εφόσον κάθε δακτύλιος R με $1_R \neq 0_R$ διαθέτει αριστερά μεγιστοτικά ιδεώδη, έπεται ότι διαθέτει και απλούς αριστερούς μόδιους. Επιπλέον, κάθε αριστερός R-μόδιος είναι τής μορφής ${}_RR/I$, όπου το I είναι ένα αριστερό μεγιστοτικό ιδεώδες.*

Ασκηση 81. *Να προσδιοριστούν με ακρίβεια ισομορφισμού όλοι οι απλοί μόδιοι υπεράνω τού δακτυλίου των ακεραίων αριθμών.*

Ασκηση 82. *Να προσδιοριστούν με ακρίβεια ισομορφισμού όλοι οι απλοί μόδιοι υπεράνω τού πολυωνυμικού δακτυλίου K[x], όπου το K είναι ένα σώμα.*

Ασκηση 83. *Έστω R ένας δακτύλιος. Να δειχθεί ότι ο R είναι ένας διαιρετικός δακτύλιος, αν και μόνο αν ο δεξιά κανονικός R-μόδιος R_R είναι απλός.*

4.2.2 *Απλοί πιστοί Μόδιοι και πρωταρχικοί Δακτύλιοι*

Από το Πόρισμα 3.7.19 γνωρίζουμε ότι αν ένας δακτύλιος R διαθέτει έναν πιστό μόδιο M, τότε είναι ισόμορφος με έναν υποδακτύλιο τού $\mathrm{Bicom}_R(M)^{op}$. Επιπλέον, εάν ο M είναι απλός, τότε ο $\mathrm{Bicom}_R(M)$ είναι ο δακτύλιος ενδομορφισμών τού αριστερού D-μοδίου ${}_DM$, όπου ο D είναι ο διαιρετικός δακτύλιος $\mathrm{End}_R(M_R)$. Συνεπώς, ο R είναι ισομόρφος με έναν υποδακτύλιο τού πλήρως γραμμικού δακτυλίου $\mathrm{End}_D({}_DM)^{op}$.

Ορισμός 4.2.11. *Ένας δακτύλιος* R *ονομάζεται δεξιά πρωταρχικός, αν διαθέτει έναν απλό και πιστό δεξιό* R*-μόδιο.*

Αναλόγως ορίζεται και η έννοια τού *αριστερά πρωταρχικού* δακτύλιος. Ωστόσο, υπάρχουν παραδείγματα, βλέπε [Ro], σελ. 129-132, δεξιά πρωταρχικών δακτυλίων που δεν είναι αριστερά πρωταρχικοί. Από εδώ και στο εξής λέγοντας *πρωταρχικός δακτύλιος* θα εννοούμε πάντοτε έναν *δεξιά πρωταρχικό δακτύλιο*.

Παράδειγμα 4.2.12. *Ένας μεταθετικός δακτύλιος* R *είναι πρωταρχικός, αν και μόνο αν είναι σώμα.*
«$\Leftarrow$» Αν ο R *είναι σώμα, τότε προφανώς ο δεξιά κανονικός* R*-μόδιος* R_R *είναι απλός και πιστός.*
«$\Rightarrow$» Εάν ο R *διαθέτει τον απλό δεξιό* R*-μόδιο* M*, τότε* $mR = M$ *και* $M \cong R_R/I$*, όπου το* $I = \mathrm{Ann}_R(m)$ *είναι ένα (αμφίπλευρο) μεγιστοτικό ιδεώδες τού* R*. Επιπλέον, επειδή ο* R *είναι μεταθετικός ο εκμηδενιστής* $\mathrm{Ann}_R(m)$ *συμπίπτει με τον εκμηδενιστή* $\mathrm{Ann}_R(M)$ *(γιατί;) και αφού ο* M *είναι πιστός έχουμε* $I = \mathrm{Ann}_R(m) = \mathrm{Ann}_R(M) = \{0_R\}$*. Έτσι συμπεραίνουμε ότι το μηδενικό ιδεώδες* $\{0_R\}$ *είναι μεγιστοτικό και συνεπώς ο* R *δεν διαθέτει άλλα γνήσια ιδεώδη. Άρα, κάθε μη-μηδενικό στοιχείο τού* R *είναι αντιστρέψιμο και γι' αυτό ο* R *είναι σώμα.*

Παράδειγμα 4.2.13. *Κάθε απλός δακτύλιος* R *είναι πρωταρχικός. Σύμφωνα με το Πόρισμα 4.2.9 κάθε δακτύλιος διαθέτει απλούς δεξιούς μόδιους. Εάν τώρα ο* M *είναι ένας απλός* R*-μόδιος, τότε ο εκμηδενιστής του* $\mathrm{Ann}_R(M)$ *είναι ένα αμφίπλευρο ιδεώδες τού* R *και αφού ο* R *είναι απλός δακτύλιος, ο* $\mathrm{Ann}_R(M)$ *θα ισούται ή με το μηδενικό ιδεώδες τού* R *ή θα συμπίπτει με τον* R*. Η δεύτερη περίπτωση αποκλείεται, αφού τότε* $1_R \in \mathrm{Ann}_R(M)$ *και συνεπώς* $M = \{0_M\}$*. Όμως αυτό είναι άτοπο, αφού ο* M *όντας απλός δεν μπορεί να ισούται με τον μηδενικό μόδιο* $\{0_M\}$*. Επομένως,* $\mathrm{Ann}_R(M) = \{0_R\}$ *και ο* M *είναι πιστός.*

Ασκηση 84. *Να δειχθεί ότι το ευθύ γινόμενο δύο δακτυλίων δεν είναι ποτέ ένας πρωταρχικός δακτύλιος.*

Ασκηση 85. *Να δειχθεί ότι ο πολυωνυμικός δακτύλιος* $K[x]$*, όπου το* K *είναι ένα σώμα, δεν είναι ποτέ ένας πρωταρχικός δακτύλιος. (Υπόδειξη: Να ληφθεί υπόψιν η Άσκηση 82.)*

Παράδειγμα 4.2.14. *Κάθε πλήρως γραμμικός δακτύλιος* $\mathrm{End}_D({}_DM)^{op}$ *είναι πρωταρχικός. Υπενθυμίζουμε ότι σύμφωνα με τον ορισμό τής έννοιας τού πλήρως γραμμικού δακτυλίου, ο* D *είναι ένας διαιρετικός δακτύλιος και ο* M *είναι οποιοσδήποτε αριστερός* D*-μόδιος. Από την Άσκηση 73 γνωρίζουμε ότι ο* M *μπορεί να θεωρηθεί ως ένας δεξιός* $\mathrm{End}_D({}_DM)^{op}$*-μόδιος, όπου για κάθε* $\varphi \in \mathrm{End}_D({}_DM)^{op}$ *και* $m \in M$*, ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός ορίζεται ως* $m\varphi = \varphi(m)$*. Προφανώς, ο* M *είναι ένας πιστός* $\mathrm{End}_D({}_DM)^{op}$*-μόδιος, αφού αν*

$\varphi \in \mathrm{Ann}_{\mathrm{End}_D({}_DM)^{op}}(M)$, *τότε για κάθε* $m \in M$ *έχουμε* $0_M = m\varphi = \varphi(m)$ *και συνεπώς ο* φ *είναι ο μηδενικός ομομορφισμός τού* M.
Υπολείπεται η απόδειξη ότι ο M *είναι ένας απλός δεξιός* $\mathrm{End}_D({}_DM)^{op}$*-μόδιος. Σύμφωνα με το Λήμμα 4.2.2 αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε* $m, m' \in M$, *όπου* $m \neq 0_M$, *υπάρχει κάποιο* $\varphi \in \mathrm{End}_D({}_DM)^{op}$ *με* $m\varphi = m'$. *Όμως, ο* M *είναι ένας ελεύθερος αριστερός* $\mathrm{End}_D({}_DM)$*-μόδιος, αφού ο* D *είναι ένας διαιρετικός δακτύλιος και γι' αυτό το γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο* $\{m\}$ *μπορεί να συμπληρωθεί σε μια βάση τού* M, *βλέπε Θεώρημα 3.6.19, και ακολούθως να οριστεί ένας* D*-ομομορφισμός* $\varphi : M \to M$ *με* $\varphi(m) = m'$, *βλέπε Θεώρημα 3.6.16. Άρα, ο* M *είναι απλός δεξιός* $\mathrm{End}_D({}_DM)^{op}$*-μόδιος.*

Παράδειγμα 4.2.15. *Ο δακτύλιος* $\mathbb{M}_n(D)$ *των* $n \times n$ *πινάκων με συνιστώσες από έναν διαιρετικό δακτύλιο* D *είναι πρωταρχικός, αφού είναι απλός δακτύλιος. (Μια διαφορετική επιχειρηματολογία είναι και η ακόλουθη: Ο* $\mathbb{M}_n(D)$ *είναι ισόμορφος με τον δακτύλιο* $(\mathrm{End}_D({}_DM))^{op}$, *όπου* M *είναι ένας αριστερός* D*-μόδιος βαθμήματος* n, *βλέπε 76. Συνεπώς ο* $\mathbb{M}_n(D)$ *είναι ένας πλήρως γραμμικός δακτύλιος και από το αμέσως προηγούμενο παράδειγμα γνωρίζουμε ότι κάθε πλήρως γραμμικός δακτύλιος είναι πρωταρχικός.)*

Παράδειγμα 4.2.16. *Δεν είναι απαραίτητο κάθε υποδακτύλιος ενός πρωταρχικού δακτυλίου να είναι πρωταρχικός. Το σώμα* $\mathbb{Q}$ *είναι πρωταρχικός δακτύλιος. Ο υποδακτύλιος* $\mathbb{Z}$ *δεν είναι πρωταρχικός (γιατί;).*

Παράδειγμα 4.2.17. *Δεν είναι κάθε πρωταρχικός δακτύλιος απλός. Έστω ο πλήρως γραμμικός δακτύλιος* $\mathrm{End}_D({}_DM)^{op}$, *όπου ο* D *είναι ένας διαιρετικός δακτύλιος και ο* M *είναι ένας αριστερός μόδιος άπειρου βαθμήματος. Το σύνολο*

$$\{\varphi \in \mathrm{End}_D({}_DM)^{op} \mid \mathrm{rank}_D(\varphi(M)) < \infty\}$$

είναι ένα αμφίπλευρο και μη-τετριμμένο ιδεώδες τού $\mathrm{End}_D({}_DM)^{op}$ *(γιατί;).*

Το Θεώρημα Πυκνότητος Jacobson

Ορισμός 4.2.18. *Έστω ότι* M *είναι ένας αριστερός μόδιος υπεράνω ενός διαιρετικού δακτυλίου* D *και ότι* R *είναι ένας υποδακτύλιος τού* $\mathrm{End}_D({}_DM)^{op}$. *Ο* R *ονομάζεται πυκνός υποδακτύλιος τού* $\mathrm{End}_D({}_DM)^{op}$, *αν ικανοποιείται η ακόλουθη συνθήκη:*
(D_n)*: Για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και κάθε* D*-γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο στοιχείων* $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ *τού* M, *το ευθύ άθροισμα* n *το πλήθος αντίγραφων τού* M, *δηλαδή ο* $M^{(n)}$, *παράγεται ως δεξιός* R*-μόδιος από το στοιχείο* $(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in M^{(n)}$.

Παρατήρηση 4.2.19.
- *(α′) Εάν ο* M *είναι πεπερασμένου βαθμήματος, έστω ότι* $\mathrm{rank}_D(M) = n$, *τότε δεν υπάρχουν γραμμικώς ανεξάρτητα υποσύνολά του με περισσότερα από* n *στοιχεία και συνεπώς, αν* $n' > n$, *τότε η συνθήκη* $(D_{n'})$ *ικανοποιείται κατά τετριμμένο τρόπο, αφού πρόκειται για μια κενή συνθήκη.*
- *(β′) Το ότι ο* $M^{(n)}$, *παράγεται ως δεξιός* R*-μόδιος από το* $(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in M^{(n)}$ *σημαίνει ότι αν* $m'_1, m'_2, \ldots, m'_n$ *είναι οποιαδήποτε* n *το πλήθος στοιχεία τού* M, *τότε υπάρχει κάποιο στοιχείο* $r \in R$ *με* $m'_i = m_i r$, *για κάθε* i, $1 \leq i \leq n$.

(γ′) *Κάθε πυκνός υποδακτύλιος* R *τού* $\mathrm{End}_D({}_DM)^{op}$*είναι πρωταρχικός. Πράγματι, ο* M *είναι ένας πιστός* R*-μόδιος, αφού για κάθε* $\varphi \in R$ *με* $M\varphi = \{0_M\}$*, δηλαδή* $\varphi(M) = \{0_M\}$*, έπεται ότι ο* D*-ενδομορφισμός* φ *είναι ο μηδενικός. Επιπλέον, ο* M *είναι απλός, λόγω τής συνθήκης* (D_1).

(δ′) *Η χρήση τής ορολογίας «πυκνός» οφείλεται στην ακόλουθη παρατήρηση: Έστω ότι* $m \in M$ *και* $\varphi \in \mathrm{End}_D({}_DM)^{op}$*. Για κάθε* $m \in M$ *και* $\varphi \in \mathrm{End}_D({}_DM)^{op}$*, συμβολίζουμε με* $B(m, \varphi)$ *το* $\{\psi \in \mathrm{End}_D({}_DM)^{op} \mid m\psi = m\varphi\}$*. Τα σύνολα* $B(m, \varphi)$ *αποτελούν μια υποβάση για μια τοπολογία που ορίζεται επί τού συνόλου* $\mathrm{End}_D({}_DM)^{op}$ *και ονομάζεται η πεπερασμένη τοπολογία τού* $\mathrm{End}_D({}_DM)^{op}$*. Ένας υποδακτύλιος* $R \subseteq \mathrm{End}_D({}_DM)^{op}$ *είναι πυκνός αν και μόνο αν το σύνολο* R *είναι ένας πυκνό υποσύνολο τού* $\mathrm{End}_D({}_DM)^{op}$ *ως προς την πεπερασμένη τοπολογία.*

Θεώρημα 4.2.20 (*Το Θεώρημα Πυκνότητος Jacobson*)**.** *Εάν ο δακτύλιος* R *είναι δεξιά πρωταρχικός, δηλαδή διαθέτει έναν απλό και πιστό δεξιό* R*-μόδιο* M*, τότε είναι ισόμορφος με έναν πυκνό υποδακτύλιο τού* $\mathrm{End}_D({}_DM)^{op}$*, όπου* D *είναι ο δακτύλιος* $\mathrm{End}_R(M_R)$.

Απόδειξη Εφόσον ο M είναι ένας πιστός R-μόδιος, έπεται από το Πόρισμα 3.7.19 ότι ο R είναι ισόμορφος με έναν υποδακτύλιο τού $\mathrm{Bicom}_R(M_R)^{op}$, δηλαδή με έναν υποδακτύλιο τού $\mathrm{End}_D({}_DM)^{op}$. Επιπλέον, επειδή ο M είναι απλός, ο $\mathrm{End}_D({}_DM)^{op}$ είναι ένας πλήρως γραμμικός δακτύλιος. Ταυτίζοντας τόν R με την εικόνα του, μπορούμε να δεχθούμε ότι ο R είναι ένας υποδακτύλιος τού $\mathrm{End}_D({}_DM)^{op}$.
Εφαρμόζοντας την αποδεικτική διαδικασία τής επαγωγής ως προς n, θα αποδείξουμε ότι για κάθε D-γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ τού M, ο R-μόδιος $M^{(n)}$ ισούται με $(m_1, m_2, \ldots, m_n)R$.
Για $k = 1$, έχουμε $m_1R = M$, επειδή ο M είναι απλός.
Ας υποθέσουμε ότι η πρότασή μας είναι αληθής για $k = n - 1$. Θα προχωρήσουμε στην απόδειξή της για $k = n$. Έστω ένα D-γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\} \subseteq M$. Πρώτα, θα αποδείξουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό:

> **(A)**: *Υπάρχει ένα στοιχείο* $r \neq 0$ *τού* R *με* $m_nr \neq 0$ *και* $m_ir = 0$*, για κάθε* $i, 1 \leq i \leq n-1$.

Ας υποθέσουμε το αντίθετο, δηλαδή ότι όταν για κάθε $i, 1 \leq i \leq n-1$, είναι $m_ir = 0$ με $r \neq 0$, τότε είναι και $m_nr = 0$. Τότε όμως, η αντιστοιχία $\varphi : (m_1, m_2, \ldots, m_{n-1})R \to M, (m_1, m_2, \ldots, m_{n-1})r \to m_nr$ είναι μια καλά ορισμένη απεικόνιση, αφού αν $(m_1, m_2, \ldots, m_{n-1})r = (m_1, m_2, \ldots, m_{n-1})r'$, τότε $\forall i, 1 \leq i \leq n-1, m_ir = m_ir'$, δηλαδή $m_i(r - r') = 0$, από όπου έπεται, λόγω τής παραδοχής μας, ότι και $m_n(r - r') = 0$, ήτοι $m_nr = m_nr'$. Τώρα, είναι φανερό ότι η απεικόνιση φ είναι ένας R-ομομορφισμός και μάλιστα από τον R-μόδιο $M^{(n-1)}$ στον M, αφού σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση ο μόδιος $(m_1, m_2, \ldots, m_{n-1})R$ ισούται με $M^{(n-1)}$. Για κάθε $i, 1 \leq i \leq n-1$, θεωρούμε την κανονική ένριψη $\iota_i : M \to M^{(n-1)}, m'_i \mapsto (0, \ldots, m'_i, \ldots, 0)$ και τη σύνθεση $s_i := \varphi \circ \iota_i : M \to M$. Κάθε $s_i, 1 \leq i \leq n-1$, αποτελεί έναν R-ενδομορφισμό τού M, δηλαδή $\forall i, 1 \leq i \leq n-1$, έχουμε ότι $s_i \in D$. Επιπλέον, $\varphi = \sum_{i=1}^{n-1} s_i$, αφού $\forall (m'_1, m'_2, \ldots, m'_{n-1}) \in M^{(n-1)}$ ισχύει $\varphi((m'_1, m'_2, \ldots, m'_{n-1})) = \sum_{i=1}^{n-1} (\varphi \circ \iota_i)((m'_1, m'_2, \ldots, m'_{n-1})) =$

$\sum_{i=1}^{n-1} s_i(m'_i)$. Αλλά, τότε για το D-γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο $\{m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}, m_n\}$ προκύπτει ότι

$$m_n = \varphi((m_1, m_2, \ldots, m_{n-1})) = \sum_{i=1}^{n-1} s_i(m_i)$$

και η ισότητα $m_n = \sum_{i=1}^{n-1} s_i(m_i)$ μας πληροφορεί ότι το $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ είναι D-γραμμικώς εξαρτημένο[2]. Πράγμα άτοπο. Συνεπώς, ο προς απόδειξη ισχυρισμός (**A**) είναι αληθής.
Παρομοίως, συμπεραίνουμε ότι:

> (**B**): *Για κάθε* $i, 1 \leq i \leq n$, *υπάρχει ένα στοιχείο* $r_i \neq 0$ *τού* R *με* $m_i r_i \neq 0$ *και* $m_j r_i = 0$, *για κάθε* $j, 1 \leq j \leq n, j \neq i$.

Καθένα από τα στοιχεία $m_i r_i \neq 0, 1 \leq i \leq n$ είναι ένας γεννήτορας τού απλού μοδίου M. Συνεπώς, αν $(m'_1, m'_2, \ldots, m'_{n-1}, m'_n) \in M^{(n)}$, τότε υπάρχουν $r'_i \in R, 1 \leq i \leq n$ με $m'_i = (m_i r_i) r'_i$. Ας συμβολίσουμε με r το στοιχείο $\sum_{i=1}^{n} r_i r'_i$. Έχουμε:

$$(m_1, m_2, \ldots, m_n)r = (\sum_{i=1}^{n} m_1 r_i r'_i, \sum_{i=1}^{n} m_2 r_i r'_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} m_n r_i r'_i) \tag{4.1}$$

και με τη βοήθεια τού συμπεράσματος (**B**), η ισότητα (4.1) γίνεται:

$$(m_1, m_2, \ldots, m_n)r = (m_1 r_1 r'_1, m_2 r_2 r'_2, \ldots, m_n r_n r'_n) = (m'_1, m'_2, \ldots, m'_n).$$

Άρα, $M^{(n)} = (m_1, m_2, \ldots, m_n)R$. ♦

Πρόταση 4.2.21. *Έστω ότι* R *είναι ένας δεξιά πρωταρχικός δακτύλιος, όπου ο* M *είναι ένας απλός και πιστός δεξιός μόδιος τού* R *και* $D = \mathrm{End}_R(M_R)$ *είναι ο δακτύλιος ενδομορφισμών τού* M.

(i) *Εάν το* D*-βάθμημα τού* M *είναι πεπερασμένο, δηλαδή* $\mathrm{rank}({}_D M) = n \in \mathbb{N}$, *τότε* $R \cong \mathbb{M}_n(D)$.

(ii) *Εάν το* D*-βάθμημα τού* M *είναι άπειρο, τότε για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *υπάρχει ένας υποδακτύλιος* R_n *τού* R *που έχει ως επιμορφική εικόνα τον δακτύλιο* $\mathbb{M}_n(D)$.

Απόδειξη Σύμφωνα με το Θεώρημα Πυκνότητος Jacobson, βλέπε Θεώρημα 4.2.20, ο δακτύλιος R είναι ισόμορφος με έναν πυκνό υποδακτύλιο T τού δακτυλίου $\mathrm{End}_D({}_D M)^{op}$.

(i) Θα δείξουμε ότι ο T συμπίπτει με τον $\mathrm{End}_D({}_D M)^{op}$. Σύμφωνα με την υπόθεση το βάθμημα τού M ισούται με n. Έστω $\mathcal{B} = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ μια D-βάση τού M. Για κάθε $\varphi \in \mathrm{End}_D({}_D M)^{op}$, θέτουμε $m_i \varphi = m'_i$. Επειδή ο T είναι ένας πυκνός υποδακτύλιος τού $\mathrm{End}_D({}_D M)^{op}$, υπάρχει κάποιο $t \in T$ με $m_i t = m'_i, \forall i, 1 \leq i \leq n$. Αφού λοιπόν οι D-ενδομορφισμοί φ και t τού M συμπίπτουν πάνω στα στοιχεία τής βάσης $\mathcal{B}$ τού M, έπεται ότι

[2] Υπενθυμίζουμε ότι $\forall m \in M, s \in D, sm := s(m)$.

$\varphi = t$. Άρα $T = \mathrm{End}_D({}_D M)^{op}$. Συνεπώς, $R \cong \mathrm{End}_D({}_D M)^{op}$ και αφού $\mathrm{End}_D({}_D M)^{op} \cong \mathbb{M}_n(D)$, βλέπε Πόρισμα 3.7.24, έχουμε $R \cong \mathbb{M}_n(D)$.

(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένα D-γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο $\mathcal{L} = \{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n\}$ τού M, εφόσον το D-βάθμημα τού M είναι άπειρο. Έστω ότι L είναι ο D-υπομόδιος τού M που παράγεται από το $\mathcal{L}$ και ας θεωρήσουμε το ακόλουθο υποσύνολο τού T:

$$T_n = \{t \in T \mid \ell t \in L, \forall \ell \in L\}.$$

Το σύνολο T_n είναι ένας υποδακτύλιος τού T (*γιατί;*) και η απεικόνιση

$$\Phi : T_n \to \mathrm{End}_D({}_D L)^{op}, t \mapsto \Phi(t) := \varphi_t,$$

όπου $\varphi_t : L \to L, \ell \mapsto \ell t$ είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων (*γιατί;*). Επιπλέον, ο Φ είναι ένας επιρριπτικός ομομορφισμός. Πράγματι, εάν $\varphi \in \mathrm{End}_D({}_D L)^{op}$, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε, ακριβώς όπως και στην περίπτωση (i), ότι υπάρχει κάποιο στοιχείο $t \in T$ με $\varphi = \varphi_t$. Προφανώς, ο R διαθέτει έναν υποδακτύλιο R_n που είναι ισόμορφος με τον T_n, αφού $R \cong T$. Παρατηρώντας ότι $\mathrm{End}_D({}_D L)^{op} \cong \mathbb{M}_n(D)$, καταλήγουμε στο ότι ο $\mathbb{M}_n(D)$ είναι επιμορφική εικόνα τού R_n. Έτσι, αποδείχθηκε και το δεύτερο μέρος τού θεωρήματος. ♦

Παρατήρηση 4.2.22. *Έστω ότι A είναι μια R-άλγεβρα και M ένας δεξιός R-μόδιος. Από την Παρατήρηση 3.7.20, γνωρίζουμε ότι ο ομομορφισμός δακτυλίων*

$$\alpha : A \to \mathrm{Bicom}_A(M_A)^{op}, a \to \alpha(a) := \rho_a$$

είναι ένας ομομορφισμός R-αλγεβρών. Έτσι, το Θεώρημα 4.2.20 και η Πρόταση 4.2.21 ισχύουν στην περίπτωση που η άλγεβρα A είναι δεξιά πρωταρχική. Προτείνουμε στον αναγνώστη να διατυπώσει και να αποδείξει λεπτομερώς τα ανάλογα των 4.2.20 και 4.2.21 στην περίπτωση μιας δεξιά πρωταρχικής άλγεβρας.

Κεφάλαιο 5

Συνθήκες Περατότητος σε Δακτυλίους και Μοδίους

Το ερώτημα «πότε ένας πρωταρχικός δακτύλιος R διαθέτει έναν πιστό και απλό μόδιο M με πεπερασμένο βάθμημα υπεράνω τού δακτυλίου $D = \mathrm{End}_R(M_R)$ των ενδομορφισμών του;» αποτελεί το σημείο εκκίνησης τού παρόντος κεφαλαίου.
Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ο M διαθέτει μια άπειρη το πλήθος D-βάση, ας πούμε την $\mathcal{B} = \{m_1, m_2, \ldots, m_i, m_{i+1} \ldots\}$ και ας θεωρήσουμε τους D-υπομόδιους $M_\ell = \sum_{i=1}^{\ell} Dm_i$. Παρατηρούμε ότι $\forall \ell \in \mathbb{N}, M_\ell \subsetneq M_{\ell+1}$, αφού διαφορετικά η βάση $\mathcal{B}$ θα ήταν ένα D-γραμμικώς εξαρτημένο σύνολο· πράγμα άτοπο. Συνεπώς, ο M διαθέτει μια άπειρη και γνησίως αύξουσα αλυσίδα υπομοδίων

$$M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq M_\ell \subsetneq M_{\ell+1} \subsetneq \ldots.$$

Για κάθε M_ℓ, θεωρούμε το υποσύνολο $I_\ell = \{r \in R \mid mr = 0, \forall m \in M_\ell\}$ τού R. Καθένα από τα I_ℓ είναι ένα δεξιό ιδεώδες τού R (*γιατί;*) και επειδή $\forall \ell \in \mathbb{N}, M_\ell \subsetneq M_{\ell+1}$ έπεται ότι $\forall \ell, I_\ell \supseteq I_{\ell+1}$. Θα δείξουμε ότι $\forall \ell, I_\ell \supsetneq I_{\ell+1}$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε τα στοιχεία $m_1, m_2, \ldots, m_\ell, m_{\ell+1}$, τότε σύμφωνα με το Θέωρημα Πυκνότητος Jacobson, βλέπε Θεώρημα 4.2.20, υπάρχει ένα στοιχείο $r \in R$ τέτοιο, ώστε $\forall i, 1 \leq i \leq \ell, m_i r = 0$ και $m_{\ell+1} r = m_{\ell+1}$. Επομένως, $r \in I_\ell$ και $r \notin I_{\ell+1}$· άρα, $\forall \ell, I_\ell \supsetneq I_{\ell+1}$.
Ώστε, όταν ο πρωταρχικός δακτύλιος R διαθέτει έναν πιστό και απλό μόδιο M με άπειρο βάθμημα υπεράνω τού δακτυλίου των R-ενδομορφισμών του, τότε υπάρχει μια άπειρη και γνησίως φθίνουσα αλυσίδα δεξιών ιδεωδών

$$I_1 \supsetneq I_2 \supsetneq \cdots \supsetneq I_\ell \supsetneq I_{\ell+1} \supsetneq \ldots.$$

τού δακτυλίου R. Η συγκεκριμένη παρατήρηση μας οδηγεί στο να θεωρήσουμε δακτυλίους που δεν διαθέτουν γνησίως φθίνουσες ακολουθίες δεξιών ιδεωδών με άπειρο μήκος.

5.1 Δακτύλιοι Artin

Ορισμός 5.1.1. *Ένας δακτύλιος* R *ονομάζεται δεξιά δακτύλιος Artin, όταν κάθε φθίνουσα ακολουθία δεξιών ιδεωδών του σταθεροποιείται κατόπιν ενός πεπερασμένου αριθμού βημάτων.*

Με άλλα λόγια, όταν για κάθε ακολουθία

$$I_1 \supsetneq I_2 \supsetneq \cdots \supsetneq I_\ell \supsetneq I_{\ell+1} \supsetneq \ldots$$

δεξιών ιδεωδών τού R, υπάρχει κάποιος φυσικός $n \in \mathbb{N}$ με $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \ldots.$

Πρόταση 5.1.2. *Κάθε δεξιά πρωταρχικός και δεξιά Artin δακτύλιος* R *είναι ισόμορφος με έναν δακτύλιο πινάκων* $\mathbb{M}_n(D)$ *υπεράνω ενός διαιρετικού δακτυλίου* D.

Απόδειξη Σύμφωνα με όσα αναφέραμε στην εισαγωγή τού παρόντος κεφαλαίου, ο απλός και πιστός μόδιος M που διαθέτει ο R οφείλει να είναι πεπερασμένου βαθμήματος υπεράνω τού δακτυλίου $D = \mathrm{End}_R(M_R)$.Από την Πρόταση 4.2.21 παίρνουμε $R \cong \mathbb{M}_n(D)$. ♦

Πόρισμα 5.1.3. *Κάθε απλός και δεξιά Artin δακτύλιος* R *είναι ισόμορφος με έναν δακτύλιο πινάκων* $\mathbb{M}_n(D)$ *υπεράνω ενός διαιρετικού δακτυλίου* D.

Πόρισμα 5.1.4. *Έστω μια* K*-άλγεβρα* A *υπεράνω ενός σώματος* K *με πεπερασμένη* K*-διάσταση. Εάν η* A *είναι απλή άλγεβρα, τότε είναι ισόμορφη με την* K*-άλγεβρα* $\mathbb{M}_n(D)$*, όπου* D *είναι μια διαιρετική* K*-άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης υπεράνω τού* K.

Απόδειξη Η A είναι ένας δεξιά δακτύλιος Artin, αφού η K-διάστασή της είναι πεπερασμένη και επειδή είναι απλή είναι ισόμορφη με την K-άλγεβρα $\mathbb{M}_n(D)$. Υπολείπεται η απόδειξη ότι η K-διάσταση τού D είναι πεπερασμένη. Αλλά εάν $\dim_K D = \infty$, τότε και $\dim_K \mathbb{M}_n(D) = \infty$, αφού ο D αποτελεί υποάλγεβρα τής $\mathbb{M}_n(D)$ (*γιατί;*). Όμως, τότε και η K-διάσταση τής A είναι άπειρη· πράγμα άτοπο. ♦

Πρόταση 5.1.5. *Έστω ότι* A *είναι μια* K*-άλγεβρα υπεράνω ενός αλγεβρικώς κλειστού σώματος. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες: Η άλγεβρα* A *είναι απλή και πεπερασμένης διάστασης υπεράνω τού* K*, αν και μόνο αν υπάρχει κάποιος φυσικός* $n \in \mathbb{N}$ *τέτοιος, ώστε η* K*-άλγεβρα* A *να είναι ισόμορφη με την* $\mathbb{M}_n(K)$.

Απόδειξη «$\Leftarrow$» Η K-άλγεβρα $\mathbb{M}_n(K)$, όπου K είναι ένας διαιρετικός δακτύλιος είναι πάντοτε απλή· άρα και κάθε K-άλγεβρα A που είναι ισόμορφη με την $\mathbb{M}_n(K)$ είναι επίσης απλή.
«$\Rightarrow$» Από το Πόρισμα 5.1.4 γνωρίζουμε ότι η A είναι ισόμορφη με κάποια K-άλγεβρα $\mathbb{M}_n(D)$, όπου η D είναι μια διαιρετική άλγεβρα με $\dim_K(D) < \infty$ και από το Πόρισμα 3.5.10 συμπεραίνουμε ότι $D = K$, αφού το K είναι ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα. ♦

Συνεπώς, μια K-άλγεβρα A υπεράνω ενός αλγεβρικώς κλειστού σώματος που η διάστασή της *δεν είναι το τετράγωνο κάποιου ακέραιου* $z \neq 0$ *δεν είναι* ***ποτέ*** *απλή.*