ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ Ι

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$

Ασκησεις - Φυλλαδιο 2

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:
http://users.uoi.gr/abeligia/AlgebraicStructuresI/ASI2017/ASI2017.html

Παρασκευή 24 Μαρτίου 2017

Άσκηση 1. *Έστω ότι το ζεύγος $(G, \star)$ είναι ομάδα με ουδέτερο στοιχείο e και θεωρούμε στοιχεία $a, b, c \in G$. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) $a \star b \star c = e$.
(2) $b \star c \star a = e$.
(3) $c \star a \star b = e$.

Αν ικανοποιείται μια από τις παραπάνω σχέσεις, να δειχθεί με ένα αντιπαράδειγμα ότι γενικά $a \star c \star b \neq e$.

Άσκηση 2. *Έστω $(G, \star)$ μια ομάδα με ουδέτερο στοιχείο e. Αν το σύνολο G έχει άρτιο πλήθος στοιχείων, να δειχθεί ότι υπάρχει ένα στοιχείο $a \neq e$ στην G τέτοιο ώστε: $a \star a = e$.*

Υποθέτουμε ότι
$$\star \colon G \times G \longrightarrow G, \quad (a, b) \longmapsto a \star b$$
είναι μια προσεταιριστική πράξη ορισμένη επί του μη-κενού συνόλου G.

Ένα στοιχείο $e \in G$ καλείται **αριστερό ουδέτερο στοιχείο** για την πράξη «$\star$» αν: $e \star a = a$, $\forall a \in G$. Το στοιχείο $e \in G$ καλείται **δεξιό ουδέτερο στοιχείο** για την πράξη «$\star$» αν: $a \star e = a$, $\forall a \in G$.

Άσκηση 3. *Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ των μη-μηδενικών πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε μια διμελή πράξη $\star : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ επί του $\mathbb{R}^*$, ως εξής:*
$$a \star b := |a| b$$

(1) *Να δειχθεί ότι η πράξη «$\star$» προσεταιριστική.*
(2) *Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα αριστερό ουδέτερο στοιχείο και ένα δεξιό αντίστροφο στοιχείο για την πράξη «$\star$».*
(3) *Είναι το ζεύγος $(\mathbb{R}^*, \star)$ ομάδα;*
(4) *Ποιά είναι η σημασία της άσκησης;*

Άσκηση 4. *Έστω ότι το ζεύγος $(G, \star)$ είναι ομάδα με ταυτοτικό στοιχείο e. Αν ισχύει*
$$x \star x = e, \ \forall x \in G$$
να δειχθεί ότι η ομάδα $(G, \star)$ είναι αβελιανή. Να δοθεί παράδειγμα αβελιανής ομάδας $(G, \star)$ η οποία περιέχει στοιχείο x έτσι ώστε $x \star x \neq e$.

Άσκηση 5. *Να δειχθεί ότι το ανοιχτό διάστημα $(-1, 1) := \big\{x \in \mathbb{R} \,|\, -1 < x < 1\big\}$ της πραγματικής ευθείας αποτελεί αβελιανή ομάδα με πράξη:*
$$x \star y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

Άσκηση 6. *Έστω ότι το ζεύγος $(G,\star)$ είναι ομάδα με ουδέτερο στοιχείο e. Αν το σύνολο G έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, να δειχθεί ότι για κάθε $a \in G$, υπάρχει ακέραιος $n \in \mathbb{N}$, ο οποίος γενικά εξαρτάται από το a, έτσι ώστε: $a^n := a \star a \star \cdots \star a = e$ (το a εμφανίζεται σαν παράγοντας n φορές). Επιπλέον να δειχθεί ότι:*

$$\exists\, N \in \mathbb{N}: \quad a^N = e, \quad \forall a \in G$$

Άσκηση 7. *Έστω ότι το ζεύγος $(G,\star)$ είναι ομάδα και $a,b \in G$. Να δειχθεί ότι:*

$$(a\star b)^{-1} = a^{-1}\star b^{-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a\star b = b\star a$$

Να συμπεράνετε ότι η ομάδα $(G,\star)$ είναι αβελιανή αν και μόνον αν $\forall a,b \in G$: $\quad (a\star b)^{-1} = a^{-1}\star b^{-1}$.

Έστω M ένα σύνολο και $\star\colon M\times M \longrightarrow M$, $\quad (a,b) \longmapsto a\star b$, μια διμελής πράξη ορισμένη επί του M. Υπενθυμίζουμε ότι το ζεύγος $(M,\star)$ καλείται **μονοειδές**, αν:

(1) Η πράξη «$\star$» είναι προσεταιριστική.
(2) Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο $e \in G$ για την πράξη «$\star$».

Το μονοειδές $(M,\star)$ καλείται **μεταθετικό μονοειδές** αν η πράξη «$\star$» είναι μεταθετική.

Άσκηση 8. *Έστω ότι το ζεύγος $(M,\star)$ είναι ένα μονοειδές με ουδέτερο στοιχείο e.*

(1) *Να δειχθεί ότι το ζεύγος $(\mathsf{U}(M),\star)$, όπου*

$$\mathsf{U}(M) = \big\{x \in M \mid \exists\, x' \in M:\ x\star x' = e = x'\star x\big\}$$

είναι το σύνολο των αντιστρεψίμων στοιχείων του μονοειδούς $(M,\star)$, είναι ομάδα.
Επιπλέον να δειχθεί ότι αν το μονοειδές $(M,\star)$ είναι μεταθετικό, τότε η ομάδα $(\mathsf{U}(M),\star)$ είναι αβελιανή.

(2) *Να βρεθούν οι ομάδες $(\mathsf{U}(\mathbb{N}),\cdot)$, $(\mathsf{U}(\mathbb{Z}),\cdot)$ και $(\mathsf{U}(\mathbb{Z}_n),\cdot)$ των μονοειδών $(\mathbb{N},\cdot)$, $(\mathbb{Z},\cdot)$, και $(\mathbb{Z}_n,\cdot)$, όπου «$\cdot$» είναι ο συνήθης πολλαπλασιασμός.*

(3) *Να δειχθεί ότι το ζεύγος $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\star)$, όπου*

$$(x_1,x_2)\star(y_1,y_2) = (x_1y_1, x_2y_2)$$

ένα ένα μεταθετικό μονοειδές και να προσδιορισθεί η αβελιανή ομάδα $(\mathsf{U}(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}),\star)$.

Άσκηση 9. *Βρείτε όλους τους πιθανούς πίνακες Cayley ομάδων με πλήθος στοιχείων ίσο με 4.*

Άσκηση 10. *Να δειχθεί με ένα παράδειγμα, ότι είναι δυνατόν η εξίσωση $x\star x = e$ να έχει περισσότερες από δύο λύσεις, σε μια ομάδα $(G,\star)$ με ταυτοτικό στοιχείο e.*

Άσκηση 11. *Θεωρούμε τους ακόλουθους αντιστρέψιμους πίνακες πραγματικών αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{GL}_4(\mathbb{R}) \quad \textit{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{GL}_4(\mathbb{R})$$

και έστω

$$G = \big\{A^n \in \mathsf{GL}_4(\mathbb{R}) \mid n \in \mathbb{Z}\big\} \qquad \textit{και} \qquad G' = \big\{B^n \in \mathsf{GL}_4(\mathbb{R}) \mid n \in \mathbb{Z}\big\}$$

Να δειχθεί ότι τα ζεύγη $(G,\cdot)$ και $(G',\cdot)$, όπου «$\cdot$» είναι ο συνήθης πολλαπλασιασμός πινάκων, είναι αβελιανές ομάδες. Πόσα στοιχεία έχουν οι ομάδες G και G';

Άσκηση 12. *Μελετήστε τη δομή της ομάδας* $(\mathbb{Z}_6, +)$, *και συμπληρώστε τον πίνακα Cayley*

$+$	$[\mathbf{0}]_\mathbf{6}$	$[\mathbf{1}]_\mathbf{6}$	$[\mathbf{2}]_\mathbf{6}$	$[\mathbf{3}]_\mathbf{6}$	$[\mathbf{4}]_\mathbf{6}$	$[\mathbf{5}]_\mathbf{6}$
$[\mathbf{0}]_\mathbf{6}$						
$[\mathbf{1}]_\mathbf{6}$						
$[\mathbf{2}]_\mathbf{6}$						
$[\mathbf{3}]_\mathbf{6}$						
$[\mathbf{4}]_\mathbf{6}$						
$[\mathbf{5}]_\mathbf{6}$						

Άσκηση 13. *Θεωρούμε το σύνολο απεικονίσεων*

$$G = \Big\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3 : \ \mathbb{Q} \setminus \{0,1\} \ \longrightarrow \ \mathbb{Q} \setminus \{0,1\}\Big\}$$

όπου:

$$\alpha_0(x) = x, \qquad \alpha_1(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad \alpha_2(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$\beta_1(x) = \frac{1}{x}, \qquad \beta_2(x) = 1 - x, \qquad \beta_3(x) = \frac{x}{x-1}$$

Να δειχθεί ότι το ζεύγος $(G, \circ)$, *όπου «*$\circ$*» είναι πράξη της σύνθεσης απεικονίσεων, αποτελεί μια μη-αβελιανή ομάδα. Να συμπληρωθεί ο αντίστοιχος πίνακας Cayley της ομάδας* $(G, \star)$.

Άσκηση 14. *Έστω ότι «*$\star$*» είναι μια προσεταιριστική πράξη επί του μη-κενού συνόλου* G. *Υποθέτουμε ότι:*

(1) *Υπάρχει ένα στοιχείο*[1] $e \in G$: $\ e \star x = x, \ \forall x \in G$.

(2) *Για κάθε* $x \in G$, *υπάρχει ένα στοιχείο*[2] $x' \in G$: $\ x' \star x = e$.

Να δειχθεί ότι το ζεύγος $(G, \star)$ *είναι ομάδα.*

Άσκηση 15. *Γνωρίζουμε ότι αν* $(G, \star)$ *είναι μια ομάδα, τότε οι εξισώσεις*

$$a \star x = b \qquad \text{και} \qquad x \star a = b$$

έχουν (μοναδική) λύση για κάθε $a, b \in G$.

Αντίστροφα: να δειχθεί ότι αν «$\star$*» είναι μια προσεταιριστική πράξη επί του μη-κενού συνόλου* G *και οι παραπάνω εξισώσεις έχουν λύση για κάθε* $a, b \in G$, *τότε υπάρχει ουδέτερο στοιχείο* $e \in G$ *για την πράξη «*$\star$*» και το ζεύγος* $(G, \star)$ *είναι μια ομάδα.*

Άσκηση 16. **1.** *Στο σύνολο* $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ *ορίζουμε μια πράξη «*$\star$*» ως εξής:*

$$\star : \ G \times G \ \longrightarrow \ G, \qquad (a,b) \star (c,d) = (ac, ad + b)$$

Να δειχθεί ότι το ζεύγος $(G, \star)$ *είναι ομάδα.*

2. *Να δειχθεί ότι το σύνολο*

$$G' = \big\{f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \ a \neq 0\big\}$$

εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης απεικονίσεων είναι ομάδα.

3. *Παρατηρείτε κάποια σχέση μεταξύ των ομάδων,* G *και* G';

---

[1] Ένα στοιχείο $e \in G$ έτσι ώστε $\ e \star x = x, \ \forall x \in G$, καλείται **αριστερό ουδέτερο στοιχείο** για την πράξη «$\star$».

[2] Αν για την προσεταιριστική πράξη «$\star$» επί του συνόλου G υπάρχει αριστερό ουδέτερο στοιχείο e, τότε ένα στοιχείο $x' \in G$ έτσι ώστε $x' \star x = e$, καλείται **αριστερό αντίστροφο στοιχείο** του x για την πράξη «$\star$».

Άσκηση 17. *Έστω $(M,\star_1)$ και $(M_2,\star_2)$ δύο μονοειδή. Να δειχθεί ότι ορίζοντας:*

$$(m_1,m_2)\star(n_1,n_2)=(m_1\star_1 n_1, m_2\star_2 n_2)$$

το ζεύγος $(M_1\times M_2,\star)$ είναι ένα μονοειδές, το οποίο καλείται **μονοειδές ευθύ γινόμενο** *των $(M,\star_1)$ και $(M,\star_2)$. Επιπλέον να δειχθούν τα εξής:*

(1) *Το μονοειδές $(M_1\times M_2,\star)$ είναι μεταθετικό αν και μόνον αν τα μονοειδή $(M_1,\star_1)$ και $(M_2,\star_2)$ είναι μεταθετικά.*
(2) *Για τις αντίστοιχες ομάδες των αντιστρέψιμων στοιχείων έχουμε:*
$$\mathsf{U}(M_1\times M_2,\star)=\mathsf{U}(M_1,\star_1)\times\mathsf{U}(M_2,\star_2)$$
(3) *Το μονοειδές $(M_1\times M_2,\star)$ είναι ομάδα αν και μόνον αν τα μονοειδή $(M_1,\star_1)$ και $(M_2,\star_2)$ είναι ομάδες.*

Άσκηση 18. *Έστω $(M,\star)$ ένα μεταθετικό μονοειδές με ουδέτερο στοιχείο e. Στο μονοειδές ευθύ γινόμενο $(M\times M,\star)$ ορίζουμε την ακόλουθη σχέση $\mathcal{R}$:*

$$(m_1,n_1)\sim_{\mathcal{R}}(m_2,n_2)\quad\Longleftrightarrow\quad\exists\, x\in M:\quad m_1\star n_2\star x=n_1\star m_2\star x$$

(1) *Να δειχθεί ότι η σχέση $\mathcal{R}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του $M\times M$.*
(2) *Αν $G(M)=(M\times M)/\mathcal{R}$ είναι το επαγόμενο σύνολο πηλίκο του $M\times M$ ως προς τη σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$, να δειχθεί ότι ορίζοντας*
$$[(m_1,n_1)]_{\mathcal{R}}*[(m_2,n_2)]_{\mathcal{R}}=[(m_1\star m_2,n_1\star n_2)]_{\mathcal{R}}$$
αποκτούμε μια αβελιανή ομάδα $(G(M),*)$, με ουδέτερο στοιχείο $[(e,e)]_{\mathcal{R}}$ η οποία καλείται η **ομάδα Grothendieck** *του μεταθετικού μονοειδούς $(M,\star)$.*

Μια απεικόνιση $f\colon(M_1,\star_1)\longrightarrow(M_2,\star_2)$ μεταξύ μονοειδών $(M_1,\star_1)$ και $(M_2,\star_2)$ με ουδέτερα στοιχεία e_1 και e_2 αντίστοιχα, καλείται **ομομορφισμός μονοειδών**, αν, $\forall x,y\in M_1$:

$$f(e_1)=e_2\qquad\text{και}\qquad f(x\star_1 y)=f(x)\star_2 f(y)$$

Ένας ομομορφισμός μονοειδών ο οποίος είναι απεικόνιση «1-1», αντίστοιχα «επί», αντίστοιχα «1-1» και «επί», καλείται **μονομορφισμός**, αντίστοιχα **επιμορφισμός**, αντίστοιχα **ισομορφισμός μονοειδών**.

Παρόμοια μια απεικόνιση $f\colon(G_1,\star_1)\longrightarrow(G_2,\star_2)$ μεταξύ ομάδων $(G_1,\star_1)$ και $(G_2,\star_2)$, καλείται **ομομορφισμός ομάδων**, αν, $\forall x,y\in G_1$:

$$f(x\star_1 y)=f(x)\star_2 f(y)$$

Ένας ομομορφισμός ομάδων ο οποίος είναι απεικόνιση «1-1», αντίστοιχα «επί», αντίστοιχα «1-1» και «επί», καλείται **μονομορφισμός**, αντίστοιχα **επιμορφισμός**, αντίστοιχα **ισομορφισμός ομάδων**.

Αν υπάρχει ένας ισομορφισμός $f\colon(G_1,\star_1)\longrightarrow(G_2,\star_2)$ μεταξύ μονοειδών ή ομάδων $(G_1,\star_1)$ και $(G_2,\star_2)$, τότε θα λέμε ότι τα μονοειδή ή ομάδες $(G_1,\star_1)$ και $(G_2,\star_2)$ είναι ισόμορφα και θα γράφουμε

$$(G_1,\star_1)\ \cong\ (G_2,\star_2)$$

Άσκηση 19. *Έστω $f\colon:(G_1,\star_1)\longrightarrow(G_2,\star_2)$ μεταξύ μονοειδών με ουδέτερα στοιχεία e_1 και e_2, για την οποία ισχύει ότι $f(x\star_1 y)=f(x)\star_2 f(y)$, $\forall x,y\in G_1$.*

(1) *Να δειχθεί, με ένα αντιπαράδειγμα, ότι γενικά η απεικόνιση f δεν είναι ομομορφισμός μονοειδών.*
(2) *Αν η απεικόνιση f είναι «επί», να δειχθεί ότι η απεικόνιση f είναι ομομορφισμός μονοειδών.*
(3) *Αν το μονοειδές $(G,\star_2)$ είναι ομάδα, να δειχθεί ότι η απεικόνιση f είναι ομομορφισμός μονοειδών.*

Άσκηση 20. *Θεωρούμε ένα μεταθετικό μονοειδές $(M,\star)$ και έστω $(G(M),*)$ η ομάδα Grothendieck του $(M,\star)$, βλέπε την Άσκηση 18. Να δειχθούν τα εξής:*

(1) *Η απεικόνιση*
$$\iota\colon M \longrightarrow G(M), \quad \iota(m) = [(m,e)]_{\mathcal{R}}$$
είναι ομομορφισμός μονοειδών, ο οποίος είναι μονομορφισμός μονοειδών αν και μόνον αν, $\forall m, n, x \in M$*:*
$$m \star x = n \star x \quad \Longrightarrow \quad m = n$$

(2) *Αν* $(G, \star')$ *είναι μια αβελιανή ομάδα με ουδέτερο στοιχείο* ϵ *και* $f\colon M \longrightarrow G$ *είναι ένας ομομορφισμός μονοειδών, να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός ομάδων* $f^*\colon G(M) \longrightarrow G$ *έτσι ώστε* $f^* \circ \iota = f$*:*

Άσκηση 21. *Θεωρούμε τα μεταθετικά μονοειδή* $(\mathbb{N}_0, +)$ *και* $(\mathbb{N}_0, \cdot)$*, και* $(\mathbb{N}, \cdot)$*. Να δειχθεί ότι:*
$$G(\mathbb{N}_0, +) \cong (\mathbb{Z}, +) \quad \textit{και} \quad G(\mathbb{N}_0, \cdot) = \big\{[(1,1)]_{\mathcal{R}}\big\}$$

Άσκηση 22. *(Θεώρημα Cayley για Μονοειδή). Έστω* $(M, \star)$ *ένα μονοειδές με ουδέτερο στοιχείο* e*. Θεωρούμε το μονοειδές* $(\mathsf{Map}(M), \circ)$*, όπου*
$$\mathsf{Map}(M) = \big\{f\colon M \longrightarrow M \mid f: \ \textit{απεικόνιση}\big\}$$
και «∘» είναι η σύνθεση απεικονίσεων. Να δειχθεί ότι η απεικόνιση
$$\mathsf{R}: \ (M, \star) \ \longrightarrow (\mathsf{Map}(M), \circ), \quad m \longmapsto \mathsf{R}(m) := \mathsf{R}_m\colon M \longrightarrow M, \quad \mathsf{R}_m(x) = m \star x$$
είναι ένας μονομορφισμός μονοειδών.