Περιεχόμενα

1 Εισαγωγη: Πραξεις επι Συνολων και Σωματα Αριθμων **3**
1.1 Ο Χώρος των Ελευθέρων Διανυσμάτων 3
1.2 Εσωτερικές και Εξωτερικές Πράξεις 8
1.3 Η έννοια του σώματος 9

2 Διανυσματικοι Χωροι **13**
2.1 Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες . . . 13
2.2 Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων 20
2.2.1 Διανυσματικοί Χώροι Συναρτήσεων 24
2.2.2 Ο Χώρος των Ακολουθιών 27
2.3 Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων 28
2.3.1 Ο Χώρος των Πινάκων 28
2.3.2 Ο Χώρος των Πολυωνύμων 32
2.4 Ασκήσεις 36

3 Διανυσματικοι Υποχωροι και Κατασκευες **39**
3.1 Διανυσματικοί Υπόχωροι 39
3.2 Γραμμικοί Συνδυασμοί 45
3.3 Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων 53
3.3.1 Τομή Υπόχωρων 53
3.3.2 Άθροισμα και Ευθύ Άθροισμα Υπόχωρων 54
3.4 Ασκήσεις 62

4 Γραμμικη Ανεξαρτησια, Βασεις και Διασταση **67**
4.1 Γραμμική Ανεξαρτησία 67
4.2 Η Έννοια της Βάσης 75
4.3 Η Έννοια της Διάστασης 80
4.4 Διάσταση Υπόχωρων 89
4.5 Βαθμίδα Διανυσμάτων 95
4.6 Ασκήσεις 99

5 Γραμμικές Απεικονίσεις **105**
5.1 Ορισμός - Βασικές Ιδιότητες - Παραδείγματα 105
5.2 Πυρήνας και Εικόνα Γραμμικής Απεικόνισης 111
5.3 Το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης 116
5.4 Η Θεμελιώδης Εξίσωση Διαστάσεων 119
5.5 Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων 125
5.6 Βαθμίδα Γραμμικής Απεικόνισης 132
5.7 Ασκήσεις 136

6 Δυϊκοί Χώροι και Χώροι Πηλίκα **141**
6.1 Δυϊκοί Χώροι 141
6.1.1 Μηδενιστές 144
6.1.2 Η Δυϊκή μιας Γραμμικής Απεικόνισης 146
6.2 Χώροι Πηλίκα 148
6.3 Ασκήσεις 158

7 Πίνακες και Γραμμικές Απεικονίσεις **161**
7.1 Βασικές Ιδιότητες Πινάκων 161
7.2 Ο Πίνακας μιας Γραμμικής Απεικόνισης 170
7.3 Αλλαγή Βάσης και Συνιστωσών 175
7.4 Ισοδύναμοι και Όμοιοι Πίνακες 178

8 Βαθμίδα Πίνακα **185**
8.1 Ορισμός και Βασικές Ιδιότητες 185
8.2 Βαθμίδα Γραμμικής Απεικόνισης και Πίνακα 187
8.3 Μέθοδοι Εύρεσης Βαθμίδας 192

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγη : Πραξεις επι Συνολων και Σωματα Αριθμων

1.1 Ο Χώρος των Ελευθέρων Διανυσμάτων

Από την Αναλυτική Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι αν $\mathcal{V}_3$ είναι το σύνολο των ελευθέρων διανυσμάτων του χώρου τριών διαστάσεων που μας περιβάλλει, τότε μπορούμε με φυσικό τρόπο να προσθέσουμε δύο ελεύθερα διανύσματα καθώς και να "πολλαπλασιάσουμε" ένα ελεύθερο διάνυσμα με έναν πραγματικό αριθμό.

Έστω $\mathcal{E}$ ο συνήθης χώρος τριών διαστάσεων που μας περιβάλλει, και θεωρούμε στον $\mathcal{E}$ το σύνολο $\mathcal{D}$ όλων των προσανατολισμένων ευθυγράμμων τμημάτων. Υπενθυμίζουμε ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι προσανατολισμένο αν έχουμε καθορίσει μια διάταξη για τα άκρα του, δηλαδή έχουμε καθορίσει την αρχή και το τέλος του. Ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα θα συμβολίζεται με $\overline{AB}$ και με αυτό το συμβολισμό το A συμφωνούμε να είναι η αρχή και B το τέλος του. Έτσι το $\vec{AB}$ είναι διαφορετικό από το $\overline{BA}$, η αρχή του οποίου είναι το σημείο B και τέλος το σημείο A.

Κάθε προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα $\overline{AB}$ του συνόλου $\mathcal{D}$, βρίσκεται πάνω σε μια μοναδική ευθεία (ϵ), στην οποία έχει καθορισθεί μια *φορά* κίνησης ή *προσανατολισμός*: από το σημείο A στο σημείο B. Θα λέμε ότι δύο προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα $\overline{AB}$ και $\overline{CD}$ έχουν την ίδια *διεύθυνση* αν-ν κείνται σε παράλληλες ευθείες. Τέλος το *μήκος* του προσανατολισμένου ευθύγραμμου τμήματος $\overline{AB}$ ορίζεται να είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει το σημείο A με το σημείο B. Στο σύνολο $\mathcal{D}$ των προσανατολισμένων ευθυγράμμων τμημάτων ορίζουμε μια σχέση $\mathcal{R}$, δηλαδή ένα υποσύνολο $\sim \subseteq \mathcal{D}\times\mathcal{D}$ του καρτεσιανού γινομένου $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$, ως εξής (ως συνήθως γράφουμε $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ για να υποδηλώσουμε ότι το ζεύγος $(\overline{AB}, \overline{CD})$ ανήκει στο υποσύνολο $\sim$):

Αν $\overline{AB}, \overline{CD} \in \mathcal{D}$ είναι δύο προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα, τότε:

$$\overline{AB} \sim \overline{CD}$$

αν και μόνον αν:

1. Τα $\overline{AB}, \overline{CD}$ έχουν την ίδια διεύθυνση (κείνται σε παράλληλες ευθείες).
2. Τα $\overline{AB}, \overline{CD}$ έχουν την ίδια φορά.
3. Τα $\overline{AB}, \overline{CD}$ έχουν το ίδιο μήκος.

Ως γνωστόν η παραπάνω σχέση έχει κάποιες σημαντικές ιδιότητες. Συγκεκριμένα για τυχόντα στοιχεία $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EZ} \in \mathcal{D}$, ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. Ανακλαστική Ιδιότητα: $\overline{AB} \sim \overline{AB}$.
2. Συμμετρική Ιδιότητα: $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ αν και μόνον αν $\overline{CD} \sim \overline{AB}$
3. Μεταβατική Ιδιότητα: Αν $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ και $\overline{CD}\,\mathcal{R}\,\overline{EZ}$, τότε $\overline{AB} \sim \overline{EZ}$.

Μια σχέση επί ενός συνόλου $\mathcal{D}$ η οποία ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες καλείται *σχέση ισοδυναμίας* επί του συνόλου $\mathcal{D}$. Η σχέση $\sim$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathcal{D}$ των προσανατολισμένων ευθυγράμμων τμημάτων, και επομένως το διαμερίζει σε κλάσεις ισοδυναμίας. Υπενθυμίζουμε ότι μια διαμέριση ενός συνόλου $\mathcal{D}$ είναι μια συλλογή υποσυνόλων Φ του $\mathcal{D}$ η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

- $\emptyset \in \Phi$.
- $\cup_{A\in\Phi} A = \mathcal{D}$.
- Αν $A, B \in \Phi$ και $A \neq B$, τότε: $A \cap B = \emptyset$.

Η σχέση ισοδυναμίας ορίζει την ακόλουθη διαμέριση επί του συνόλου $\mathcal{D}$:

$$\Phi := \{C_{\overline{AB}} \,|\, \overline{AB} \in \mathcal{D}\}, \quad C_{\overline{AB}} := \{\overline{CD} \in \mathcal{D} \,|\, \overline{CD} \sim \overline{AB}\}$$

Έτσι το σύνολο $C_{\overline{AB}}$ αποτελείται από όλα τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι «ισοδύναμα», μέσω της σχέσης $\sim$, με το ευθύγραμμο τμήμα $\overline{AB}$. Το σύνολο $C_{\overline{AB}}$ καλείται η κλάση ισοδυναμίας του ευθυγράμμου τμήματος $\overline{AB}$, και η συλλογή συνόλων - διαμέριση Φ του $\mathcal{D}$, καλείται το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των ευθυγράμμων τμημάτων του χώρου. , Συνήθως τα στοιχεία του συνόλου $C_{\overline{AB}}$ καλούνται *αντιπρόσωποι* της κλάσης ισοδυναμίας του ευθυγράμμου τμήματος $\overline{AB}$.

Μια κλάση ισοδυναμίας καλείται **(ελεύθερο) διάνυσμα**. Η κλάση του προσανατολισμένου ευθυγράμμου τμήματος $\overline{AB}$ θα συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$, δηλαδή:

$$\overrightarrow{AB} \;=\; \{\overline{CD} \in \mathcal{D} \;\mid\; \overline{CD} \sim \overline{AB}\}$$

Το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας συμβολίζεται με

$$\mathcal{V}_3 := \mathcal{D}/\sim \;=\; \{\overrightarrow{AB} \;\mid\; \overline{AB} \in \mathcal{D}\}$$

και καλείται ο *χώρος των (ελευθέρων) διανυσμάτων.* Όπως είναι άμεσο από τον ορισμό, τα στοιχεία: διεύθυνση, φορά, μήκος, τέλος, αρχή, επεκτείνονται από τα ευθύγραμμα τμήματα και στα διανύσματα, αν ορίσουμε διεύθυνση, φορά, μήκος, τέλος, αρχή του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ την διεύθυνση, φορά, μήκος, τέλος, αρχή του ευθυγράμμου τμήματος $\overline{AB}$. Ιδιαίτερα το μήκος του $\overrightarrow{AB}$ ορίζεται να είναι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $\overline{AB}$, και συμβολίζεται ως: $|\overrightarrow{AB}|$.

Όπως γνωρίζουμε από την στοιχειώδη Αναλυτική Γεωμετρία, το σύνολο $\mathcal{V}_3$ έχει επιπρόσθετη δομή. Συγκεκριμένα μπορούμε να προσθέσουμε δύο διανύσματα και να πολλαπλασιάσουμε ένα διάνυσμα με έναν πραγματικό αριθμό.

Έτσι αν μας δοθούν δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \in \mathcal{V}_3$, τότε ορίζεται μοναδικά ένα νέο διάνυσμα $\overrightarrow{EZ} := \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, το οποίο καλείται το *άθροισμα* των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{CD}$, με τον ακόλουθο τρόπο. Αν (ε) είναι η ευθεία στην οποία κείται το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και (ε') είναι η ευθεία στην οποία κείται το διάνυσμα $\overrightarrow{CD}$, τότε μεταφέρουμε παράλληλα την ευθεία (ε') έτσι ώστε αυτή να συναντήσει την ευθεία (ε) με τέτοιον τρόπο ώστε η αρχή του διανύσματος $\overrightarrow{CD}$ να συμπέσει με την τέλος του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$. Η παράλληλη μεταφορά του ευθυγράμμου τμήματος $\overline{CD}$ δημιουργεί τότε ένα νέο διάνυσμα, η αρχή του οποίου είναι το σημείο $B := E$ και το τέλος του οποίου έστω ότι είναι το σημείο Z. Τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{EZ}$, δηλαδή το άθροισμα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{CD}$ ορίζεται να είναι το διάνυσμα (ή καλύτερα ο κλάση του ευθυγράμμου τμήματος) το οποίο έχει αρχή το A και τέλος το τέλος του ευθυγράμμου τμήματος $\overline{EZ}$. Μπορεί να δειχθεί εύκολα ότι η παραπάνω κατασκευή του αθροίσματος των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{CD}$ είναι καλά ορισμένη, δηλαδή δεν εξαρτάται από την επιλογή αντιπροσώπων των κλάσεων ισοδυναμίας των ευθυγράμμων τμημάτων $\overline{AB}$ και $\overline{CD}$.

Επίσης αν $k \in \mathbb{R}$ είναι ένας πραγματικός αριθμός, και $\overrightarrow{AB} \in \mathcal{V}_3$ είναι ένα διάνυσμα, τότε ορίζεται μοναδικά ένα νέο διάνυσμα $k \cdot \overrightarrow{AB}$, το οποίο καλείται ο *βαθμωτός πολλαπλασιασμός* του k με το $\overrightarrow{AB}$, ως εξής. Αν $k = 0$, ή αν $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε θέτουμε $k \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Αν $k \neq 0$ και $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, τότε η διεύθυνση του $k \cdot \overrightarrow{AB}$ είναι η διεύθυνση του $\overrightarrow{AB}$. Η φορά του $k \cdot \overrightarrow{AB}$ είναι η φορά του $\overrightarrow{AB}$ αν $k > 0$ και την φορά του αντιθέτου διανύσματος $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ αν $k < 0$. Τέλος το μήκος του $k \cdot \overrightarrow{AB}$ ορίζεται να είναι ο αριθμός: $|k||\overrightarrow{AB}|$

Έτσι στο σύνολο $\mathcal{V}_3$ έχουμε ορίσει δύο απεικονίσεις:

1. Πρόσθεση:

$$+ \,:\, \mathcal{V}_3 \times \mathcal{V}_3 \longrightarrow \mathcal{V}_3, \;\; (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \longmapsto \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$$

2. Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός:

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{V}_3 \longrightarrow \mathcal{V}_3, \;\; (k, \overrightarrow{AB}) \mapsto k \cdot \overrightarrow{AB}$$

Από την Ευκλείδεια η την στοιχειώδη Αναλυτική Γεωμετρία, γνωρίζουμε τότε ότι το σύνολο $\mathcal{V}_3$ των ελευθέρων διανυσμάτων του χώρου, εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού, ικανοποιεί τις ακόλουθες βασικές ιδιότητες:

(ΔΧ1) Προσεταιριστική Ιδιότητα της Πρόσθεσης. Δηλαδή:

$$\boxed{\forall \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EZ} \in \mathcal{V}_3 : \;\; (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EZ})}$$

(ΔΧ2) Αντιμεταθετική Ιδιότητα Πρόσθεσης. Δηλαδή:

$$\boxed{\forall \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \in \mathcal{V}_3 : \;\; \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}}$$

(ΔΧ3) Ύπαρξη Μηδενικού Διανύσματος. Δηλαδή υπάρχει ένα διακεκριμένο στοιχείο $\vec{0}$ του $\mathcal{V}_3$, το οποίο καλείται **μηδενικό διάνυσμα**, έτσι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα:

$$\boxed{\forall \overrightarrow{AB} \in \mathcal{V}_3 : \;\; \overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} = \vec{0} + \overrightarrow{AB}}$$

Το διάνυσμα $\vec{0}$ με την παραπάνω ιδιότητα είναι η κλάση ισοδυναμίας του ευθυγράμμου τμήματος του οποίου τα άκρα συμπίπτουν, δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα το μήκος του οποίιου είναι ίσο με μηδέν.

(ΔΧ4) Ύπαρξη Αντιθέτου Διανύσματος. Δηλαδή για κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ του $\mathcal{V}_3$ υπάρχει ένα νέο διάνυσμα $-\overrightarrow{AB}$ του $\mathcal{V}_3$, το οποίο καλείται **αντίθετο διάνυσμα** του $\overrightarrow{AB}$, έτσι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα:

$$\boxed{\forall \overrightarrow{AB} \in \mathcal{V}_3,\ \exists(-\overrightarrow{AB}\,) \in \mathcal{V}_3 :\quad \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AB}\,) = \vec{0} = (-\overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB}\,)}$$

Το αντίθετο διάνυσμα του $\overrightarrow{AB}$ είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$, το οποίο έχει την ίδια διεύθυνση και το ίδιο μήκος με το $\overrightarrow{AB}$, αλλά έχει αντίθετη φορά.

(ΔΧ5) Επιμεριστική Ιδιότητα του Βαθμωτού Πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση στοιχείων του $\mathbb{R}$. Δηλαδή:

$$\boxed{\forall \overrightarrow{AB} \in \mathcal{V}_3,\ \forall \kappa, \lambda \in \mathbb{R} :\ \ (\kappa+\lambda)\cdot \overrightarrow{AB} = \kappa \cdot \overrightarrow{AB} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB}}$$

(ΔΧ6) Επιμεριστική Ιδιότητα του Βαθμωτού Πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων του $\mathcal{V}_3$. Δηλαδή:

$$\boxed{\forall \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \in \mathcal{V}_3,\ \forall \kappa \in \mathbb{R} :\ \ \kappa \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\,) = \kappa \cdot \overrightarrow{AB} + \kappa \cdot \overrightarrow{CD}}$$

(ΔΧ7) Μικτή Προσεταιριστική Ιδιότητα. Δηλαδή:

$$\boxed{\forall \overrightarrow{AB} \in \mathcal{V}_3,\ \forall \kappa, \lambda \in \mathbb{R} :\ \ \kappa \cdot (\lambda \cdot \overrightarrow{AB}\,) = (\kappa\lambda) \cdot \overrightarrow{AB}}$$

(ΔΧ8) Μοναδιαία Ιδιότητα. Δηλαδή:

$$\boxed{\forall \overrightarrow{AB} \in \mathcal{V}_3 :\ \ 1 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}}$$

Σκοπός μας είναι να γενικεύσουμε τα βασικά δομικά στοιχεία και τις βασικές ιδιότητες οι οποίες υπάρχουν στο παράδειγμα των ελευθέρων διανυσμάτων του επιπέδου, και οποίες περιγράφονται παραπάνω σε δύο κύριες κατευθύνσεις:

1. Το σύνολο των ελευθέρων διανυσμάτων να αντικατασταθεί με ένα πιο γενικό σύνολο, π.χ. με σύνολα πινάκων, πολυωνύμων, συναρτήσεων, ακολουθιών, κτλ. Φυσικά απαιτούμε τα σύνολα αυτά των "γενικευμένων διανυσμάτων" να ικανοποιούν τις τυπικές ιδιότητες που ικανοποιεί το σύνολο των ελευθέρων διανυσμάτων όπως περιγράψαμε παραπάνω.

   Η γενίκευση αυτή μας απελευθερώνει κατά κάποιον τρόπο και από τον περιορισμό των τριών διαστάσεων.

2. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών με το οποίο πολλαπλασιάζουμε βαθμωτά να αντικατασταθεί με ένα πιο γενικό σύνολο, π.χ. με το σύνολο των ρητών ή των μιγαδικων αριθμών. Παρόμοια απαιτούμε τα σύνολα αυτά των "γενικευμένων αριθμών" να ικανοποιούν τις τυπικές ιδιότητες που ικανοποιεί το σύνολο των πραγματικών αριθμών όπως περιγράψαμε παραπάνω.

Η βασική ιδέα είναι να ξεκινήσουμε με ένα σύνολο αφηρημένων στοιχείων $\mathcal{V}$ επί του οποίου υποθέτουμε ότι έχουν ορισθεί δύο πράξεις, με την έννοια του επόμενου εδαφίου: μια πράξη πρόσθεσης και μια πράξη βαθμωτού πολλαπλασιασμού «γενικευμένων» αριθμών με στοιχεία του $\mathcal{V}$, και να δεχθούμε ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες (**ΔΧ1**)-(**ΔΧ8**) παραπάνω, τις οποίες πλέον δεχόμαστε ως αξιώματα. Έτσι το παράδειγμα του χώρου των (ελευθέρων διανυσμάτων του χώρου θα αποτελέσει το βασικό μοντέλο για τον ορισμό της αφηρημένης έννοιας του διανυσματικού χώρου η οποία θα μελετηθεί στο επόμενο Κεφάλαιο.

Στην παρόν Κεφάλαιο θα δούμε με ποιόν τρόπο μπορούμε να γενικεύσουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Στο επόμενο Κεφάλαιο θα μελετήσουμε διεξοδικά με ποιόν τρόπο μπορούμε να γενικεύσουμε το σύνολο των ελευθέρων διανυσμάτων.

1.2 Εσωτερικές και Εξωτερικές Πράξεις

Έστω $\mathcal{S}$ ένα σύνολο.

Μια **εσωτερική πράξη** επί του $\mathcal{S}$, είναι μια απεικόνιση

$$\star : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}, \quad (s_1, s_2) \mapsto \star(s_1, s_2).$$

Αν $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$, τότε συνήθως την τιμή $\star(s_1, s_2)$ θα την συμβολίζουμε με $s_1 \star s_2$:

$$\forall s_1, s_2 \in \mathcal{S} : \quad \star(s_1, s_2) := s_1 \star s_2.$$

Έστω τώρα $\mathbb{K}$ και $\mathcal{S}$ δύο σύνολα.

Μια **εξωτερική πράξη** του συνόλου $\mathbb{K}$ επί του $\mathcal{S}$, είναι μια απεικόνιση

$$\odot : \mathbb{K} \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}, \quad (k, s) \mapsto \odot(k, s).$$

Αν $k \in \mathbb{K}$ και $s \in \mathcal{S}$, τότε συνήθως την τιμή $\odot(k, s)$ θα την συμβολίζουμε με $k \odot s$:

$$\forall \in \mathbb{K}, \ \forall s \in \mathcal{S} : \quad \odot(k, s) := k \odot s$$

Παράδειγμα 1.2.1 *Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών, ορίζεται η πράξη της πρόσθεσης, η οποία είναι μια απεικόνιση $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(k, l) \mapsto k + l$. Επίσης ορίζεται και η πράξη του πολλαπλασιασμού, η οποία είναι μια απεικόνιση $\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(k, l) \mapsto kl$. Άλλα παραδείγματα αποτελούν τα οικεία μας σύνολα: $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών, $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, και $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, εφοδιασμένα με τις συνηθισμένες πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού.*

1.3 Η έννοια του σώματος

Σε ένα γενικό πλαίσιο η Άλγεβρα μελετά τις βασικές ιδιότητες και την δομή συνόλων τα οποία είναι εφοδιασμένα με μία ή περισσότερες (εσωτερικές ή εξωτερικές) πράξεις. Αυτά τα σύνολα, μαζί με αυτές τις πράξεις, αποτελούν γενικεύσεις των οικείων μας συνόλων αριθμών $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ εφοδιασμένα με τις συνηθισμένες πράξεις. Στα πλαίσια της Γραμμικής Άλγεβρας η έννοια του σώματος διαδραματίζει σημαντικό ρόλο.

Ορισμός 1.3.1 *Ένας* **σώμα** *είναι ένα σύνολο $\mathbb{K}$ το οποίο είναι εφοδιασμένο με δύο εσωτερικές πράξεις:*

(a) $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, *η οποία στέλνει το ζεύγος στοιχείων $(k_1, k_2) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ σε ένα νέο στοιχείο $k_1 + k_2 \in \mathbb{K}$, την οποία καλούμε* **Πρόσθεση** *(στοιχείων του $\mathbb{K}$).*

(b) $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, *η οποία στέλνει το ζεύγος $(k_1, k_2) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ σε ένα νέο στοιχείο $k_1 \cdot k_2 \in \mathbb{K}$, την οποία καλούμε* **Πολλαπλασιασμό** *(στοιχείων του $\mathbb{K}$).*

Το σύνολο $\mathbb{K}$ μαζί με την πράξη της πρόσθεσης $+$ και του πολλαπλασιασμού $\cdot$, απαιτούμε να ικανοποιούν τα ακόλουθα αξιώματα:

(ΔΧ1) *Προσεταιριστική Ιδιότητα της Πρόσθεσης. Δηλαδή:*

$$\boxed{\forall k_1,\, k_2,\, \in\, \mathbb{K}: \quad (k_1 + k_2) + k_3 = k_1 + (k_2 + k_3)}$$

(ΔΧ2) *Αντιμεταθετική Ιδιότητα Πρόσθεσης. Δηλαδή:*

$$\boxed{\forall k_1, k_2 \in \mathbb{K}: \quad k_1 + k_2 = k_2 + k_1}$$

(ΔΧ3) *Ύπαρξη Μηδενικού Στοιχείου. Δηλαδή υπάρχει ένα διακεκριμένο στοιχείο 0 του $\mathbb{K}$, το οποίο καλείται* **μηδενικό στοιχείο**, *έτσι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα:*

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{K}: \quad k + 0 = k = 0 + k}$$

(ΔΧ4) *Ύπαρξη Αντιθέτου Στοιχείου. Δηλαδή για κάθε στοιχείου k του $\mathbb{K}$ υπάρχει ένα νέο στοιχείο $-k$ του $\mathbb{K}$, το οποίο καλείται* **αντίθετο στοιχείο** *του k, έτσι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα:*

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{K},\ \exists(-k\,) \in \mathbb{K}: \quad k + (-k\,) = 0 = (-k) + k}$$

(ΔΧ5) *Προσεταιριστική Ιδιότητα του Πολλαπλασιασμού του $\mathbb{K}$. Δηλαδή:*

$$\boxed{\forall k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{K}: \quad k_1 \cdot (k_2 \cdot k_3) = (k_1 \cdot k_2) \cdot k_3}$$

(ΔΧ6) *Επιμεριστική Ιδιότητα του Πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση του $\mathbb{K}$. Δηλαδή:*

$$\boxed{\forall k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{K}: \quad k_1 \cdot (k_2 + k_3) = k_1 \cdot k_2 + k_1 \cdot k_3}$$

$$\boxed{\forall k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{K}: \quad (k_1 + k_2) \cdot k_3 = k_1 \cdot k_3 + k_2 \cdot k_3}$$

(ΔΧ7) *Αντιμεταθετική Ιδιότητα του Πολλαπλασιασμού του $\mathbb{K}$. Δηλαδή:*

$$\boxed{\forall k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{K}: \quad k_1 \cdot k_2 = k_2 \cdot k_1}$$

(ΔΧ8) *Ύπαρξη Πολλαπλασιαστικής Μονάδας. Δηλαδή:*

$$\boxed{\exists 1 \in \mathbb{K}, \forall k \in \mathbb{K}: \quad 1 \cdot k = k = k \cdot 1}$$

(ΔΧ9) *Ύπαρξη Πολλαπλασιαστικού Αντιστρόφου. Δηλαδή για κάθε μη μηδενικό στοιχείο k του $\mathbb{K}$ υπάρχει ένα νέο στοιχείο k^{-1} του $\mathbb{K}$, το οποίο καλείται* **αντίστροφο στοιχείο** *του k, έτσι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα:*

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \exists k^{-1} \in \mathbb{K}: \quad k \cdot k^{-1} = 1 = k^{-1} \cdot k}$$

Τα βασικά παραδείγματα σωμάτων με τα οποία θα ασχοληθούμε στις παρούσες σημειώσεις είναι υποσύνολα του συνόλου $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, το οποίο με την σειρά του είναι ένα σώμα.

Παράδειγμα 1.3.1 *Εφοδιασμένα με τις συνηθισμένες πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού, τα ακόλουθα σύνολα αριθμών είναι σώματα:*

1. *Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών.*

2. *Το σύνολο* $\mathbb{R}$ *των πραγματικών αριθμών.*

3. *Το σύνολο* $\mathbb{C}$ *των μιγαδικών αριθμών.*

Αντίθετα το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$ *δεν είναι είναι σώμα (γιατί;).*

Άσκηση 1.3.2 *Θεωρούμε το ακόλουθα σύνολα:*

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{\kappa + \lambda\sqrt{2} \in \mathbb{R} \,|\, \kappa, \lambda \in \mathbb{Q}\}$$
$$\mathbb{Q}(\sqrt{-1}) := \{\kappa + \lambda\sqrt{-1} \in \mathbb{C} \,|\, \kappa, \lambda \in \mathbb{Q}\}$$

Να δείξετε ότι τα σύνολα $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *και* $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ *εφοδιασμένα με τις συνηθισμένες πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού πραγματικών και μιγαδικών αριθμών αντίστοιχα, είναι σώματα.*

Σύμβαση 1.3.3 *Χάριν ευκολίας στις παρούσες σημειώσεις από τώρα και στο εξής με τον όρο* **σώμα** *θα εννοούμε ένα υποσύνολο* $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ *των μιγαδικών αριθμών το οποίο περιέχει το* 0 *και το* 1 *και είναι κλειστό στην πρόσθεση, πολλαπλασιασμό, και την ύπαρξη αντιστρόφου (δηλαδή αν* $k \in \mathbb{K}$ *και* $k \neq 0$*, τότε* $k^{-1} \in \mathbb{K}$.

Είναι εύκολο να δειχθεί τότε ότι ένα τέτοιο υποσύνολο $\mathbb{K}$ *εφοδιασμένο με τους περιορισμούς των γνωστών πράξεων πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών είναι σώμα με την έννοια του ορισμού 1.3.1.*

Παρατήρηση 1.3.2 *Τα παραπάνω σώματα έχουν άπειρο πλήθος στοιχείων. Υπάρχουν όμως και σώματα με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Για παράδειγμα έστω* $\mathbb{F}$ *ένα σύνολο με δύο στοιχεία, τα οποία συμβολίζουμε με* $0, 1$*:* $\mathbb{F} = \{0, 1\}$*. Στο σύνολο* $\mathbb{F}$ *ορίζουμε δύο εσωτερικές πράξεις*

$$+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}, (x, y) \mapsto x + y$$
$$\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}, (x, y) \mapsto x \cdot y$$

ως ακολούθως:

1. $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1,$ *και* $1 + 1 = 0.$

2. $0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 0, 1 \cdot 0 = 0,$ *και* $1 \cdot 1 = 1.$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι με τις παραπάνω πράξεις το σύνολο $\mathbb{F}$ *είναι ένα σώμα.*

Γενικά το μεγαλύτερο τμήμα της θεωρίας που θα αναπτυχθεί στα επόμενα Κεφάλαια είναι ανεξάρτητο του πλήθους των στοιχείων ενός σώματος, και άρα ισχύει για τα σώματα με την έννοια του ορισμού 1.3.1. Η σύμβαση που κάναμε παραπάνω έγινε μόνο χάριν απλότητας και οικειότητας με τα σώματα αριθμών $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *και τα υποσύνολα τους .*

Κεφάλαιο 2

Διανυσματικοι Χωροι

Στο παρόν Κεφάλαιο θα ορίσουμε την πολύ βασική έννοια του διανυσματικού χώρου πάνω από ένα σώμα. Θα μελετήσουμε τις κυριότερες ιδιότητες διανυσματικών χώρων και θα διαπραγματευθούμε μια πληθώρα βασικών παραδειγμάτων επί των οποίων θα εφαρμοσθεί η θεωρία η οποία θα αναπτυχθεί στα επόμενα Κεφάλαια. Τέλος θα αναπτύξουμε μια σειρά θεμελιωδών κατασκευών επί διανυσματικών χώρων οι οποίες θα μας είναι πολύ χρήσιμες στα επόμενα Κεφάλαια.

2.1 Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

Από τώρα και στο εξής σταθεροποιούμε ένα σώμα $\mathbb{K}$. Υπενθυμίζουμε από το Κεφάλαιο 1 ότι με το όρο σώμα θα εννοούμε ένα υποσύνολο $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών το οποίο περιέχει το 0 και το 1 και είναι κλειστό στην πρόσθεση, πολλαπλασιασμό, και την ύπαρξη αντιστρόφου (δηλαδή αν $k \in \mathbb{K}$ και $k \neq 0$, τότε $k^{-1} \in \mathbb{K}$.

Διαισθητικά ένας διανυσματικός χώρος είναι ένα σύνολο "διανυσμάτων" στο οποίο μπορούμε να ορίσουμε πρόσθεση καθώς και πολλαπλασιασμό με αριθμούς από ένα σώμα, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι γνωστοί αλγεβρικοί νόμοι που ισχύουν στο σύνολο των ελευθέρων διανυσμάτων του επιπέδου ή του χώρου. Περισσότερο αυστηρά και με βάση τα όσα ισχύουν στην Αναλυτική ή Ευκλείδεια γεωμετρία οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.1.1 *Ένας* **διανυσματικός χώρος** *πάνω από ένα σώμα $\mathbb{K}$ είναι ένα μη-κενό σύνολο $\mathcal{V}$, του οποίου τα στοιχεία θα καλούμε* **διανύσματα** *και θα τα συμβολίζουμε με $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \cdots$, το οποίο είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις:*

(a) *Μία εσωτερική πράξη* $+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, *η οποία στέλνει το ζεύγος διανυσμάτων* $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ *σε ένα νέο διάνυσμα* $\vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{V}$, *την οποία καλούμε* **Πρόσθεση** *(διανυσμάτων του* $\mathcal{V}$*).*

(b) *Μία εξωτερική πράξη* $\cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, *η οποία στέλνει το ζεύγος* $(k, \vec{x}) \in \mathbb{K} \times \mathcal{V}$ *σε ένα νέο διάνυσμα* $k \cdot \vec{x} \in \mathcal{V}$, *την οποία καλούμε* **Βαθμωτό Πολλαπλασιασμό** *(στοιχείων του σώματος* $\mathbb{K}$ *με διανύσματα του* $\mathcal{V}$*).*

Το σύνολο $\mathcal{V}$ *μαζί με την πράξη της πρόσθεσης* $+$ *και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού* $\cdot$, *απαιτούμε να ικανοποιούν τα ακόλουθα αξιώματα:*

(ΔΧ1) Προσεταιριστική Ιδιότητα της Πρόσθεσης. *Δηλαδή:*

$$\boxed{\forall \vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z} \in \mathcal{V}: \quad (\vec{x} + \vec{y}\,) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}\,)}$$

(ΔΧ2) Αντιμεταθετική Ιδιότητα Πρόσθεσης. *Δηλαδή:*

$$\boxed{\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}: \quad \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}}$$

(ΔΧ3) Ύπαρξη Μηδενικού Διανύσματος. *Δηλαδή υπάρχει ένα διακεκριμένο στοιχείο* $\vec{0}$ *του* $\mathcal{V}$, *το οποίο καλείται* **μηδενικό διάνυσμα**, *έτσι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα:*

$$\boxed{\forall \vec{x} \in \mathcal{V}: \quad \vec{x} + \vec{0} = \vec{x} = \vec{0} + \vec{x}}$$

(ΔΧ4) Ύπαρξη Αντιθέτου Διανύσματος. *Δηλαδή για κάθε διάνυσμα* $\vec{x}$ *του* $\mathcal{V}$ *υπάρχει ένα νέο διάνυσμα* $-\vec{x}$ *του* $\mathcal{V}$, *το οποίο καλείται* **αντίθετο διάνυσμα** *του* $\vec{x}$, *έτσι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα:*

$$\boxed{\forall \vec{x} \in \mathcal{V},\ \exists(-\vec{x}\,) \in \mathcal{V}: \quad \vec{x} + (-\vec{x}\,) = \vec{0} = (-\vec{x}) + \vec{x}\,)}$$

(ΔΧ5) Επιμεριστική Ιδιότητα του Βαθμωτού Πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση στοιχείων του $\mathbb{K}$. *Δηλαδή:*

$$\boxed{\forall \vec{x} \in \mathcal{V},\ \forall \kappa, \lambda \in \mathbb{K}: \quad (\kappa + \lambda) \cdot \vec{x} = \kappa \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{x}}$$

(ΔΧ6) Επιμεριστική Ιδιότητα του Βαθμωτού Πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων του $\mathcal{V}$. *Δηλαδή:*

$$\boxed{\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V},\ \forall \kappa \in \mathbb{K}: \quad \kappa \cdot (\vec{x} + \vec{y}\,) = \kappa \cdot \vec{x} + \kappa \cdot \vec{y}}$$

(ΔΧ7) *Μικτή Προσεταιριστική Ιδιότητα*. *Δηλαδή :*

$$\boxed{\forall \vec{x} \in \mathcal{V},\ \forall \kappa, \lambda \in \mathbb{K} :\ \ \kappa \cdot (\lambda \cdot \vec{x}\,) = (\kappa\lambda) \cdot \vec{x}}$$

(ΔΧ8) *Μοναδιαία Ιδιότητα*. *Δηλαδή :*

$$\boxed{\forall \vec{x} \in \mathcal{V} :\ \ 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}}$$

Σχόλιο 2.1.1

1. *Σημειώνουμε ότι ένας διανυσματικός χώρος είναι μια τριάδα $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ που ικανοποιεί τα παραπάνω αξιώματα και όχι απλά ένα σύνολο $\mathcal{V}$. Χάριν απλότητας όμως θα παραλείπουμε τα σύμβολα των πράξεων $+, \cdot$, όταν οι πράξεις είναι ευκόλως εννοούμενες ή έχουν αναφερθεί/ορισθεί προηγούμενα, και θα λέμε ότι το σύνολο $\mathcal{V}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος.*

2. *Στον ορισμό 2.1.1 δεν θα πρέπει να συγχέουμε την πρόσθεση αριθμών από το σώμα $\mathbb{K}$ με την πρόσθεση διανυσμάτων του $\mathcal{V}$, αν και οι δύο πράξεις εμφανίζονται στα αξιώματα με το ίδιο σύμβολο. Έτσι π.χ. στο Αξίωμα* **(ΔΧ5)**, *το σύμβολο $+$ στην αριστερή πλευρά συμβολίζει πρόσθεση αριθμών στο σώμα $\mathbb{K}$ και το το σύμβολο $+$ στην δεξιά πλευρά συμβολίζει πρόσθεση διανυσμάτων στον $\mathcal{V}$.*

3. *Αν $\vec{x}$ είναι ένα διάνυσμα του $\mathcal{V}$, τότε το διάνυσμα $-\vec{x}$, την ύπαρξη του οποίου μας εξασφαλίζει το Αξίωμα* **(ΔΧ4)**, *συμβολίζει ένα νέο διάνυσμα. Θα δούμε άργότερα ότι το $-\vec{x}$ είναι ίσο με το διάνυσμα $(-1) \cdot \vec{x}$.*

4. *Το Αξίωμα* **(ΔΧ1)** *μας επιτρέπει να "απαλείφουμε" παρενθέσεις. Έτσι από τώρα και στο εξής η σχέση $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ θα γράφεται $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$ καθώς ο άλλος δυνατός τρόπος για να προσθέσουμε τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, δηλαδή ο $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ δίνει σύμφωνα με το Αξίωμα* **(ΔΧ1)** *το ίδιο αποτέλεσμα. Γενικότερα αν έχουμε να προσθέσουμε μια πεπερασμένη συλλογή διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$, τότε όλοι οι δυνατοί τρόποι για να τα προσθέσουμε δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα (να το δείξετε σαν Άσκηση χρησιμοποιώντας επαγωγή), το οποίο από τώρα και στο εξής θα γράφουμε ως: $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n$.*

5. *Το Αξίωμα* **(ΔΧ2)** *μας επιτρέπει να αλλάζουμε την σειρά με την οποία προσθέτουμε διανύσματα. Έτσι για παράδειγμα έχουμε $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3 = \vec{x}_3 + \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \vec{x}_2 + \vec{x}_3 + \vec{x}_1$, κ.ο.κ.*

Πριν προχωρήσουμε σε παραδείγματα διανυσματικών χώρων Θα δούμε δούμε κάποιες ιδιότητες που απορρέουν σχετικά άμεσα από τον ορισμό 2.1.1

και οι οποίες θα μας επιτρέψουν να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό και να αποφεύγουμε περιττές επαναλήψεις επιχειρημάτων.

Από τώρα σταθεροποιούμε έναν διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}$ πάνω από ένα σώμα $\mathbb{K}$.

Συμβολισμός 2.1.2 *Αν $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$, τότε θα γράφουμε:*

$$\boxed{\vec{x} + (-\vec{y}) \ := \ \vec{x} - \vec{y}}$$

όπου $-\vec{y}$ είναι το αντίθετο του διανύσματος $\vec{y}$. Σημειώνουμε ότι η παραπάνω γραφή είναι απλά ένας συμβολισμός, καθώς τυπικά δεν έχουμε ορίσει αφαίρεση διανυσμάτων. Μπορεί όμως κανείς να θεωρήσει τον παραπάνω συμβολισμό ως ορισμό **αφαίρεσης διανυσμάτων** *στον $\mathcal{V}$.*

Λήμμα 2.1.2 *Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες.*

1. $\forall \kappa, \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in \mathcal{V}$: $(\kappa - \lambda) \cdot \vec{x} = \kappa \cdot \vec{x} - \lambda \cdot \vec{x}$.
2. $\forall \kappa \in \mathbb{K}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$: $\kappa \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \kappa \cdot \vec{x} - \kappa \cdot \vec{y}$.
3. $\forall \vec{x} \in \mathcal{V}$: $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$.
4. $\forall \vec{x} \in \mathcal{V}$: $(-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x}$.
5. $\forall \vec{x} \in \mathcal{V}$: $-(-\vec{x}) = \vec{x}$.
6. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$: $-(\vec{x} + \vec{y}) = -\vec{x} - \vec{y}$.
7. $\forall \kappa \in \mathbb{K}$: $\kappa \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
8. *Αν $\lambda \in \mathbb{K}$ και $\vec{x} \in \mathcal{V}$ και ισχύει $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}$, τότε: είτε $\lambda = 0$ ή $\vec{x} = \vec{0}$.*

Απόδειξη:

1. Εάν προσθέσουμε στο διάνυσμα $(\kappa - \lambda) \cdot \vec{x}$ το διάνυσμα $\lambda \cdot \vec{x}$ και χρησιμοποιήσουμε το Αξίωμα **(ΔΧ5)** θα έχουμε: $(\kappa - \lambda) \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{x} = (\kappa - \lambda + \lambda) \cdot \vec{x} = \kappa \cdot \vec{x}$. Αν στην τελευταία σχέση προσθέσουμε και στα δύο μέλη το διάνυσμα $-(\lambda \cdot \vec{x})$ και χρησιμοποιήσουμε διαδοχικά τα Αξιώματα **(ΔΧ1)**, **(ΔΧ4)**, **(ΔΧ3)** θα έχουμε την ζητούμενη σχέση:

$$\begin{aligned} \kappa \cdot \vec{x} - \lambda \cdot \vec{x} &= [(\kappa - \lambda) \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{x}] - (\lambda \cdot \vec{x}) \\ &= (\kappa - \lambda) \cdot \vec{x} + [\lambda \cdot \vec{x} - (\lambda \cdot \vec{x})] \\ &= (\kappa - \lambda) \cdot \vec{x} + \vec{0} \\ &= (\kappa - \lambda) \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

2. Αν προσθέσουμε στο διάνυσμα $\kappa \cdot (\vec{x} - \vec{y})$ το διάνυσμα $\kappa \cdot \vec{y}$, θα έχουμε το διάνυσμα $\kappa \cdot (\vec{x} - \vec{y}) + \kappa \cdot \vec{y}$. Χρησιμοποιώντας διαδοχικά τα Αξίωματα **(ΔΧ1)**, **(ΔΧ4)**, **(ΔΧ3)** θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \kappa \cdot (\vec{x} - \vec{y}) + \kappa \cdot \vec{y} &= \kappa \cdot [(\vec{x} - \vec{y}) + \vec{y}] \\ &= \kappa \cdot [\vec{x} + (-\vec{y}) + \vec{y})] \\ &= \kappa \cdot (\vec{x} + \vec{0}) \\ &= \kappa \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

Αν τώρα στην σχέση $\kappa \cdot (\vec{x} - \vec{y}) + \kappa \cdot \vec{y} = \kappa \cdot \vec{x}$ προσθέσουμε και στα δύο μέλη το διάνυσμα $-(\kappa \cdot \vec{y})$ και χρησιμοποιήσουμε διαδοχικά τα Αξίωματα **(ΔΧ1)**, **(ΔΧ4)**, **(ΔΧ3)** θα έχουμε τελικά την ζητούμενη σχέση:

$$\begin{aligned} [\kappa \cdot (\vec{x} - \vec{y}) + \kappa \cdot \vec{y}] - (\kappa \cdot \vec{y}) = \kappa \cdot \vec{x} - \kappa \cdot \vec{y} &\implies \\ \kappa \cdot (\vec{x} - \vec{y}) + (\kappa \cdot \vec{y} - \kappa \cdot \vec{y}) = \kappa \cdot \vec{x} - \kappa \cdot \vec{y} &\implies \\ \kappa \cdot (\vec{x} - \vec{y}) + \vec{0} = \kappa \cdot \vec{x} - \kappa \cdot \vec{y} &\implies \\ \kappa \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \kappa \cdot \vec{x} - \kappa \cdot \vec{y} & \end{aligned}$$

3. Στην σχέση 1. που αποδείξαμε θέτουμε $\kappa = \lambda$. Τότε θα έχουμε την σχέση $0 \cdot \vec{x} = \kappa \cdot \vec{x} - \kappa \cdot \vec{x}$, το δεύτερο μέλος της οποίας είναι το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ σύμφωνα με το Αξίωμα **(ΔΧ4)**. Επομένως $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

4. Στην σχέση 1. που αποδείξαμε θέτουμε $\kappa = 0$ και $\lambda = 1$. Τότε θα έχουμε την σχέση $(-1) \cdot \vec{x} = -(1 \cdot \vec{x})$, το δεύτερο μέλος της οποίας είναι ίσο με το διάνυσμα $-\vec{x}$ σύμφωνα με το Αξίωμα **(ΔΧ8)**. Επομένως $(-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x}$.

5. Από την ιδιότητα 4. η σχέση $-(-\vec{x})$ γράφεται ισοδύναμα $(-1) \cdot [(-1) \cdot \vec{x})]$. Χρησιμοποιώντας τα Αξιώματα **(ΔΧ7)** και **(ΔΧ8)**, θα έχουμε $-(-\vec{x}) = (-1) \cdot [(-1) \cdot \vec{x})] = [(-1)(-1)] \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

6. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 4., και το Αξίωμα **(ΔΧ6)**, θα έχουμε: $-(\vec{x} + \vec{y}) = (-1) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = (-1) \cdot \vec{x} + (-1) \cdot \vec{y} = -\vec{x} - \vec{y}$.

7. Στην σχέση 2. που αποδείξαμε θέτουμε $\vec{x} = \vec{y}$. Τότε θα έχουμε την σχέση $\kappa \cdot (\vec{x} - \vec{x}) = \kappa \cdot \vec{x} - \kappa \cdot \vec{x}$, το δεύτερο μέλος της οποίας είναι το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ και το πρώτο μέλος είναι ίσο με το διάνυσμα $\kappa \cdot \vec{0}$, σύμφωνα με το Αξίωμα **(ΔΧ4)**. Επομένως $\kappa \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

8. Υποθέτουμε ότι $\kappa \neq 0$ και δείχνουμε ότι αναγκαστικά θα πρέπει να ισχύει $\vec{x} = \vec{0}$. Επειδή $\kappa \neq 0$, ο αριθμός $\kappa \in \mathbb{K}$ είναι αντιστρέψιμος και

επομένως υπάρχει ο αντίστροφος του $\kappa^{-1} \in \mathbb{K}$ και ισχύει $\kappa\kappa^{-1} = 1 = \kappa^{-1}\kappa$. Πολλαπλασιάζοντας βαθμωτά και από τα δύο μέλη την δοθείσα σχέση $\kappa \cdot \vec{x} = \vec{0}$ με κ^{-1}, θα έχουμε την σχέση

$$\kappa^{-1} \cdot (\kappa \cdot \vec{x}) = \kappa^{-1} \cdot \vec{0} \qquad (*)$$

Χρησιμοποιώντας διαδοχικά τα Αξιώματα **(ΔΧ7)** και **(ΔΧ8)**, το πρώτο μέλος της σχέσης $(*)$ είναι ίσο με $(\kappa^{-1}\kappa) \cdot \vec{x}) = 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$. Το δεύτερο μέλος της σχέσης $(*)$ είναι ίσο με το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ σύμφωνα με την ιδιότητα 5. που αποδείξαμε παραπάνω. Επομένως $\vec{x} = 0$.

□

Είναι εύλογο να αναρωτηθούμε αν το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ και το αντίθετο ενός δοθέντος διανύσματος $\vec{x}$ του $\mathcal{V}$, την ύπαρξη των οποίων μας εξασφαλίζουν τα Αξιώματα **(ΔΧ3)** και **(ΔΧ4)**, είναι μοναδικά. Αυτό πράγματι ισχύει όπως θα δείξουμε στο επόμενο Λήμμα το οποίο περιέχει και δύο ιδιότητες οι οποίες μας επιτρέπουν να απλοποιήσουμε περαιτέρω τις πράξεις με διανύσματα.

Λήμμα 2.1.3

1. *Αν $\vec{0}_1$ και $\vec{0}_2$ είναι δύο διανύσματα του $\mathcal{V}$ τα οποία ικανοποιούν το Αξίωμα* **(ΔΧ3)**, *δηλαδή $\vec{x} + \vec{0}_1 = \vec{x}$ και $\vec{x} + \vec{0}_2 = \vec{x}$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{V}$, τότε: $\vec{0}_1 = \vec{0}_2$.*
2. *Έστω $\vec{x} \in \mathcal{V}$ και υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο διανύσματα $\vec{x}_1$ και $\vec{x}_2$ τα οποία ικανοποιούν το Αξίωμα* **(ΔΧ4)**, *δηλαδή $\vec{x} + \vec{x}_1 = \vec{0}$ και $\vec{x} + \vec{x}_2 = \vec{0}$. Τότε $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$.*
3. *Έστω $\lambda \in \mathbb{K}$, με $\lambda \neq 0$, και $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$. Αν $\lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{y}$, τότε $\vec{x} = \vec{y}$.*
4. *Έστω $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ και $\vec{x} \in \mathcal{V}$ με $\vec{x} \neq \vec{0}$. Αν $\lambda_1 \cdot \vec{x} = \lambda_2 \cdot \vec{x}$, τότε $\lambda_1 = \lambda_2$.*

Απόδειξη:

1. Θέτοντας $\vec{x} = \vec{0}_1$ στο Αξίωμα **(ΔΧ3)** και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το $\vec{0}_2$ ικανοποιεί αυτό το Αξίωμα, έχουμε: $\vec{0}_1 + \vec{0}_2 = \vec{0}_1$. Παρόμοια θέτοντας $\vec{x} = \vec{0}_2$ στο Αξίωμα **(ΔΧ3)** και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το $\vec{0}_1$ ικανοποιεί αυτό το Αξίωμα, έχουμε: $\vec{0}_2 + \vec{0}_1 = \vec{0}_2$. Όμως από το Αξίωμα **(ΔΧ2)** έχουμε $\vec{0}_1 + \vec{0}_2 = \vec{0}_2 + \vec{0}_1$. Επομένως $\vec{0}_1 = \vec{0}_2$.
2. Προσθέτοντας στην σχέση $\vec{x} + \vec{x}_1 = \vec{0}$ το διάνυσμα $\vec{x}_2$ θα έχουμε την σχέση $(\vec{x} + \vec{x}_1) + \vec{x}_2 = \vec{0} + \vec{x}_2$, το δεύτερο μέλος της οποίας είναι ίσο με το $\vec{x}_2$ σύμφωνα με το Αξίωμα **(ΔΧ3)**. Εφαρμόζοντας διαδοχικά τα Αξιώματα **(ΔΧ1)**, **(ΔΧ2)**, **(ΔΧ3)**, και την σχέση $\vec{x} + \vec{x}_2 = \vec{0}$, θα έχουμε:

$$\vec{x}_2 = (\vec{x} + \vec{x}_1) + \vec{x}_2 = \vec{x} + (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \vec{x} + (\vec{x}_2 + \vec{x}_1) =$$

$$(\vec{x} + \vec{x}_2) + \vec{x}_1 = \vec{0} + \vec{x}_1 = \vec{x}_1 + \vec{0} = \vec{x}_1.$$

3. Προσθέτοντας και στα δύο μέλη της σχέσης $\lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{y}$ το διάνυσμα $-(\lambda \cdot \vec{y})$ θα έχουμε την σχέση $\lambda \cdot \vec{x} - (\lambda \cdot \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{y} - (\lambda \cdot \vec{y}) = \vec{0}$. Επομένως η αρχική σχέση γράφεται ισοδύναμα $\lambda \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = 0$. Επειδή $\lambda \neq 0$, από την ιδιότητα 8 του Λήμματος 2.1.2, έπεται ότι $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}$. Προσθέτοντας στην τελευταία σχέση το διάνυσμα $\vec{y}$ θα έχουμε $\vec{x} - \vec{y} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{0}$ και επομένως $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x} = \vec{y}$.

4. Σκεπτόμενοι όπως στην απόδειξη του 3. η σχέση $\lambda_1 \cdot \vec{x} = \lambda_2 \cdot \vec{x}$ γράφεται ισοδύναμα $(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \vec{x} = \vec{0}$. Επειδή $\lambda_1 \neq \lambda_2$, από την ιδιότητα 8. του Λήμματος 2.1.2, έπεται ότι $\vec{x} = \vec{0}$.

□

Πρόχειρη Δοκιμασία

1. Να δείξετε ότι το Αξίωμα **(ΔΧ2)** προκύπτει από τα τα υπόλοιπα αξιώματα.

   (Υπόδειξη: Θεωρείστε δύο τυχόντα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ του $\mathcal{V}$ και εκφράστε το διάνυσμα $(1+1) \cdot (\vec{x} + \vec{y})$ με δύο διαφορετικούς τρόπους, χρησιμοποιώντας τα Αξιώματα **(ΔΧ5)**, **(ΔΧ6)**.)

2. Στο σύνολο $\mathbb{R}^2 = \{(\kappa, \lambda) \mid \kappa, \lambda \in \mathbb{R}\}$, ορίζουμε "πρόσθεση" $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ως εξής: $(\kappa_1, \kappa_2) + (\lambda_1, \lambda_2) = (\kappa_1 + \lambda_1, \kappa_2 + \lambda_2)$. Επίσης ορίζουμε "βαθμωτό πολλαπλασιασμό" $\circledast : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ως εξής: $\lambda \circledast (\kappa_1, \kappa_2) = (\lambda\kappa_1, 0)$. Να δείξετε ότι η τριάδα $(\mathbb{R}^2, +, \circledast)$ ικανοποιεί όλα τα Αξιώματα του ορισμού 2.1.1, *εκτός* από το Αξίωμα **(ΔΧ8)**.

   (Υπόδειξη: Για το **(ΔΧ8)** θεωρείστε τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό $1 \circledast (1, 1)$.)

3. Στο σύνολο $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε "πρόσθεση" $\dot{+} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ως εξής: $(\kappa_1, \kappa_2) \dot{+} (\lambda_1, \lambda_2) = (\kappa_1 + \lambda_1 + 1, \kappa_2 + \lambda_2 + 1)$. Επίσης ορίζουμε "βαθμωτό πολλαπλασιασμό" $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ως εξής: $\lambda \cdot (\kappa_1, \kappa_2) = (\lambda\kappa_1, \lambda\kappa_2)$. Να εξετασθεί αν η τριάδα $(\mathbb{R}^2, \dot{+}, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$. Ποια Αξιώματα ισχύουν και ποιά όχι;

4. Έστω $\mathbb{R}_+$ το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε "πρόσθεση" $\otimes : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ως εξής: $\kappa \otimes \lambda := \kappa\lambda$. Επίσης ορίζουμε "βαθμωτό πολλαπλασιασμό" $\star : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ως εξής: $r \star \kappa := \kappa^r$. Να δείξετε ότι η τριάδα $(\mathbb{R}_+, \otimes, \star)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$.

- Απο τωρα και στο εξης θα χρησιμοποιουμε τις ιδιοτητες που αποδειξαμε στο Λημμα 2.1.2 χωρις περαιτερω αναφορα.

2.2 Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

Στην παρούσα ενότητα θα αναπτύξουμε μια σειρά παραδειγμάτων διανυσματικών χώρων. Αυτά τα παραδείγματα, καθώς και πολλά άλλα τα οποία θα αναφέρουμε στην συνέχεια, θα τα χρησιμοποιούμε καθ' όλη την διάρκεια των σημειώσεων σαν πρότυπα εφαρμογής της θεωρίας την οποία θα αναπτύξουμε.

Παράδειγμα 2.2.1 *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα. Για παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε το σώμα $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών ή το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ή το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.*

Τότε η πρόσθεση $\mathbb{K}\times\mathbb{K} \to \mathbb{K},\ (\kappa,\lambda) \mapsto \kappa+\lambda$ του $\mathbb{K}$, και ο πολλαπλασιασμός $\mathbb{K}\times\mathbb{K} \to \mathbb{K},\ (\kappa,\lambda) \mapsto \kappa\lambda$ του $\mathbb{K}$ (τον οποίον για την περίσταση θεωρούμε ως εξωτερική πράξη), ικανοποιούν τα Αξιώματα του ορισμού 2.1.1 (να το δειξετε σαν Ασκηση). Επομένως κάθε σώμα $\mathbb{K}$ μπορεί να θεωρηθεί σαν διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$. Όπως μπορεί να διαπιστωθεί εύκολα το μηδενικό διάνυσμα είναι ο αριθμός 0 και το αντίθετο διάνυσμα του $\kappa \in \mathbb{K}$ είναι το $-\kappa$.

Το επόμενο αποτελεί κατά κάποιο τρόπο γενίκευση του παραπάνω παραδείγματος.

Παράδειγμα 2.2.2 *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και n ένας φυσικός αριθμός ($n \geq 1$). Θεωρούμε το ακόλουθο σύνολο:*

$$\mathbb{K}^n := \mathbb{K}\times\mathbb{K}\times\cdots\times\mathbb{K} = \{(\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_n) \mid \kappa_i \in \mathbb{K},\ i = 1,2,\cdots,n\}$$

Χρησιμοποιώντας την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό αριθμών στο $\mathbb{K}$, μπορούμε να ορίσουμε μια πράξη πρόσθεσης $+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ και μια πράξη βαθμωτού πολλαπλασιασμού $\cdot : \mathbb{K}\times\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ στο σύνολο $\mathbb{K}^n$, ως εξής. Αν $\vec{\alpha} = (k_1,k_2,\cdots,k_n)$, $\vec{\beta} = (l_1,l_2,\cdots,l_n) \in \mathbb{K}^n$, και $r \in \mathbb{K}$, τότε ορίζουμε:

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta} = (k_1+l_1, k_2+l_2,\cdots,k_n+l_n) \quad \text{και} \quad r\cdot\vec{\kappa} = (rk_1, rk_2,\cdots,rk_n).$$

Τότε η τριάδα $(\mathbb{K}^n,+,\cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$. Όπως μπορεί να διαπιστωθεί εύκολα το μηδενικό διάνυσμα είναι $\vec{0} = (0,0,\cdots,0)$ και επιπρόσθετα το αντίθετο του διανύσματος $\vec{\alpha} = (k_1,k_2,\cdots,k_n)$ είναι το διάνυσμα $-\vec{\alpha} = (-k_1,-k_2,\cdots,-k_n)$. Για παράδειγμα ας αποδείξουμε ότι ισχύει το Αξίωμα **(ΔΧ5)**. *Έστω $r,s \in \mathbb{K}$ και $\vec{\alpha} = (k_1,k_2,\cdots,k_n) \in \mathbb{K}^n$. Τότε:*

$$(r+s)\cdot\vec{\alpha} = (r+s)\cdot(k_1,k_2,\cdots,k_n) =$$

$$((r+s)k_1,(r+s)k_2,\cdots,(r+s)k_n) = (rk_1+sk_1, rk_2+sk_2,\cdots,rk_n+sk_n) =$$

$$(rk_1, rk_2, \cdots, rk_n) + (sk_1, sk_2, \cdots, sk_n) =$$
$$r \cdot (k_1, k_2, \cdots, k_n) + s \cdot (k_1, k_2, \cdots, k_n) = r \cdot \vec{\alpha} + s \cdot \vec{\alpha}.$$

Πρόχειρη Δοκιμασία

Επαληθεύστε τα υπόλοιπα αξιώματα στο Παράδειγμα 2.2.2.

Το ακόλουθο παράδειγμα δείχνει ότι ένα σύνολο μπορεί να είναι διανυσματικός χώρος πάνω από δύο διαφορετικά σώματα.

Παράδειγμα 2.2.3 *Στο Παράδειγμα 2.2.1 είδαμε ότι κάθε σώμα είναι διανυσματικός χώρος πάνω από τον εαυτό του. Έτσι το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$ με πράξεις αυτές που ορίσθηκαν στο Παράδειγμα 2.2.1. Διατηρώντας την πράξη της πρόσθεσης $+$, ορίζουμε έναν βαθμωτό πολλαπλασιασμό $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ως εξής. Αν $r \in \mathbb{R}$ και $z \in \mathbb{C}$, τότε $r \cdot z = rz$. Δηλαδή αν $z = a + bi$, τότε $r \cdot z = ra + rbi$. Τότε είναι εύκολο να δειχθεί ότι η τριάδα $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$ (δειξτε το σαν Ασκηση).*

Σχόλιο 2.2.4 *Ταυτίζοντας το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών με το σύνολο $\mathbb{R}^2$, μέσω της 1-1 και επί απεικόνισης $\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ η οποία στέλνει τον μιγαδικό αριθμό $z = a + bi$ στο ζεύγος πραγματικών αριθμών (a, b), είναι φανερό ότι η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός στα σύνολα $\mathbb{C}$ και $\mathbb{R}^2$ αντιστοιχούν με κανονικό τροπο, και επομένως μπορούμε να "ταυτίσουμε" το $\mathbb{C}$ με το $\mathbb{R}^2$ σαν διανυσματικού χώρους. Θα δούμε αργότερα μια πιο αυστηρή διατύπωση αυτού του ισχυρισμού.*

Θα δούμε τώρα μια γενίκευση του Παραδείγματος 2.2.2.

Έστω ότι $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \cdots, \mathcal{V}_n$ είναι n το πλήθος διανυσματικοί χώροι πάνω από το *ίδιο* σώμα $\mathbb{K}$. Συμβολίζουμε με τα ίδια σύμβολα τις πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού στους διανυσματικούς χώρους $\mathcal{V}_i$. Αυτή η σύμβαση δεν θα μας δημιουργήσει σύγχυση, καθώς θα είναι φανερό από τα συμφραζόμενα σε ποιόν διανυσματικό χώρο θα αναφέρομαστε.

Θεωρούμε τώρα το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \cdots, \mathcal{V}_n$:

$$\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_n := \{(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) \mid \vec{x}_i \in \mathcal{V}_i, \ \ i = 1, 2, \cdots, n\}$$

στο οποίο ορίζουμε νέα πράξη πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως εξής:

1. Πρόσθεση: Αν $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)$ και $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n)$ είναι δύο στοιχεία του $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_n$, τότε:

$$\alpha + \beta := (\vec{x}_1 + \vec{y}_1, \vec{x}_2 + \vec{y}_2 \cdots, \vec{x}_n + \vec{y}_n) \ \in \ \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_n.$$

2. Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός: Αν $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)$ είναι ένα στοιχείο του $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_n$ και $k \in \mathbb{K}$, τότε:

$$k \cdot \alpha := (k \cdot \vec{x}_1, k \cdot \vec{x}_2, \cdots, k \cdot \vec{x}_n) \ \in \ \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_n.$$

Αν και χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο για τις πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού στα σύνολα $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \cdots, \mathcal{V}_n$ και $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_n$ δεν θα δημιουργείται σύγχιση καθώς θα είναι φανερό κάθε φορά σε ποιά σύνολα αναφέρονται οι πράξεις.

Θεώρημα 2.2.1 *Έστω ότι $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \cdots, \mathcal{V}_n$ είναι n το πλήθος διανυσματικοί χώροι πάνω από το ίδιο σώμα $\mathbb{K}$. Τότε εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού, το καρτεσιανό γινόμενο $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_n$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$.*

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε τα Αξιώματα **(ΔΧ1), (ΔΧ3), (ΔΧ4), (ΔΧ6), (ΔΧ7)**. Η απόδειξη των Αξιωμάτων **(ΔΧ2), (ΔΧ5), (ΔΧ8)** είναι παρόμοια και αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη. Στο υπόλοιπο της απόδειξης θέτουμε για συντομία $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \mathcal{V}_n$.

Έστω $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)$, $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n)$ και $\gamma = (\vec{z}_1, \vec{z}_2, \cdots, \vec{z}_n)$ τρία στοιχεία του $\mathcal{V}$, και έστω $k \in \mathbb{K}$.

1. Χρησιμοποιώντας ότι το Αξίωμα **(ΔΧ1)** ισχύει στους διανυσματικούς χώρους $\mathcal{V}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, θα έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) + [(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n) + (\vec{z}_1, \vec{z}_2, \cdots, \vec{z}_n)] =$$

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) + (\vec{y}_1 + \vec{z}_1, \vec{y}_2 + \vec{z}_2, \cdots, \vec{y}_n + \vec{z}_n) =$$

$$(\vec{x}_1 + (\vec{y}_1 + \vec{z}_1), \vec{x}_2 + (\vec{y}_2 + \vec{z}_2), \cdots, \vec{x}_n + (\vec{y}_n + \vec{z}_n)) =$$

$$((\vec{x}_1 + \vec{y}_1) + \vec{z}_1, (\vec{x}_2 + \vec{y}_2) + \vec{z}_2, \cdots, (\vec{x}_2 + \vec{y}_2) + \vec{z}_2) =$$

$$(\vec{x}_1 + \vec{y}_1, \vec{x}_2 + \vec{y}_2, \cdots, \vec{x}_2 + \vec{y}_2) + (\vec{z}_1, \vec{z}_2, \cdots, \vec{z}_n) =$$

$$[(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) + (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n)] + (\vec{z}_1, \vec{z}_2, \cdots, \vec{z}_n) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

2. Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{0} := (\vec{0}_1, \vec{0}_2, \cdots, \vec{0}_n)$, όπου $\vec{0}_i$ είναι το μηδενικό διάνυσμα του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}_i$. Τότε χρησιμοποιώντας ότι το Αξίωμα **(ΔΧ3)** ισχύει στους διανυσματικούς χώρους $\mathcal{V}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, θα έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha + \vec{0} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) + (\vec{0}_1, \vec{0}_2, \cdots, \vec{0}_n) = (\vec{x}_1 + \vec{0}_1, \vec{x}_2 + \vec{0}_2, \cdots, \vec{x}_n + \vec{0}_n) =$$

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) = \alpha.$$

Παρόμοια $\vec{0}+\alpha=\alpha$. Άρα το διάνυσμα $\vec{0}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{V}$.

3. Θεωρούμε το διάνυσμα $-\alpha := (-\vec{x}_1, -\vec{x}_2, \cdots, -\vec{x}_n)$. Χρησιμοποιώντας ότι το Αξίωμα **(ΔΧ4)** ισχύει στους διανυσματικούς χώρους $\mathcal{V}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, θα έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha + (-\alpha) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) + (-\vec{x}_1, -\vec{x}_2, \cdots, -\vec{x}_n) =$$

$$(\vec{x}_1 + (-\vec{x}_1), \vec{x}_2 + (-\vec{x}_2), \cdots, \vec{x}_n + (-\vec{x}_n)) = (\vec{0}_1, \vec{0}_2, \cdots, \vec{0}_n) = \vec{0}.$$

Παρόμοια $(-\alpha)+\alpha = \vec{0}$. Άρα το διάνυσμα $-\alpha$ είναι το αντίθετο διάνυσμα του α.

4. Χρησιμοποιώντας ότι το Αξίωμα **(ΔΧ6)** ισχύει στους διανυσματικούς χώρους $\mathcal{V}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, θα έχουμε διαδοχικά:

$$k \cdot (\alpha + \beta) = k \cdot [(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) + (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n)] =$$

$$k\cdot(\vec{x}_1+\vec{y}_1, \vec{x}_2+\vec{y}_2, \cdots, \vec{x}_n+\vec{y}_n) = (k\cdot(\vec{x}_1+\vec{y}_1), k\cdot(\vec{x}_2+\vec{y}_2), \cdots, k\cdot(\vec{x}_n+\vec{y}_n)) =$$

$$(k\cdot\vec{x}_1 + k\cdot\vec{y}_1, k\cdot\vec{x}_2 + k\cdot\vec{y}_2, \cdots, k\cdot\vec{x}_n + k\cdot\vec{y}_n) =$$

$$(k\cdot\vec{x}_1, k\cdot\vec{x}_2, \cdots, k\cdot\vec{x}_n) + (k\cdot\vec{y}_1, k\cdot\vec{y}_2, \cdots, k\cdot\vec{y}_n) =$$

$$k\cdot(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) + k\cdot(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n) = k\cdot\alpha + k\cdot\beta.$$

5. Χρησιμοποιώντας ότι το Αξίωμα **(ΔΧ7)** ισχύει στους διανυσματικούς χώρους $\mathcal{V}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, θα έχουμε διαδοχικά:

$$k\cdot(l\cdot\alpha) = k\cdot[l\cdot(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)] = k\cdot(l\cdot\vec{x}_1, l\cdot\vec{x}_2, \cdots, l\cdot\vec{x}_n) =$$

$$(k\cdot(l\cdot\vec{x}_1), k\cdot(l\cdot\vec{x}_2), \cdots, k\cdot(l\cdot\vec{x}_n)) = (kl\cdot\vec{x}_1, kl\cdot\vec{x}_2, \cdots, kl\cdot\vec{x}_n) =$$

$$kl\cdot(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) = kl\cdot\alpha.$$

□

Παράδειγμα 2.2.5 *1. Διαλέγοντας $\mathcal{V}_i = \mathbb{K}$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$ στο Θεώρημα 2.2.1, έχουμε το παράδειγμα 2.2.2.*

2. Αν $\mathcal{V}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, τότε διαλέγοντας $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$ στο Θεώρημα 2.2.1, θα έχουμε ότι το καρτεσιανό γινόμενο $\mathcal{V}\times\mathcal{V}\times\cdots\times\mathcal{V}$ του $\mathcal{V}$ με τον εαυτό του n φορές, είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathcal{V}$.

3. Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$ πάνω από το $\mathbb{R}$ όπως στα Παράδείγματα 2.2.1 και 2.2.3. Τότε το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$.

Πρόχειρη Δοκιμασία

Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και έστω $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$ ένα υποσύνολο του. Υποθέτουμε ότι το $\mathbb{L}$ περιέχει τα $0, 1$, είναι κλειστό στην πράξη της πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού του $\mathbb{K}$, και ισχύει ότι $l^{-1} \in \mathbb{L}$, αν $l \in \mathbb{L} \setminus \{0\}$. Να δείξετε ότι περιορίζοντας τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού του $\mathbb{K}$ στο $\mathbb{L}$, το σύνολο $\mathbb{L}$ είναι ένα σώμα και το $\mathbb{K}$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{L}$.

Για παράδειγμα μπορούμε να διαλέξουμε σαν $\mathbb{L}$ το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών και σαν $\mathbb{K}$ είτε το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ή το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.

Δοθέντος ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$ πάνω από ένα σώμα $\mathbb{K}$, υπάρχουν δύο γενικές μέθοδοι κατασκευής νέων διανυσματικών χώρων. Η μία μέθοδος μας εφοδιάζει με νέους διανυσματικούς χώρους "επεκτείνοντας" με κάποιον τρόπο τον $\mathcal{V}$, και η άλλη μέθοδος μας εφοδιάζει με νέους διανυσματικούς χώρους οι οποίοι είναι υποσύνολα του $\mathcal{V}$. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι το Παράδειγμα 2.2.2 ανήκει στην πρώτη μέθοδο και η παραπάνω Πρόχειρη Δοκιμασία στην δεύτερη μέθοδο. Στην παρούσα ενότητα θα ασχοληθούμε κυρίως με την πρώτη μέθοδο. Η δεύτερη θα αναπτυχθεί στην επόμενη ενότητα.

2.2.1 Διανυσματικοί Χώροι Συναρτήσεων

Στην παρούσα υπο-ενότητα θα δούμε κάποια παραδείγματα διανυσματικών χώρων τα στοιχεία των οποίων (δηλαδή τα διανύσματα τους) είναι συναρτήσεις. Υπενθυμίζουμε ότι αν $f, g : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ είναι δύο συναρτήσεις μεταξύ δύο συνόλων $\mathcal{S}, \mathcal{T}$, τότε ισχύει εξ' ορισμού: $f = g$ αν και μόνον αν $f(s) = g(s)$, $\forall s \in \mathcal{S}$. Ξεκινάμε με ένα απλό παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.2.6 *Θεωρούμε το ακόλουθο σύνολο συναρτήσεων.*

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \eta\ f\ \textit{είναι συνάρτηση}\}$$

Χρησιμοποιώντας την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό αριθμών στο $\mathbb{R}$, ορίζουμε στο σύνολο $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ πράξη πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως εξής:

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (f + g)(x) := f(x) + g(x).$$

$$\forall r \in \mathbb{R},\ \forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad r \cdot f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (r \cdot f)(x) := rf(x).$$

Τότε η τριάδα $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$. Το μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ είναι η μηδενική συνάρτηση $\vec{\mathbf{0}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία ορίζεται ως εξής: $\vec{\mathbf{0}}(x) = 0$. Το αντίθετο διάνυσμα του διανύσματος $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ είναι η συνάρτηση $-f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία ορίζεται ως εξής: $(-f)(x) = -f(x)$.

Το Παράδειγμα 2.2.6 είναι ειδική περίπτωση ενός γενικότερου αποτελέσματος το οποίο θα συζητήσουμε τώρα.

Έστω S ένα τυχαίο σύνολο και $\mathcal{V} = (\mathcal{V}, +, \cdot)$ ένας διανυσματικός χώρος πάνω από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Θεωρούμε το σύνολο των συναρτήσεων από το σύνολο S στον διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{F}(S, \mathcal{V}) := \{f : S \to \mathcal{V} \mid \text{η } f \text{ είναι συνάρτηση}\}$$

Στο σύνολο $\mathcal{F}(S, \mathcal{V})$ ορίζουμε μια πράξη πρόσθεσης ως εξής:

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(S, \mathcal{V}), \quad f + g : S \to \mathcal{V}, \ s \mapsto (f + g)(s) := f(s) + g(s) \tag{2.1}$$

Επίσης ορίζουμε μια πράξη βαθμωτού πολλαπλασιασμού του σώματος $\mathbb{K}$ στο σύνολο $\mathcal{F}(S, \mathcal{V})$ ως εξής:

$$\forall k \in \mathbb{K}, \ \forall f \in \mathcal{F}(S, \mathcal{V}), \quad k \cdot f : S \to \mathcal{V}, \ s \mapsto (k \cdot f)(s) := k \cdot f(s). \tag{2.2}$$

Εδώ θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί. Στην σχέση $(f + g)(s) = f(s) + g(s)$ το σύμβολο $+$ στην αριστερή πλευρά συμβολίζει την νέα πράξη πρόσθεσης στο σύνολο $\mathcal{F}(S, \mathcal{V})$, και το σύμβολο $+$ στην δεξιά πλευρά συμβολίζει την πράξη πρόσθεσης στον διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}$. Παρόμοια στην σχέση $(k \cdot f)(s) = k \cdot f(s)$ το σύμβολο $\cdot$ στην αριστερή πλευρά συμβολίζει την νέα πράξη βαθμωτού πολλαπλασιασμού στο σύνολο $\mathcal{F}(S, \mathcal{V})$, και το σύμβολο $\cdot$ στην δεξιά πλευρά συμβολίζει την πράξη βαθμωτού πολλαπλασιασμού στον διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}$. Δεν εισάγουμε νέα σύμβολα για τις νέες πράξεις (α) για να μην βαρύνουμε τον συμβολισμό μας, και (β) θα είναι πάντοτε φανερό από τα συμφραζόμενα για ποια πράξη πρόκειται.

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε τώρα το ακόλουθο γενικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.2.2 *Έστω S ένα τυχαίο σύνολο και $\mathcal{V} = (\mathcal{V}, +, \cdot)$ ένας διανυσματικός χώρος πάνω από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Τότε με τις παραπάνω πράξεις 2.1 και 2.2 το σύνολο $\mathcal{F}(S, \mathcal{V})$ όλων των συναρτήσεων από το S στον $\mathcal{V}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$. Το μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{F}(S, \mathcal{V})$ είναι η συνάρτηση $\vec{\mathbf{0}} : S \to \mathcal{V}, \ s \mapsto \vec{\mathbf{0}}(x) = \vec{0}$ και το αντίθετο διάνυσμα του $f \in \mathcal{F}(S, \mathcal{V})$ είναι η συνάρτηση $-f : S \to \mathcal{V}, \ s \mapsto (-f)(s) = -f(\vec{s})$.*

Απόδειξη: Λαμβάνοντας υπ' όψιν το πως ορίσθηκαν οι πράξεις στο σύνολο $\mathcal{F}(S, \mathcal{V})$, η ιδέα της απόδειξης βασίζεται στο ότι τα Αξιώματα **(ΔΧ1)**, ..., **(ΔΧ8)** ισχύουν στον διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}$.

Έστω $f, g, h : S \to \mathcal{V}$ τρείς τυχούσες συναρτήσεις, και έστω $k, l \in \mathbb{K}$.

1. Ισχύει $f+(g+h)=(f+g)+h$ αν-ν για κάθε $x \in S$ έχουμε $[f+(g+h)](x)=[(f+g)h](x)$. Όμως $[f+(g+h)](x)=f(x)+(g+h)(x)=f(x)+[g(x)+h(x)]$. Χρησιμοποιώντας ότι το Αξίωμα **(ΔΧ1)** ισχύει στον $\mathcal{V}$, το δεύτερο μέλος της τελευταία σχέσης είναι ίσο με $[f(x)+g(x)]+h(x)=(f+g)(x)+h(x)=[(f+g)+h](x)$. Επομένως $[f+(g+h)](x)=[(f+g)+h](x)$. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $x \in \mathcal{V}$, έπεται ότι $f+(g+h)=(f+g)+h$.

2. Η απόδειξη της σχέσης $f+g=g+f$ είναι παρόμοια με την αποδειξη της 1.

3. Θεωρούμε την συνάρτηση $\vec{\mathbf{0}}: S \to \mathcal{V}$, με $\vec{\mathbf{0}}(x)=\vec{0}$. Τότε για κάθε $x \in S$, έχουμε $(f+\vec{\mathbf{0}})(x)=f(x)+\vec{\mathbf{0}}(x)=f(x)+\vec{0}$. Επειδή $f(x) \in \mathcal{V}$, από το Αξίωμα **(ΔΧ3)** για τον $\mathcal{V}$, θα έχουμε $f(x)+\vec{0}=f(x)$. Επομένως $(f+\vec{\mathbf{0}})(x)=f(x), \forall x \in S$, το οποίο σημαίνει ότι $f+\vec{\mathbf{0}}=f$. Παρόμοια $\vec{\mathbf{0}}+f=f$.

4. Θεωρούμε την συνάρτηση $-f : S \to \mathcal{V}$ η οποία ορίζεται ως εξής: $(-f)(x) := -f(x)$. Τότε $[f+(-f)](x)=f(x)+(-f)(x)=f(x)-f(x)=\vec{0}=\vec{\mathbf{0}}(x)$. Έπομένως $f+(-f)=\vec{\mathbf{0}}$ και παρόμοια αποδεικνύεται ότι $(-f)+f=\vec{\mathbf{0}}$.

5. Ισχύει $(k+l)\cdot f=k\cdot f+l\cdot f$ αν-ν για κάθε $x \in S$ έχουμε $[(k+l)\cdot f](x)=(k\cdot f+l\cdot f)(x)$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού στο σύνολο $\mathcal{F}(S,\mathcal{V})$ και την ισχύ του Αξιώματος **(ΔΧ5)** στον $\mathcal{V}$, έχουμε: $[(k+l)\cdot f](x)=(k+l)\cdot f(x)=k\cdot f(x)+l\cdot f(x)=(k\cdot f)(x)+(l\cdot f)(x)=(k\cdot f+l\cdot f)(x)$. Επομένως $(k+l)\cdot f=k\cdot f+l\cdot f$.

6. Η απόδειξη της σχέσης $k\cdot(f+g)=k\cdot f+k\cdot g$ είναι παρόμοια με την απόδειξη της 5.

7. Ισχύει $k\cdot(l\cdot f)=(kl)\cdot f$ αν-ν για κάθε $x \in S$ έχουμε: $[k\cdot(l\cdot f)](x)=[(kl)\cdot f](x)$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του βαθμωτού πολλαπλασιασμού στο σύνολο $\mathcal{F}(S,\mathcal{V})$ και την ισχύ του Αξιώματος **(ΔΧ7)** στον $\mathcal{V}$, έχουμε: $[k\cdot(l\cdot f)](x)=k\cdot[(l\cdot f)(x)]=k\cdot[l\cdot f(x)]=(kl)\cdot f(x)=[(kl)\cdot f](x)$. Επομένως ισχύει η σχέση $k\cdot(l\cdot f)=(kl)\cdot f$.

8. Ισχύει $1\cdot f=f$ αν-ν για κάθε $x \in S$ έχουμε: $(1\cdot f)(x)=f(x)$. Επειδή το Αξίωμα **(ΔΧ8)** ισχύει στον $\mathcal{V}$, θα έχουμε: $(1\cdot f)(x)=1\cdot f(x)=f(x)$. Άρα $1\cdot f=f$.

□

Έτσι θέτοντας στο Θεώρημα 2.2.2, $S = [0, 2\pi]$ ή $S = [0, 1]$ και $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, αντίστοιχα $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, έπεται ότι τα σύνολα $\mathcal{F}([0, 2\pi], \mathbb{R})$, $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$, αντίστοιχα $\mathcal{F}([0, 2\pi], \mathbb{C})$ και $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{C})$, είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το $\mathbb{R}$, αντίστοιχα πάνω από το $\mathbb{C}$.

2.2.2 Ο Χώρος των Ακολουθιών

Μια σημαντική ειδική περίπτωση του Θεώρηματος 2.2.2 αποτελεί ο διανυσματικός χώρος των ακολουθιών με στοιχεία απο ένα σώμα $\mathbb{K}$, που θα συζητήσουμε τώρα.

Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n, n+1, \cdots\}$ των φυσικών αριθμών μαζί με το 0, και έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα.

Ορισμός 2.2.3 *Μια* **ακολουθία** *με στοιχεία στο σώμα* $\mathbb{K}$ *είναι μια συνάρτηση*

$$\alpha : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{K}$$

Έστω $\mathbb{A}(\mathbb{K})$ το σύνολο των ακολουθιών με στοιχεία στο σώμα $\mathbb{K}$. Αν $\alpha \in \mathbb{A}(\mathbb{K})$, τότε συμβολίζουμε την τιμή $\alpha(n)$ της συνάρτησης $\alpha : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{K}$ στον φυσικό αριθμό n με $\alpha(n) := \alpha_n$. Επειδή η συνάρτηση α καθορίζεται πλήρως από τις τιμές της, έπεται ότι η α καθορίζεται πλήρως από τα στοιχεία $\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n, \cdots\}$. Έτσι θα συμβολίζουμε μια ακολουθία με στοιχεία στο σώμα $\mathbb{K}$ και ως εξής: $(\alpha_n)_{n\geq 0}$. Τα στοιχεία α_n, $n \geq 0$, καλούνται **όροι της ακολουθίας**.

Πόρισμα 2.2.4 *Το σύνολο* $\mathbb{A}(\mathbb{K})$ *των ακολουθιών με στοιχεία από ένα σώμα* $\mathbb{K}$ *αποτελεί διανυσματικό χώρο πάνω από το* $\mathbb{K}$ *με τις ακόλουθες πράξεις:*

1. *Πρόσθεση:* *Αν* $(\alpha_n)_{n\geq 0}, (\beta_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{A}(\mathbb{K})$, *τότε:*

$$(\alpha_n)_{n\geq 0} + (\beta_n)_{n\geq 0} := (\gamma_n)_{n\geq 0}, \quad \text{όπου} \quad \gamma_n := \alpha_n + \beta_n, \ \forall n \geq 0.$$

2. *Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός:* *Αν* $(\alpha_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{A}(\mathbb{K})$ *και* $k \in \mathbb{K}$, *τότε:*

$$k \cdot (\alpha_n)_{n\geq 0} := (\delta_n)_{n\geq 0} \quad \text{όπου} \quad \delta_n := k\alpha_n, \ \forall n \geq 0.$$

Απόδειξη: Θέτοντας $S = \mathbb{N}_0$ και $\mathcal{V} = \mathbb{K}$ στο Θεώρημα 2.2.2, παρατηρούμε ότι $\mathbb{A}(\mathbb{K}) = \mathcal{F}(S, \mathbb{K})$. Επίσης η πρόσθεση $(\alpha_n)_{n\geq 0} + (\beta_n)_{n\geq 0}$ των ακολουθιών $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, $(\beta_n)_{n\geq 0}$ συμπίπτει με την πρόσθεση $\alpha + \beta$ των συναρτήσεων $n \mapsto \alpha(n) = \alpha_n$ και $n \mapsto \beta(n) = \beta_n$. Παρόμοια ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός

$k \cdot (\alpha_n)_{n\geq 0}$ συμπιπτει με τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό $k \cdot \alpha$ της συνάρτησης $n \mapsto \alpha(n) = \alpha_n$ με το k. Επειδή, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.2, με τις παραπάνω πράξεις το σύνολο $\mathcal{F}(S, \mathbb{K})$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$, έπεται ότι και το σύνολο $\mathbb{A}(\mathbb{K})$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$. $\square$

2.3 Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

Θα δούμε τώρα δύο πολύ σπουδαίες ειδικές περιπτώσεις του Θεώρηματος 2.2.2 ή εναλλακτικά του Πορίσματος 2.2.4.

2.3.1 Ο Χώρος των Πινάκων

Από τώρα και στο εξής συμβολίζουμε με $\mathbb{N}_n := \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ το σύνολο των n πρώτων φυσικών αριθμών. Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα.

Ορισμός 2.3.1 *Ένας $m \times n$-**πίνακας** με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$ είναι μια συνάρτηση*

$$A : \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n \to \mathbb{K}, \quad A(i, j) := \alpha_{ij}.$$

Έτσι σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό ένας πίνακας A, δηλαδή μιά συνάρτηση $A : \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n \to \mathbb{K}$, καθορίζεται από τις τιμές της οι οποίες είναι οι mn το πλήθος αριθμοί $\{a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, \cdots, \cdots, a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}\}$ από το σώμα $\mathbb{K}$. Χάριν ευκολίας και για καλύτερη εποπτεία, συνήθως τις τιμές αυτές τις τοποθετούμε σε μια ορθογώνια διάταξη όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Έτσι μπορούμε να πούμε ότι ένας $m \times n$-πίνακας πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$ είναι μια διάταξη mn αριθμών από το σώμα $\mathbb{K}$ τους οποίους έχουμε διατάξει και παραστήσει όπως παραπάνω. Δηλαδή ταυτίζουμε το στοιχείο a_{ij} της διάταξης με την τιμή της απεικόνισης A στο στοιχείο $(i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$. Η τιμή a_{ij} καλείται **το στοιχείο του πίνακα A στην (i, j)-θέση**. Χάριν συντομίας συνήθως έναν $m \times n$-πίνακα A τον συμβολίζουμε ως εξής: $A = (a_{ij})$, όπου $i = 1, 2, \cdots, m$ και $j = 1, 2, \cdots, n$.

Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από τό σώμα $\mathbb{K}$.

Στήλες Για κάθε $j = 1, 2, \cdots, n$, η j-**στήλη** του πίνακα A είναι η ακόλουθη διάταξη m αριθμών:

$$A^j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Έτσι μπορούμε να πούμε ότι ο $m \times n$ πίνακας A αποτελείται από n στήλες $A^1, A^2, \cdots, A^n$ κάθε μία από τις οποίες αποτελείται απο m αριθμούς.

Γραμμές Για κάθε $i = 1, 2, \cdots, m$, η j-**γραμμή** του πίνακα A είναι η ακόλουθη διάταξη m αριθμών:

$$A_i := \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \end{pmatrix}$$

Έτσι μπορούμε να πούμε ότι ο $m \times n$ πίνακας A αποτελείται από m γραμμες $A_1, A_2, \cdots, A_m$ κάθε μία από τις οποίες αποτελείται απο n αριθμούς.

Παρατηρούμε ότι το στοιχείο a_{ij} του πίνακα A βρίσκεται στην “τομή” της i-γραμμής με την j-στήλη.

Συμβολίζουμε με $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ το σύνολο των $m \times n$-πινάκων με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) = \big\{ A = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{K}, \ \forall i = 1, 2, \cdots m, \ \forall j = 1, 2, \cdots, n \big\}$$

Για παράδειγμα έστω οι πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ -4 & 8 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} i & \sqrt{2} \\ -1 & 1+2i \end{pmatrix}$$

Τότε $A \in \mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$, $C \in \mathbb{M}_{1\times 3}(\mathbb{R})$, $D \in \mathbb{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$, και $E \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

Στο σύνολο $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ των $m \times n$-πινάκων με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$ ορίζουμε πράξη πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως εξής:

1. Πρόσθεση: Αν $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, τότε $A + B$ είναι ο $m \times n$-πίνακας $(a_{ij} + b_{ij})$. Σχηματικά:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{ij} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{2j}+b_{2j} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{ij}+b_{ij} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mj}+b_{mj} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός: Αν $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, και $k \in \mathbb{K}$, τότε $k \cdot A$ είναι ο $m \times n$-πίνακας (ka_{ij}). Σχηματικά:

$$k\cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{ij} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mj} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Όπως και στην περίπτωση των χώρων συναρτήσεων, παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε τους $m \times n$-πίνακες ως συναρτήσεις : $\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n \to \mathbb{K}$, τότε η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός που ορίσαμε παραπάνω συμπίπτει με την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό συναρτήσεων. Με βάση αυτή την παρατήρηση το ακόλουθο πόρισμα είναι άμεση απόρροια του θεωρήματος 2.2.2.

Πόρισμα 2.3.2 *Το σύνολο $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ των $m \times n$-πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$ εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού, είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$. Το μηδενικό* *διάνυσμα του $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ είναι ο $m \times n$-πίνακας $\mathbf{0}$ όλα τα στοιχεία του οποίου είναι ίσα με 0:*

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Το αντίθετο διάνυσμα του $m \times n$-πίνακα $A = (a_{ij})$ είναι ο $m \times n$-πίνακας $-A = (-a_{ij})$:

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1j} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2j} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{ij} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mj} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Απόδειξη: Θέτουμε $S = \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$ και $\mathcal{V} = \mathbb{K}$ στο Θεώρημα 2.2.2, και εργαζόμαστε όπως στο Πόρισμα 2.2.4. □

Ο πίνακας $\mathbf{0}$ καλείται ο **μηδενικός** $m \times n$ πίνακας, και αν $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, τότε ο πίνακας $-A = (-a_{ij})$ καλείται ο **αντίθετος** πίνακας του A.

Ένας $m \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ καλείται **τετραγωνικός** αν $m = n$. Σπουδαίες κλάσεις τετραγωνικών πινάκων αποτελούν οι διαγώνιοι και οι βαθμωτοί πίνακες.

Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ καλείται **διαγώνιος** αν $a_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$. Δηλαδή αν ο A είναι της μορφής:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Για παράδειγμα ο **μοναδιαίος** $n \times n$ πίνακας

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

είναι διαγώνιος. Γενικά ένας διαγώνιος πίνακας A καλείται **βαθμωτός** αν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του μοναδιαίου: $A = kI_n$, δηλαδή αν είναι της μορφής:

$$A = kI_n = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}.$$

Θα μελετήσουμε διεξοδικότερα τον χώρο των πινάκων και τον ρόλο που διαδραματίζουν στην Γραμμική Άλγεβρα σε επόμενο Κεφάλαιο.

2.3.2 Ο Χώρος των Πολυωνύμων

Έστω $\mathbb{A}(\mathbb{K})$ ο διανυσματικός χώρος των ακολουθιών με στοιχεία αριθμούς από ένα σώμα $\mathbb{K}$ όπως αυτός ορίσθηκε στην υποενότητα 2.2.2. Θεωρούμε το υποσύνολο του $\mathbb{S}(\mathbb{K})$ το οποίο αποτελείται από όλες τις ακολουθίες $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{A}(\mathbb{K})$ οι οποίες έχουν πεπερασμένο πλήθος από μη-μηδενικούς όρους. Δηλαδή:

$$\mathbb{K}[t] := \big\{(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{A}(\mathbb{K}) \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : \ a_n = 0, \ \forall n > k\big\}. \tag{2.3}$$

Ορισμός 2.3.3 *Μία ακολουθία $(a_n)_{n\geq 0}$ στοιχείων του σώματος $\mathbb{K}$ η οποία έχει πεπερασμένο πλήθος από μη-μηδενικούς όρους, δηλαδή ανήκει στο υποσύνολο $\mathbb{K}[t]$ του $\mathbb{A}(\mathbb{K})$, καλείται* **πολυώνυμο** *πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$. Τα μη-μηδενικα στοιχεία της ακολουθίας καλούνται* **συντελεστές** *του πολυωνύμου.*

Οι ακολουθίες-πολυώνυμα που θα ορίσουμε τώρα διαδραματίζουν σπουδαίο ρόλο στην θεωρία πολυωνύμων.

Ορισμός 2.3.4 *1. Η ακολουθία $(a_n)_{n\geq 0}$ με $a_0 = 1$ και $a_n = 0$, $\forall n \neq 0$, η οποία προφανώς ανήκει στο $\mathbb{K}[t]$, συμβολίζεται με t^0 και καλείται* **μοναδιαίο πολυώνυμο**. *Δηλαδή το t^0 είναι το πολυώνυμο:*

$$t^0 := (1, 0, 0, 0, \cdots, 0, \cdots) \ \in \mathbb{K}[t]$$

2. Η ακολουθία $(a_n)_{n\geq 0}$ με $a_1 = 1$ και $a_n = 0$, $\forall n \neq 1$, η οποία προφανώς ανήκει στο $\mathbb{K}[t]$, θα συμβολίζεται με t και καλείται **μεταβλητή** *ή* **απροσδιόριστη**. *Δηλαδή η t είναι το πολυώνυμο:*

$$t := (0, 1, 0, 0, \cdots, 0, \cdots) \ \in \mathbb{K}[t]$$

*3. Αν $m \geq 1$, η m-***οστή δύναμη** *t^m της μεταβλητής t ορίζεται να είναι το πολυώνυμο $(a_n)_{n\geq 0}$ με $a_m = 1$ και $a_n = 0$, $\forall n \neq m$. Δηλαδή:*

$$t^m := (0, 0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots) \ \in \mathbb{K}[t]$$

όπου το 1 εμφανίζεται σαν ο όρος της ακολουθίας στην $m + 1$ θέση.

Είναι φανερό ότι αν δύο ακολουθίες $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ ανήκουν στο υποσύνολο $\mathbb{K}[t]$, δηλαδή είναι πολυώνυμα, τότε και το άθροισμα τους $(a_n)_{n\geq 0} + (b_n)_{n\geq 0}$ ανήκει στο $\mathbb{K}[t]$, και άρα είναι πολυώνυμο. Πραγματικά αν $a_n = 0, \forall n > k$ και $b_n = 0, \forall n > l$, τότε $a_n + b_n = 0, \forall n > \max\{k, l\}$. Παρόμοια αν η ακολουθία $(a_n)_{n\geq 0}$ ανήκει στο υποσύνολο $\mathbb{K}[t]$ και $k \in \mathbb{K}$ είναι ένα στοιχείο του $\mathbb{K}$, τότε και η ακολουθία $k \cdot (a_n)_{n\geq 0} = (ka_n)_{n\geq 0}$ ανήκει στο $\mathbb{K}[t]$. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού στο υποσύνολο $\mathbb{K}[t]$, περιορίζοντας τις πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού του διανυσματικού χώρου $\mathbb{A}(\mathbb{K})$ στο υποσύνολο του $\mathbb{K}[t]$:

$$\forall (a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0} \ \in \mathbb{K}[t] : \quad (a_n)_{n\geq 0} + (b_n)_{n\geq 0} := (a_n + b_n)_{n\geq 0} \ \in \mathbb{K}[t] \tag{2.4}$$

$$\forall (a_n)_{n\geq 0}, \ \forall k \in \mathbb{K} : \quad k \cdot (a_n)_{n\geq 0} := (ka_n)_{n\geq 0} \ \in \mathbb{K}[t]. \tag{2.5}$$

Χρησιμοποιώντας ότι το σύνολο $\mathbb{A}(\mathbb{K})$ είναι διανυσματικός χώρος, είναι εύκολο να δούμε ότι το σύνολο $\mathbb{K}[t]$ εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις 2.4, 2.5 είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$. Ό διανυσματικός χώρος $\mathbb{K}[t]$ καλείται **ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων με συντελεστές από το σώμα** $\mathbb{K}$. Προφανώς το μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{K}[t]$ είναι το πολυώνυμο $(a_n)_{n\geq 0}$ με $a_n = 0$, $\forall n \geq 0$ το οποίο καλείται **μηδενικό πολυώνυμο**. Το αντίθετο διάνυσμα του πολυωνύμου $(a_n)_{n\geq 0}$ είναι το πολυώνυμο $(-a_n)_{n\geq 0}$.

Συμβολισμός 2.3.1 *Από τώρα και στο εξής το μοναδιαίο πολυώνυμο, δηλαδή το πολυώνυμο* $t^0 := (1, 0, 0, \cdots,)$ *θα το συμβολίζουμε απλά με* 1. *Το μηδενικό πολυώνυμο θα το συμβολίζουμε απλά με* 0.

Παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο $(k, 0, 0, \cdots)$ είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του μοναδιαίου πολυωνυμου: $(k, 0, 0, \cdots) = k \cdot (1, 0, 0, \cdots) = k \cdot 1$. Ένα πολυώνυμο καλείται **σταθερό** αν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του μοναδιαίου, δηλαδή είναι της μορφής $(k, 0, 0, \cdots)$, όπου $k \in \mathbb{K}$.

Το γεγονός ότι για ένα πολυώνυμο $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{K}[t]$ υπάρχει ενας αριθμός $m \in \mathbb{N}_0$ έτσι ώστε $a_n = 0$, $\forall n > m$, μας επιτρέπει να ορίσουμε την έννοια του βαθμού ενός πολυωνύμου.

Ορισμός 2.3.5 *Έστω* $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{K}[t]$ *ένα μη-μηδενικό πολυώνυμο με συντελεστές από το σώμα* $\mathbb{K}$. *Ο* ***βαθμός*** *του* $(a_n)_{n\geq 0}$ *ορίζεται να είναι ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός* n *για τον οποίο ισχύει* $a_n \neq 0$ *και συμβολίζεται με* $\deg(a_n)_{n\geq 0}$. *Δηλαδή:*

$$\deg(a_n)_{n\geq 0} = \max\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$$

Στο μηδενικό πολυώνυμο δεν επισυνάπτουμε βαθμό.

Παράδειγμα 2.3.2

1. *Το πολυώνυμο* t^n *έχει βαθμό* n: $\deg t^n = n$.
2. *Το πολυώνυμο* $(k, 0, 0, \cdots)$, *όπου* $k \in \mathbb{K}$, *έχει βαθμό* 0.
3. *Αν* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *το πολυώνυμο* $(1, 0, 4, \sqrt{2}, 3, 0, 0, \cdots)$, *έχει βαθμό* 4.

Σχόλιο 2.3.3 *Μπορούμε να ορίσουμε και μια άλλη εσωτερική πράξη στον διανυσματικό χώρο* $\mathbb{K}[t]$ *η οποία είναι γνωστή ως* ***πολλαπλασιασμός*** *ή* ***γινόμενο πολυωνύμων***. *Πραγματικά έστω* $(a_n)_{n\geq 0}$ *και* $(b_n)_{n\geq 0}$ *δύο πολυώνυμα με συντελεστές από το σώμα* $\mathbb{K}$. *Το γινόμενο τους* $(a_n)_{n\geq 0} \cdot (b_n)_{n\geq 0}$ *ορίζεται να είναι η ακολουθία*

$$(c_n)_{n\geq 0} \quad \text{όπου} \quad c_n := \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

Περισσότερο αναλυτικά:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0 \\ c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 \\ c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\ &\vdots \\ c_n &= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Η ακολουθία $(c_n)_{n\geq 0} = (a_n)_{n\geq 0} \cdot (b_n)_{n\geq 0}$ είναι πολυώνυμο. Πραγματικά αν $a_n = 0$, $\forall n > k$ και $b_n = 0$, $\forall n > l$, τότε όπως είναι φανερό από την τελευταία σχέση όλοι οι όροι της ακολουθίας $(c_n)_{n\geq 0}$ μηδενίζονται μετά τον όρο που βρίσκεται στην $k + l$ θέση.

Επίσης είναι εύκολο να δειχθεί ότι η m-οστή δύναμη t^m της μεταβλητής t δεν είναι παρά το γινόμενο της $t \cdot t \cdot t \cdot \cdots \cdot t$ m φορές. (Να το δείξετε σαν Άσκηση).

Ο συνηθισμένος συμβολισμός πολυωνύμων

Θα δούμε τώρα πως ο παραπάνω ορισμός πολυωνύμων οδηγεί στον συνηθισμένο (διαισθητικό) ορισμό και συμβολισμό πολυωνύμων.

Έστω $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{K}[t]$ ένα πολυώνυμο με συντελεστές από το σώμα $\mathbb{K}$. Τότε σύμφωνα με τον ορισμό 2.3.3, υπάρχει $m \geq 0$ έτσι ώστε $a_n = 0$, $\forall n > m$. Επομένως το πολυώνυμο $(a_n)_{n\geq 0}$ έχει την μορφή:

$$(a_n)_{n\geq 0} = (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}, a_m, 0, 0, \cdots),$$

Χρησιμοποιώντας την μεταβλητή t, και τον ορισμό της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}[t]$ μπορούμε να γράψουμε το πολυώνυμο $(a_n)_{n\geq 0}$ διαδοχικά ως εξής:

$$\begin{aligned}
(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}, a_m, 0, 0, \cdots) \quad = \quad & \ (a_0, 0, 0 \cdots) \\
& +\ (0, a_1, 0, \cdots) \\
& +\ (0, 0, a_2, 0, \cdots) \\
& \ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
& +\ (0, 0, \cdots, 0, a_{m-1}, 0, \cdots) \\
& +\ (0, 0, \cdots, 0, 0, a_m, 0, \cdots) \\
= \quad & \ a_0 \cdot (1, 0, 0, \cdots) \\
& +\ a_1 \cdot (0, 1, 0, \cdots) \\
& +\ a_2 \cdot (0, 0, 1, 0, \cdots) \\
& \ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
& +\ a_{m-1} \cdot (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots) \\
& +\ a_m \cdot (0, 0, \cdots, 0, 0, 1, 0, \cdots).
\end{aligned}$$

Επομένως θα έχουμε

$$(a_n)_{n\geq 0} = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \cdots + a_{m-1} \cdot t^{m-1} + a_m \cdot t^m \tag{2.6}$$

Η σχέση 2.6 δείχνει ότι ένα πολυώνυμο με συντελεστές από το σώμα $\mathbb{K}$ είναι μια τυπική έκφραση της μορφής $a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \cdots + a_{m-1} \cdot t^{m-1} + a_m \cdot t^m$ όπου τα a_i είναι αριθμοί από το σώμα $\mathbb{K}$ και m είναι κάποιος φυσικός αριθμός. Δηλαδή έχουμε την γνωστό μας διαισθητικό ορισμό και τρόπο γραφής πολυωνύμου. Η παραπάνω ανάλυση όμως είναι αναγκαία για τον μαθηματικά ακριβή ορισμό τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια. Χάριν απλότητας και ακολουθώντας το οικείο συμβολισμό, από τώρα και στο εξής ένα πολυώνυμο με συντελεστές από το σώμα $\mathbb{K}$ θα συμβολίζεται ώς εξής:

$$P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{m-1} t^{m-1} + a_m t^m \tag{2.7}$$

Δηλαδή θα παραλείπουμε το σύμβολο $\cdot$ του βαθμωτού πολλαπλασιασμού. Επιπρόσθετα το γινόμενο δύο πολυωνύμων $P(t)$ και $Q(t)$ θα συμβολίζεται με $P(t)Q(t)$.

Πρόχειρη Δοκιμασία

Να δείξετε ότι αν $P(t), Q(t) \in \mathbb{K}[t]$, τότε:

1. $\deg(P(t) + Q(t)) \leq \min\{\deg P(t), \deg Q(t)\}$.
2. $\deg P(t) = \deg(-P(t))$.
3. $\deg P(t) = 0$ αν-ν το $P(t)$ είναι ένα σταθερό μη-μηδενικό πολυώνυμο.
4. $\deg(P(t)Q(t)) = \deg P(t) + \deg Q(t)$.

2.4 Ασκήσεις

Άσκηση 2.4.1 *Έστω $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε νέες πράξεις ως εξής:*

- *Πρόσθεση: $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$: $x \oplus y := xy$ (ο συνηθισμένος πολλαπλασιασμός πραγματικών αριθμών).*
- *Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός: $\forall r \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+$: $r \oplus x := x^r$.*

Να δείξετε ότι με τις παραπάνω πράξεις, το σύνολο $\mathbb{R}_+$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$.

Άσκηση 2.4.2 *Εφοδιασμένα με τις συνηθισμένες πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού όπως αυτές ορίσθηκαν στους διανυσματικούς χώρους $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$, είναι τα παρακάτω σύνολα διανυσματικοί χώροι; Σε κάθε περίπτωση δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.*

1. $\mathcal{V}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0,\ y \in \mathbb{R}\}$.
   Σωστό $\boxed{\text{Λάθος}}$

2. $\mathcal{V}_2 = \{(x, 2x+1) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.
   Σωστό $\boxed{\text{Λάθος}}$

3. $\mathcal{V}_3 = \{(x, 2x) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.
   $\boxed{\text{Σωστό}}$ Λάθος

4. $\mathcal{V}_4 = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.
   $\boxed{\text{Σωστό}}$ Λάθος

5. $\mathcal{V}_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x, y \in \mathbb{R},\ \ z = 1\}$.
   Σωστό $\boxed{\text{Λάθος}}$

6. $\mathcal{V}_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = y = z\}$.
   $\boxed{\text{Σωστό}}$ Λάθος

7. $\mathcal{V}_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = x + y\}$.
   $\boxed{\text{Σωστό}}$ Λάθος

8. $\mathcal{V}_8 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, xy = 0\}$.
   Σωστό $\boxed{\text{Λάθος}}$

Άσκηση 2.4.3 *Να δείξετε ότι με τις συνηθισμένες πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού πινάκων, το σύνολο $\mathcal{V}$ όλων των 3×3 πινάκων πραγματικών αριθμών της μορφής:*

$$A = \begin{pmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$, είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$.

Κεφάλαιο 3

Διανυσματικοι Υποχωροι και Κατασκευες

Το παρόν Κεφάλαιο θα αφιερωθεί στην μελέτη των ιδιοτήτων διανυσματικών χώρων οι οποίες κληρονομούνται από υποσύνολά τους. Τα υποσύνολα αυτά, τα οποία καλούνται υπόχωροι, είναι επίσης διανυσματικοί χώροι με πράξεις τους περιορισμούς των πράξεων του διανυσματικού χώρου. Επίσης θα μελετήσουμε σημαντικές κατασκευές οι οποίες θα μας επιτρέψουν να παράγουμε νέους διανυσματικούς χώρους από ήδη γνωστούς.

3.1 Διανυσματικοί Υπόχωροι

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε κληρονομικές ιδιότητες διανυσματικών χώρων καθώς και μια άλλη μέθοδο με την οποία μπορούμε να παράγουμε νέους διανυσματικούς χώρους.

Συμβολισμός 3.1.1 *Καθ' όλη τη διάρκεια αυτής της ενότητας σταθεροποιούμε έναν διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}$ πάνω από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Οι πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού του $\mathcal{V}$, θα συμβολίζονται πάντα με $+$ και $\cdot$. Τέλος το μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{V}$ θα συμβολίζεται με $\vec{0}$.*

Χάριν ευκολίας όμως από τώρα και στό εξής θα παραλείπουμε το σύμβολο $\cdot$ του βαθμωτού πολλαπλασιασμού. Έτσι ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός του αριθμού $k \in \mathbb{K}$ με το διάνυσμα $\vec{x}$ θα συμβολίζεται με $k\vec{x}$. Δηλαδή: $k \cdot \vec{x} := k\vec{x}$.

Θα χρησιμοποιούμε τα αξιώματα και τις βασικές ιδιότητες διανυσματικών χώρων που αποδείξαμε στις προηγούμενες ενότητες χωρίς περαιτέρω αναφορά.

Έτσω $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ ένα μή-κενό υποσύνολο του $\mathcal{V}$, και έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{W}$ και $k \in \mathbb{K}$. Τότε δεν είναι απαραίτητο να ισχύει ότι το διάνυσμα $\vec{x} + \vec{y}$ ή το διάνυσμα $k\vec{x}$

ανήκει στο $\mathcal{W}$. Δηλαδή δεν είναι απαραίτητο το υποσύνολο $\mathcal{W}$ να είναι κλειστό στην πράξη της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού του $\mathcal{V}$.

Παράδειγμα 3.1.2 *Έστω $\mathbb{R}^2$ ο διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$ των 2-άδων πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$:*

$$\mathcal{W}_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}, \quad \mathcal{W}_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 \geq 0\}$$

Τότε είναι φανερό ότι τα διανύσματα $\vec{x} = (1, 0)$ και $\vec{y} = (0, 1)$ ανήκουν στον $\mathcal{W}_1$, αλλά το διάνυσμα $\vec{x} + \vec{y} = (1, 1)$ δεν ανήκει στο $\mathcal{W}_1$. Επίσης το διάνυσμα $\vec{z} = (1, 1)$ ανήκει στο $\mathcal{W}_2$, αλλά το διάνυσμα $-\vec{x} = (-1, -1)$ δεν ανήκει στο $\mathcal{W}_2$.

Μη-κενά υποσύνολα ένος διανυσματικού χώρου τα οποία είναι κλειστά στην πρόσθεση και στον βαθμωτό πολλαπλασιασμό, όπως θα δούμε, διαδραματίζουν σπουδαίο ρόλο στην θεωρία των διανυσματικών χώρων. Έτσι προκύπτει φυσιολογικά ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 3.1.1 *Έστω $\mathcal{W}$ ένα υποσύνολο του $\mathcal{V}$. Το $\mathcal{W}$ καλείται* **υπόχωρος** *του $\mathcal{V}$ αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες.*

1. $\mathcal{W} \neq \emptyset$.
2. *Το $\mathcal{W}$ είναι κλειστό στην πράξη της πρόσθεσης του $\mathcal{V}$. Δηλαδή:*
$$\boxed{\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{W}: \quad \vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{W}}$$
3. *Το $\mathcal{W}$ είναι κλειστό στην πράξη του βαθμωτού πολλαπλασιασμού του $\mathcal{V}$. Δηλαδή:*
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{K}, \ \forall \vec{x} \in \mathcal{W}: \quad k \cdot \vec{x} \in \mathcal{W}}$$

Πρίν περάσουμε να δούμε παραδείγματα υπόχωρων, θα αποδείξουμε κάποιες βασικές ιδιότητες που κληρονομούν από τους υπερκείμενους διανυσματικούς χώρους, και οι οποίες είναι σχετικά άμεσες συνέπειες του ορισμού 3.1.1.

Λήμμα 3.1.2 *Έστω $\mathcal{W}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$.*

1. $\vec{0} \in \mathcal{W}$. *Δηλαδή το μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{V}$ ανήκει στον $\mathcal{W}$.*
2. *Αν $\vec{x} \in \mathcal{W}$, τότε $-\vec{x} \in \mathcal{W}$. Δηλαδή ο $\mathcal{W}$ περιέχει το αντίθετο κάθε διανύσματος του.*

Απόδειξη: Επειδή το υποσύνολο $\mathcal{W}$ είναι μη-κενό, έπεται ότι υπάρχει $\vec{x} \in \mathcal{W}$. Τότε όμως και $0\vec{x} \in \mathcal{W}$ σύμφωνα με την συνθήκη 3. του ορισμού 3.1.1 . Επειδή $0\vec{x} = \vec{0}$, έχουμε $\vec{0} \in \mathcal{W}$. Αν τώρα $\vec{x} \in \mathcal{W}$, τότε παρόμοια $(-1)\vec{x} \in \mathcal{W}$. Έπειδή $(-1)\vec{x} = -\vec{x}$, έχουμε ότι $-\vec{x} \in \mathcal{W}$. □

Πρόχειρη Δοκιμασία

1. Να δείξετε ότι ένα μη κενό υποσύνολο $\mathcal{W}$ του $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V}$ αν-ν $k\vec{x} + l\vec{y} \in \mathcal{W}$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{W}$ και $\forall k, l \in \mathbb{K}$.

2. Τι μορφή έχουν οι υπόχωροι ενός σώματος $\mathbb{K}$ όταν το $\mathbb{K}$ θεωρηθεί σαν διανυσματικός χώρος πάνω από τον ευατό του;

Οι συνθήκες 2. και 3. του ορισμού 3.1.1 μας επιτρέπουν να περιορίσουμε τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού του $\mathcal{V}$ σε κάθε υπόχωρο $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. Έτσι ο $\mathcal{W}$ είναι εφοδιασμένος με μια πράξη πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού. Είναι εύλογο να αναρωτηθεί κανείς αν με αυτές τις πράξεις ο $\mathcal{W}$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$. Αυτό πράγματι συμβαίνει:

Λήμμα 3.1.3 *Έστω $\mathcal{W}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$. Τότε με τις πράξεις του $\mathcal{V}$ ο υπόχωρος $\mathcal{W}$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$. Το μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{W}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{W}$ και το αντίθετο ενός διανύσματος $\vec{x}$ του $\mathcal{W}$ είναι το αντίθετο του $\vec{x}$ όταν αυτό θεωρηθεί σαν διάνυσμα του $\mathcal{V}$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση σημειώνοντας ότι είναι άμεση συνέπεια του ορισμού 3.1.1 και του Λήμματος 3.1.2. □

Δοθέντος του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$, τίθεται το ερώτημα αν υπάρχουν πάντοτε υπόχωροι του $\mathcal{V}$, και αν η απάντηση είναι ναι πως μπορούμε να βρούμε υπόχωρους του $\mathcal{V}$; Μια πρώτη απάντηση δίνεται από την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.1.4 *1. Όλος ο χώρος $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V}$.*

2. Το σύνολο $\{\vec{0}\}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V}$.

3. Για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{V}$, το υποσύνολο $\langle \vec{x} \rangle := \{k\vec{x} \in \mathcal{V} \mid k \in \mathbb{K}\}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$.

Απόδειξη: 1., 2. Η απόδειξη είναι προφανής καθώς οι συνθήκες του ορισμού 3.1.1 ικανοποιούνται κατά τετριμμένο τρόπο.

3. Κατ' αρχήν το σύνολο $\langle \vec{x} \rangle$ δεν είναι κενό διότι περιέχει το μηδενικό διάνυσμα: $\vec{0} = 0\vec{x} \in \langle \vec{x} \rangle$. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \langle \vec{x} \rangle$, τότε υπάρχουν $k, l \in \mathbb{K}$, έτσι ώστε:

$\vec{\alpha} = k\vec{x}$ και $\vec{\beta} = l\vec{x}$. Τότε $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = k\vec{x} + l\vec{x} = (k+l)\vec{x} \in \langle\vec{x}\rangle$. Τέλος αν $\vec{\alpha} = k\vec{x} \in \langle\vec{x}\rangle$, και $r \in \mathbb{K}$, τότε θα έχουμε: $r\vec{\alpha} = r(k\vec{x}) = (rk)\vec{x} \in \langle\vec{x}\rangle$. □

Σχόλιο 3.1.3 *Ο υπόχωρος $\{\vec{0}\}$ καλείται ο* **μηδενικός υπόχωρος** *του $\mathcal{V}$. Ο υπόχωρος $\{\vec{0}\}$ καλείται και* **τετριμμένος υπόχωρος** *του $\mathcal{V}$. Ένας υπόχωρος $\mathcal{W}$ του $\mathcal{V}$ καλείται* **γνήσιος υπόχωρος**, *αν δεν συμπίπτει με τον $\mathcal{V}$: $\mathcal{W} \subsetneqq \mathcal{V}$.*

Παράδειγμα 3.1.4 *Στο παράδειγμα αυτό θα περιγράψουμε όλους τους υπόχωρους του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$ πάνω από το $\mathbb{R}$.*

Έστω $\mathcal{W}$ ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ με $\mathcal{W} \neq \{\vec{0}\}$. Τότε υπάρχει ένα διάνυσμα $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathcal{W}$ με $(x_1, x_2) \neq (0,0)$. Τότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1.1, $r\vec{x} \in \mathcal{W}$, $\forall r \in \mathbb{R}$. Τότε θέτοντας, όπως και στην Πρόταση 3.1.4, $\langle\vec{x}\rangle := \{r\vec{x} \mid r \in \mathbb{R}\}$, έπεται ότι $\langle\vec{x}\rangle \subseteq \mathcal{W}$. Γεωμετρικά το σύνολο $\langle\vec{x}\rangle$ είναι μιά ευθεία στο καρτεσιανό επίπεδο $\mathbb{R}^2$ η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων $\vec{0} = (0,0)$. Υποθέτουμε ότι $\langle\vec{x}\rangle \neq \mathcal{W}$. Τότε υπάρχει ένα διάνυσμα $\vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathcal{W}$ με $\vec{y} \notin \langle\vec{x}\rangle$. Ισχυριζόμαστε ότι ισχύει:

$$x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0 \qquad (*)$$

*Πραγματικά υποθέτουμε ότι $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ και θα οδηγηθούμε σε άτοπο. Επειδή το διάνυσμα $\vec{x} = (x_1, x_2) \neq (0,0)$, έπεται ότι είτε $x_1 \neq 0$ ή $x_2 \neq 0$. Αν ισχύει $x_1 \neq 0$, τότε επειδή δεχθήκαμε ότι $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$, θα έχουμε $y_2 = \frac{y_1}{x_1}x_2$ και επομένως $\vec{y} = (y_1, y_2) = \frac{y_1}{x_1}(x_1, x_2) \in \langle\vec{x}\rangle$ το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση μας. Αν ισχύει $x_2 \neq 0$, τότε εργαζόμενοι παρόμοια θα έχουμε $\vec{y} = (y_1, y_2) = \frac{y_2}{x_2}(x_1, x_2) \in \langle\vec{x}\rangle$ το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση. Επομένως η σχέση $(*)$ ισχύει. Θα δείξουμε τώρα ότι η σχέση $(*)$ έχει σαν συνέπεια ότι $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$. Πραγματικά: έστω $\vec{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ ένα τυχόν διάνυσμα. Τότε εύκολα μπορούμε να δούμε ότι ισχύει η σχέση (*ΝΑ ΤΟ ΔΕΙΞΕΤΕ ΣΑΝ ΑΣΚΗΣΗ*):*

$$\vec{z} = (z_1, z_2) = k\vec{x} + l\vec{y} = k(x_1, x_2) + l(y_1, y_2), \qquad (**)$$

$$\text{όπου:} \quad k = \frac{z_1y_2 - z_2y_1}{x_1y_2 - x_2y_1} \qquad \text{και} \qquad l = \frac{x_1z_2 - x_2z_1}{x_1y_2 - x_2y_1}$$

Επειδή $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{W}$ και ο $\mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$, από τον Ορισμό 3.1.1 έπεται ότι (δες και την Πρόχειρη Δοκιμασία 3.1): $\vec{z} = k\vec{x} + l\vec{y} \in \mathcal{W}$. Επομένως το τυχόν διάνυσμα $\vec{z}$ του $\mathbb{R}^2$ ανήκει στο υποσύνολο $\mathcal{W}$ και άρα $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$. Σ' αυτό το συμπέρασμα καταλήξαμε υποθέτοντας ότι $\langle\vec{x}\rangle \neq \mathcal{W}$. Επομένως είτε $\mathcal{W} = \{\vec{0}\}$, ή $\mathcal{W} = \langle\vec{x}\rangle$ ή $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$. Αντίστροφα από την Πρόταση 3.1.4 έχουμε ότι τα σύνολα $\{\vec{0}\}, \mathbb{R}^2$ και τα σύνολα της μορφής $\langle\vec{x}\rangle$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$. Συνοψίζοντας:

$$\boxed{\mathcal{W} \text{ είναι υπόχωρος του } \mathbb{R}^2 \;\Leftrightarrow\; \mathcal{W} = \{\vec{0}\} \text{ ή } \mathcal{W} = \mathbb{R}^2 \text{ ή } \mathcal{W} = \langle\vec{x}\rangle, \text{ όπου } \vec{0} \neq \vec{x} \in \mathcal{W}}$$

Παράδειγμα 3.1.5 *Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ των συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ καλείται* **άρτια** *αν $f(-x)=f(x)$ και* **περιττή** *αν $f(-x)=-f(x)$.*

Τότε το σύνολο $\mathcal{F}_A(\mathbb{R},\mathbb{R})$ των άρτιων και το σύνολο $\mathcal{F}_\Pi(\mathbb{R},\mathbb{R})$ των περιττών συναρτήσεων είναι υπόχωροι του $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Θα δούμε τώρα μια μέθοδο κατασκευής υπόχωρων ο οποίος καλύπτει πολλά ενδιαφέροντα παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.1.6 *Έστω $\mathcal{V}$ ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$ και έστω $k_1,k_2,\cdots,k_n$ σταθεροί αριθμοί απο το σώμα $\mathbb{K}$. Τότε το σύνολο:*

$$\mathcal{W}:=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbb{K}^n\ |\ k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n=0\}$$

είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{K}^n$. Πραγματικά:

Το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}=(0,0,\cdots,0)$ προφανώς ανήκει στο $\mathcal{W}$. Αν $\vec{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,\alpha_n)$ και $\vec{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ είναι δύο στοιχεία του $\mathcal{W}$, τότε $k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n=0$ και $k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_nb_n=0$. Προσθέτοντας κατά μέλη θα έχουμε $0=(k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n)+(k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_nb_n)=k_1(a_1+b_1)+k_2(a_2+b_2)+\cdots+k_n(a_n+b_n)$. Άρα το διάνυσμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$ ανήκει στο $\mathcal{W}$. Τέλος αν $r\in\mathbb{K}$, και $\vec{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathcal{W}$, τότε για το διάνυσμα $r\vec{\alpha}=(ra_1,ra_2,\cdots,ra_n)$ του $\mathbb{K}^n$, θα έχουμε: $k_1(ra_1)+k_2(ra_2)+\cdots+k_n(ra_n)=(k_1r)a_1+(k_2r)a_2+\cdots+(k_nr)a_n=r(k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n)=r0=0$. Άρα $r\vec{\alpha}\in\mathcal{W}$. Επομένως το $\mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{K}^n$.

Σχόλιο 3.1.7 *Ο υπόχωρος του Παραδείγματος 3.1.6 περιγράφει το σύνολο λύσεων της εξίσωσης:*

$$k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n=0 \qquad (*)$$

Δηλαδή το σύνολο των n-αδων αριθμών $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ από το σώμα $\mathbb{K}$ οι οποίες ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση. Μια εξίσωση της μορφής $(*)$ καλείται **ομογενής γραμμική εξίσωση** *n αγνώστων $x_1,x_2,\cdots,x_n$ με (σταθερούς) συντελεστές $k_1,k_2,\cdots,k_n$ από το σώμα $\mathbb{K}$.*

Έτσι για παράδειγμα το σύνολο

$$\{(a_1,a_2,a_3,a_4)\in\mathbb{R}^4\ |\ 2a_1-3a_2+8a_n+a_4=0\}$$

είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ ο οποίος μας περιγράφει το σύνολο λύσεων της ομογενούς εξίσωσης $2x_1-3x_2+8x_3+x_4=0$.

Παράδειγμα 3.1.8 *Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{K}[t]$ των πολυωνύμων πάνω από ένα σώμα $\mathbb{K}$, και έστω $n \geq 0$. Τότε το υποσύνολο $\mathbb{K}_n[t]$ των πολυωνύμων με βαθμό $\leq n$, είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{K}[t]$.*

Θα κλείσουμε την παρούσα ενότητα με κάποια παραδείγματα υπόχωρων του διανυσματικού χώρου $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$.

Έστω $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ένας $n \times n$ πίνακας.

1. Ο πίνακας A καλείται **συμμετρικός** αν-ν $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j, \leq n$. Συμβολίζουμε με $\mathbb{S}_{n\times n}(\mathbb{K})$ το υποσύνολο όλων των συμμετρικών πινάκων:

$$\boxed{\mathbb{S}_{n\times n}(\mathbb{K}) := \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid a_{ij} = a_{ji},\ 1 \leq i, j, \leq n\}}$$

2. Ο πίνακας A καλείται **αντισυμμετρικός** αν-ν $a_{ji} = -a_{ij}$, $1 \leq i, j, \leq n$. Συμβολίζουμε με $\mathbb{A}_{n\times n}(\mathbb{K})$ το υποσύνολο όλων των αντισυμμετρικών πινάκων:

$$\boxed{\mathbb{A}_{n\times n}(\mathbb{K}) := \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid a_{ji} = -a_{ij},\ 1 \leq i, j, \leq n\}}$$

3. Ο πίνακας A καλείται **άνω τριγωνικός** αν-ν $a_{ij} = 0, \forall i, j = 1, 2, \cdots, n$ με $i > j$. Συμβολίζουμε με $\mathbb{AT}_{n\times n}(\mathbb{K})$ το υποσύνολο όλων των άνω τριγωνικών πινάκων:

$$\boxed{\mathbb{AT}_{n\times n}(\mathbb{K}) := \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid a_{ij} = 0, \forall i, j = 1, \cdots, n : i > j\}}$$

4. Ο πίνακας A καλείται **κάτω τριγωνικός** αν-ν $a_{ij} = 0, \forall i, j = 1, 2, \cdots, n$ με $i < j$. Συμβολίζουμε με $\mathbb{KT}_{n\times n}(\mathbb{K})$ το υποσύνολο όλων των άνω τριγωνικών πινάκων:

$$\boxed{\mathbb{KT}_{n\times n}(\mathbb{K}) := \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid a_{ij} = 0, \forall i, j = 1, \cdots, n : i < j\}}$$

5. Συμβολίζουμε με $\mathbb{D}_{n\times n}(\mathbb{K})$ τα υποσύνολο των διαγωνίων πινάκων και με $\mathbb{B}_{n\times n}(\mathbb{K})$ τα υποσύνολο των βαθμωτών πινάκων:

$$\boxed{\mathbb{D}_{n\times n}(\mathbb{K}) := \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid a_{ij} = 0\ \forall i, j = 1, \cdots, n :\ i \neq j\}}$$

$$\boxed{\mathbb{B}_{n\times n}(\mathbb{K}) := \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{D}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid a_{ii} = a_{jj}\ \forall i, j = 1, \cdots, n\}}$$

όπως αυτοί ορίσθηκαν στην ενότητα 2.3

Για παράδειγμα για τους πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 4 & 2 & 8 \\ -5 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

έχουμε: $A \in \mathbb{S}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{A}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, $C \in \mathbb{AT}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, $D \in \mathbb{KT}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Πρόχειρη Δοκιμασία

Να δείξετε ότι τα υποσύνολα

$$\mathbb{D}_{n\times n}(\mathbb{K}), \ \mathbb{B}_{n\times n}(\mathbb{K}), \ \mathbb{S}_{n\times n}(\mathbb{K}), \ \mathbb{A}_{n\times n}(\mathbb{K}), \ \mathbb{AT}_{n\times n}(\mathbb{K}), \ \mathbb{KT}_{n\times n}(\mathbb{K})$$

είναι υπόχωροι του $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

3.2 Γραμμικοί Συνδυασμοί

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε έναν σημαντικό τρόπο κατασκευής υπόχωρων του $\mathcal{V}$. Όπως και πριν από τώρα σταθεροποιούμε έναν διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}$ πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$,

Πρώτα όμως χρειαζόμαστε έναν ορισμό.

Ορισμός 3.2.1 *Έστω $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο διανυσμάτων του χώρου $\mathcal{V}$.* **Γραμμικός συνδιασμός** *του συνόλου S ή των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$, καλείται κάθε διάνυσμα του $\mathcal{V}$ το οποίο είναι της μορφής:*

$$k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n, \quad \text{όπου} \quad k_i \in \mathbb{K}, \ \forall i = 1, 2, \cdots, n.$$

Τα στοιχεία k_i καλούνται **συντελεστές** *του γραμμικού συνδιασμού. Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδιασμών του συνόλου S ή των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$, συμβολίζεται ως εξής: $\langle S\rangle$ ή $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\rangle$. Δηλαδή:*

$$\langle S\rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\rangle := \{k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n \mid k_i \in \mathbb{K}, \ \forall i = 1, 2, \cdots, n\}$$

Παράδειγμα 3.2.1 *Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ πάνω από το $\mathbb{R}$, το διάνυσμα*

$$3(1,0,0) + \sqrt{2}(4,3,1) - 7(6,1,0) + (7,8,9)$$

είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{x}_1 = (1,0,0), \vec{x}_2 = (4,3,1), \vec{x}_3 = (6,1,0), \vec{x}_4 = (7,8,9)$ *με αντίστοιχους συντελεστές* $k_1 = 3, k_2 = \sqrt{2}, k_3 = -7, k_4 = 1$. *Παρόμοια στον διανυσματικό χώρο* $\mathbb{C}^2$ *πάνω από το* $\mathbb{C}$, *το διάνυσμα* $i(2,2) - 8(3+5i,-4) + \sqrt{7}(1,-1+i)$ *είναι γραμμικός συνδιασμός των διανυσμάτων* $\vec{x}_1 = (2,2), \vec{x}_2 = (3+5i,-4), \vec{x}_3 = (1,-1+i)$, *με αντίστοιχους συντελεστές* $k_1 = i$, $k_2 = -8$ *και* $k_3 = \sqrt{7}$.

Σχόλιο 3.2.2 *Μπορούμε να ορίσουμε την έννοια του γραμμικού συνδυασμού άπειρου πλήθους διανυσμάτων ως εξής. Έστω* $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}, \cdots,\}$ *ένα άπειρο σύνολο διανυσμάτων του* $\mathcal{V}$. *Ένας* **γραμμικός συνδυασμός** *του συνόλου* S *ή των διανυσμάτων* $\{\vec{x}_i\}$ *είναι κάθε διάνυσμα του* $\mathcal{V}$ *της μορφής:*

$$k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n + k_{n+1}\vec{x}_{n+1} + \cdots$$

στο οποίο υποθέτουμε ότι το πλήθος των μη-μηδενικών συντελεστών $k_i \in \mathbb{K}$ *είναι πεπερασμένο.*

Παράδειγμα 3.2.3 *Έστω ο διανυσματικός χώρος* $\mathbb{K}[t]$ *των πολυωνύμων με συντελεστές από ένα σώμα* $\mathbb{K}$. *Τότε κάθε διάνυσμα, δηλαδή πολυώνυμο,* $P(t)$ *του* $\mathbb{K}[t]$ *γράφεται ως εξής:* $P(t) = k_0 + k_1t + k_2t^2 + \cdots + k_nt^n$, *όπου* $n \in \mathbb{N}_0$ *και* $k_i \in \mathbb{K}$, $\forall n \geq 0$. *Θέτοντας* $k_m = 0, \forall m > n$, *βλέπουμε ότι το* $P(t)$ *είναι γραμμικός συνδυασμός του απείρου συνόλου διανυσμάτων* $\{1, t, t^2, \cdots, t^n, \cdots\}$.

Επομένως το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών του συνόλου διανυσμάτων $\{1, t, t^2, \cdots, t^n, \cdots\}$ *συμπίπτει με το σύνολο όλων των πολυωνύμων:*

$$\mathbb{K}[t] = \langle 1, t, t^2, \cdots, t^n, \cdots \rangle.$$

Παράδειγμα 3.2.4 *Έστω ο διανυσματικός χώρος* $\mathbb{K}^n$ *πάνω από το σώμα* $\mathbb{K}$. *Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του* $\mathbb{K}^n$*:*

$$\vec{e}_1 := (1,0,0,\cdots,0,0),\ \vec{e}_2 := (0,1,0,\cdots,0,0),\ \cdots,\ \vec{e}_n := (0,0,0,\cdots,0,1)$$

Τότε ισχυριζόμαστε ότι: $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n \rangle = \mathbb{K}^n$. *Πραγματικά αρκεί να δείξουμε ότι κάθε διάνυσμα* $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *του* $\mathbb{K}^n$ *είναι γραμμικός συνδυασμός των* $\{\vec{e}\}_{i=1}^n$. *Αυτό συμβαίνει διότι:*

$$\begin{aligned} \vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) &= x_1(1,0,0,\cdots,0,0) + \\ &\quad x_2(0,1,0,\cdots,0,0) + \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad x_n(0,0,0,\cdots,0,1) = \\ &= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n. \end{aligned}$$

Τα Παραδείγματα 3.2.3 και 3.2.4 δείχνουν ιδιαίτερα ότι οι γραμμικοί συνδυασμοί $\langle 1, t, t^2, \cdots, t^n, \cdots \rangle$ και $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n \rangle$ είναι διανυσματικοί χώροι καθώς συμπίπτουν με τους $\mathbb{K}[t]$ και $\mathbb{K}^n$ αντίστοιχα. Αυτό δεν είναι τυχαίο όπως δείχνει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.2.2 *Έστω $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα σύνολο διανυσμάτων στον $\mathcal{V}$. Τότε το σύνολο $\langle S \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n \rangle$ όλων των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων του S είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$ ο οποίος περιέχει το S και έχει την ιδιότητα να είναι ο μικρότερος υπόχωρος του $\mathcal{V}$ ο οποίος περιέχει το S.*

Δηλαδή αν $\mathcal{W}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$ ο οποίος περιέχει το S, τότε $\langle S \rangle \subseteq \mathcal{W}$.

Απόδειξη: Επειδή $\vec{0} = 0\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + \cdots 0\vec{x}_n$, έπεται ότι $\vec{0} \in \langle S \rangle$ και ιδιαίτερα $\langle S \rangle \neq \emptyset$. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \langle S \rangle$. Τότε $\vec{\alpha} = k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n$ και $\vec{\beta} = l_1\vec{x}_1 + l_2\vec{x}_2 + \cdots + l_n\vec{x}_n$, όπου $k_i, l_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Επομένως $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n) + (l_1\vec{x}_1 + l_2\vec{x}_2 + \cdots + l_n\vec{x}_n) = (k_1 + l_1)\vec{x}_1 + (k_2 + l_2)\vec{x}_2 + \cdots + (k_n + l_n)\vec{x}_n \in \langle S \rangle$. Άρα το $\langle S \rangle$ είναι κλειστό στην πρόσθεση του $\mathcal{V}$. Αν $r \in \mathbb{K}$, τότε $r\vec{\alpha} = r(k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n) = (rk_1)\vec{x}_1 + (rk_2)\vec{x}_2 + \cdots + (rk_n)\vec{x}_n \in \langle S \rangle$. Επομένως το $\langle S \rangle$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V}$. Επιπρόσθετα ο υπόχωρος $\langle S \rangle$ περιέχει το S διότι για κάθε $i = 1, 2, \cdots, n$, έχουμε $\vec{x}_i = 0\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + \cdots + 0\vec{x}_{i-1} + 1\vec{x}_i + 0\vec{x}_{i+1} + \cdots + 0\vec{x}_n \in \langle S \rangle$. Επομένως $S \subseteq \langle S \rangle$. Έστω τώρα $\mathcal{W}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$ με $S \subseteq \mathcal{W}$, και έστω $\vec{\alpha} = k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n$ ένα τυχόν διάνυσμα του $\langle S \rangle$. Επειδή ο $\mathcal{W}$ περιέχει το S, δηλαδή τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$, έπεται εύκολα από τον ορισμό 3.1.1 με χρήση επαγωγής επί του πλήθους n των διανυσμάτων του S, ότι $k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n \in \mathcal{W}$. Δηλαδή $\vec{\alpha} \in \mathcal{W}$. Επομένως $\langle S \rangle \subseteq \mathcal{W}$. □

Ορισμός 3.2.3 *Αν $S \subseteq \mathcal{V}$ είναι ένα (πεπερασμένο) υποσύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{V}$, τότε ο υπόχωρος $\langle S \rangle$ καλείται* **ο υπόχωρος του $\mathcal{V}$ που παράγεται από το S**.

Η επόμενη πρόταση, η οποία μας δείχνει κάποιες σημαντικές πράξεις οι οποίες δεν μεταβάλουν τον υπόχωρο που παράγεται από κάποια διανύσματα, θα μας είναι πολύ χρήσιμη σε υπολογισμούς.

Πρόταση 3.2.4 *Έστω $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων σε έναν διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}$ πάνω από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

1. $\boxed{(\mathbf{\Sigma\Pi 1})}$ *Ο υπόχωρος που παράγεται από το S, δεν αλλάζει αν αλλάξουμε την σειρά των διανυσμάτων $\vec{x}_i$. Δηλαδή, $\forall i, j = 1, 2, \cdots, n$:*

$$\boxed{\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_j, \cdots, \vec{x}_n \rangle = \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_j, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle}$$

2. $\boxed{(\mathbf{\Sigma\Pi 2})}$ *Ο υπόχωρος που παράγεται από το S, δεν αλλάζει αν πολλαπλασιάσουμε βαθμωτά ένα από τα $\vec{x}_i$ με ένα μη-μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{K}$. Δηλαδή, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$, $\forall k \in \mathbb{K}$, $k \neq 0$:*

$$\boxed{\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle = \langle \vec{x}_1, \cdots, k\vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle}$$

3. $\boxed{(\mathbf{\Sigma\Pi 3})}$ *Ο υπόχωρος που παράγεται από το S, δεν αλλάζει αν αντικαταστήσουμε ένα από τα διανύσματα $\vec{x}_i$ με ένα διάνυσμα της μορφής $\vec{x}_i + k\vec{x}_j$, όπου $k \neq 0$ και $i \neq j$. Δηλαδή, $\forall i, j = 1, 2, \cdots, n$, $\forall k \in \mathbb{K}$, με $k \neq 0$ και $i \neq j$:*

$$\boxed{\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle = \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i + k\vec{x}_j, \cdots, \vec{x}_n \rangle}$$

Απόδειξη: 1. Προκύπτει άμεσα χρησιμοποιώντας την αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης, δηλαδή το Αξίωμα **(ΔΧ2)**.

2. Έστω $\vec{x} \in \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle$. Τότε $\vec{x} = l_1\vec{x}_1 + \cdots + l_i\vec{x}_i + \cdots + l_n\vec{x}_n$. Επειδή $k \neq 0$, η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί και ως εξής: $\vec{x} = l_1\vec{x}_1 + \cdots + (l_i k^{-1})k\vec{x}_i + \cdots + l_n\vec{x}_n$. Αυτή η σχέση δείχνει ότι $\vec{x} \in \langle \vec{x}_1, \cdots, k\vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle$ και επομένως $\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle \subseteq \langle \vec{x}_1, \cdots, k\vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle$. Αντίστροφα αν $\vec{x} \in \langle \vec{x}_1, \cdots, k\vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle$, τότε $\vec{x} = m_1\vec{x}_1 + \cdots + m_i(k\vec{x}_i) + \cdots + m_n\vec{x}_n$. Η τελευταία σχέση γράφεται $\vec{x} = m_1\vec{x}_1 + \cdots + (m_i k)\vec{x}_i + \cdots + m_n\vec{x}_n$ και αυτό σημαίνει ότι $\vec{x} \in \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle$. Άρα $\langle \vec{x}_1, \cdots, k\vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle \subseteq \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle$. Επομένως τελικα θα έχουμε $\langle \vec{x}_1, \cdots, k\vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle = \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle$.

3. Έστω $\vec{x} \in \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle$, και επομένως $\vec{x} = l_1\vec{x}_1 + \cdots + l_i\vec{x}_i + \cdots + l_j\vec{x}_j + \cdots + l_n\vec{x}_n$, όπου $l_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Η τελευταία σχέση γράφεται ισοδύναμα $\vec{x} = l_1\vec{x}_1 + \cdots + l_i(\vec{x}_i + k\vec{x}_j) + \cdots + (l_j - kl_i)\vec{x}_j + \cdots + l_n\vec{x}_n$, δηλαδή προσθέσαμε και αφαιρέσαμε το διάνυσμα $l_i k\vec{x}_j$ στο $\vec{x}$. Η τελευταία σχέση δείχνει ότι $\vec{x} \in \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i + k\vec{x}_j, \cdots, \vec{x}_n \rangle$ και επομένως $\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle \subseteq \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i + k\vec{x}_j, \cdots, \vec{x}_n \rangle$. Αντίστροφα έστω $\vec{x} \in \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i + k\vec{x}_j, \cdots, \vec{x}_n \rangle$, επομένως $\vec{x} = m_1\vec{x}_1 + \cdots + m_i(\vec{x}_i + k\vec{x}_j) + \cdots + m_j\vec{x}_j + \cdots + m_n\vec{x}n$, όπου $m_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Η τελευταία σχέση γράφεται προφανώς $\vec{x} = m_1\vec{x}_1 + \cdots + m_i\vec{x}_i + \cdots + (m_i k + m_j)\vec{x}_j + \cdots + m_n\vec{x}_n$. Αυτό δείχνει ότι $\vec{x} \in \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle$ και επομένως $\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i + k\vec{x}_j, \cdots, \vec{x}_n \rangle \subseteq \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle$. Έτσι τελικά θα έχουμε $\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i + k\vec{x}_j, \cdots, \vec{x}_n \rangle = \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle$. □

Οι τρεις πράξεις (ΣΠ1), (ΣΠ2), (ΣΠ3) της Πρότασης 3.2.4 καλούνται **στοιχειώδεις πράξεις** μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$.

Ας δούμε με ένα παράδειγμα πως εφαρμόζουμε τις στοιχειώδεις πράξεις.

Παράδειγμα 3.2.5 *Έστω $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ τρία διανύσματα στον $\mathcal{V}$ για τα οποία γνωρίζουμε ότι ικανοποιούν την σχέση $(*)$: $2\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2 - 4\vec{x}_3 = \vec{0}$. Θα δείξουμε ότι:*

$\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle = \langle \vec{x}_2, \vec{x}_3 \rangle$. *Πραγματικά εκτελώντας διαδοχικά τις στοιχειώδεις πράξεις (ΣΠ2), (ΣΠ3), (ΣΠ2), (ΣΠ1), και λαμβάνοντας υπ' όψιν μας την σχέση* $(*)$, *θα έχουμε:*

$$\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle = \langle 2\vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle = \langle 2\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2, \vec{x}_2 \rangle = \langle 4\vec{x}_3, \vec{x}_2 \rangle = \langle \vec{x}_3, \vec{x}_2 \rangle = \langle \vec{x}_2, \vec{x}_3 \rangle$$

Παράδειγμα 3.2.6 *Θα προσδιορίσουμε τον υπόχωρο του* $\mathbb{R}^3$ *ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα* $\vec{x} = (1,0,1)$ *και* $\vec{y} = (0,2,0)$. *Χρησιμοποιώντας τον ορισμό υπόχωρου έχουμε:*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle (1,0,1), (0,2,0) \rangle = \{k(1,0,1) + l(0,2,0) \mid k,l \in \mathbb{R}\} =$$

$$\{(k,0,k) + (0,2l,0) \mid k,l \in \mathbb{R}\} = \{(k,2l,k) \mid k,l \in \mathbb{R}\}$$

Έτσι για παράδειγμα το διάνυσμα $(2,2,2)$ *ανήκει στον υπόχωρο* $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ *(διαλέγουμε* $k = 2, l = 1$*).*

Παράδειγμα 3.2.7 *Στον διανυσματικό χώρο* $\mathbb{R}^3$ *πάνω από το* $\mathbb{R}$, *θεωρούμε τα διανύσματα:*

$$\vec{\varepsilon}_1 = (1,0,1), \;\; \vec{\varepsilon}_1 = (0,1,0), \;\; \vec{\varepsilon}_1 = (0,1,1)$$

Θα δείξουμε ότι: $\mathbb{R}^3 = \langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3, \rangle$.

Ας προσδιορίσουμε πρώτα τον υπόχωρο $\langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3 \rangle$. *Θα έχουμε:*

$$\langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3 \rangle = \{k\varepsilon_1 + l\varepsilon_2 + m\varepsilon_3 \in \mathbb{R}^3 \mid k,l,m \in \mathbb{R}\} =$$

$$\{k(1,0,1) + l(0,1,0) + m(0,1,1) \in \mathbb{R}^3 \mid k,l,m \in \mathbb{R}\} =$$

$$\{(k, l+m, k+m) \in \mathbb{R}^3 \mid k,l,m \in \mathbb{R}\}$$

Επειδή πάντα ισχύει $\langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$, *αρκεί να δείξουμε ότι κάθε διάνυσμα* $\vec{x} = (x,y,z)$ *του* $\mathbb{R}^3$ *μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσματων* $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3$, *δηλαδή είναι της μορφής* $(k, l{+}m, k{+}m)$, *για κατάλληλα* $k,l,m \in \mathbb{R}$.

Όμως $\vec{x} = (x,y,z) \in \langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3 \rangle$ *αν-ν υπάρχουν* $k,l,m \in \mathbb{R}$, *έτσι ώστε:* $\vec{x} = (x,y,z) = (k, l+m, k+m)$. *Ισοδύναμα:* $\vec{x} = (x,y,z) \in \langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3 \rangle$ *αν-ν το σύστημα*

$$k = x, \;\; y = l + m, \;\; z = k + m$$

με αγνώστους τα k,l,m *έχει λύση ως πρός* x,y,z. *Αφαιρώντας την τρίτη από την δεύτερη εξίσωση, έχουμε* $y - z = l - k$. *Αν στην τελευταία προσθέσουμε την πρώτη έχουμε* $x + y - z = l$. *Άρα* $m = y - l = y - (x + y - z) = z - x$. *Επομένως:* $k = x, l = x + y - z, m = z - x$, *δηλαδή το παραπάνω σύστημα έχει λύση. Συνοψίζοντας το τυχόν διάνυσμα* $\vec{x} = (x,y,z)$ *γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των* $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3$ *ως εξής:*

$$\vec{x} = (x,y,z) = x\vec{\varepsilon}_1 + (x + y - z)\vec{\varepsilon}_2 + (z - x)\vec{\varepsilon}_3$$

Επομένως: $\langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3 \rangle = \mathbb{R}^3$.

Πρόχειρη Δοκιμασία

Στον $\mathbb{R}^3$ θεωρούμε τα διανύσματα:

$$\vec{x} = (1,1,0), \ \ \vec{y} = (0,0,1), \ \ \vec{z} = (1,1,1), \ \ \vec{w} = (-1,-1,1).$$

Να δείξετε ότι: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{z}, \vec{w} \rangle$.

Παράδειγμα 3.2.8 *Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}[t]$ των πολυωνύμων πάνω από το $\mathbb{K}$. Έστω $n \in \mathbb{N}_0$ ένας σταθερός φυσικός αριθμός και θεωρούμε τα διανύσματα $\{1, t, t^2, \cdots, t^n\}$ του $\mathbb{K}[t]$.*

Τότε ο υπόχωρος του $\mathbb{K}[t]$ που παράγεται από τα διανύσματα $\{1, t, t^2, \cdots, t^n\}$ συμπίπτει με το σύνολο όλων των πολυωνύμων με βαθμό μικρότερο ή ίσο με n μαζί με το μηδενικό πολυώνυμο 0 (το οποίο υπενθυμίζουμε δεν έχει βαθμό):

$$\langle 1, t, t^2, \cdots, t^n \rangle = \{P(t) \in \mathbb{K}[t] \ | \ \deg P(t) \leq n\} \cup \{0\}$$

Τον υπόχωρο αυτόν τον συμβολίζουμε με $\mathbb{K}_n[t]$. Έτσι από τώρα και στο εξής $\mathbb{K}_n[t]$ θα συμβολίζει τον **υπόχωρο** *του $\mathbb{K}[t]$* **όλων των πολυωνύμων με βαθμό** $\leq n$.

Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση, την οποία θα αναλύσουμε διεξοδικά στο επόμενο Κεφάλαιο, είναι αυτή κατά την οποία ο υπόχωρος που παράγεται από ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων συμπίπτει με όλον το χώρο $\mathcal{V}$. Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 3.2.5 *Ένας διανυσματικός χώρος $\mathcal{V}$ πάνω από ένα σώμα $\mathbb{K}$ καλείται* **πεπερασμένα παραγόμενος**, *αν υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο διανυσμάτων $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ του $\mathcal{V}$, έτσι ώστε $\mathcal{V} = \langle S \rangle$. Σ' αυτή την περίπτωση τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ καλούνται* **γεννήτορες** *του $\mathcal{V}$ και το σύνολο S καλείται* **σύνολο γεννητόρων** *του $\mathcal{V}$.*

Άμεση συνέπεια του ορισμού 3.2.5 είναι το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3.2.6 *Έστω $\mathcal{V}$ ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$ με σύνολο γεννητόρων $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$. Τότε κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ του $\mathcal{V}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του S.*

Δηλαδή υπάρχουν στοιχεία $k_1, k_2, \cdots, k_n$ από το σώμα $\mathbb{K}$, έτσι ώστε: $\vec{x} = k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n$.

Παράδειγμα 3.2.9 *1. Από το Παράδειγμα 3.2.4 έπεται ότι διανυσματικός χώρος $\mathbb{K}^n$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος με σύνολο γεννητόρων το σύνολο $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$, δηλαδή:*

$$\boxed{\mathbb{K}^n = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n \rangle}$$

όπου $\vec{e}_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ είναι το διάνυσμα που έχει 1 στην i-συντεταγμένη και παντού αλλού 0.

2. *Από το Παράδειγμα 3.2.8 έπεται ότι διανυσματικός χώρος $\mathbb{K}_n[t]$ των πολυωνύμων με βαθμό $\leq n$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος με σύνολο γεννητόρων το σύνολο $S = \{1, t, t^2, \cdots, t^n\}$, δηλαδή $\mathbb{K}_n[t] = \langle 1, t, t^2, \cdots, t^n \rangle$.*

3. *Το σύνολο $\{1, i\}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}$ πάνω από το $\mathbb{R}$, και επομένως το $\mathbb{C}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος πάνω από το $\mathbb{R}$.*

Σχόλιο 3.2.10 *1. Η έννοια του πεπερασμένα παραγόμενου διανυσματικού χώρου εξαρτάται από το σώμα $\mathbb{K}$ επί του οποίου είναι ορισμένος ο χώρος. Πραγματικά έχουμε ήδη δεί ότι το σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$ αλλά και πάνω από το το σώμα $\mathbb{Q}$ των ρητών. Τότε ο $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος πάνω από το $\mathbb{R}$ με σύνολο γεννητόρων $S = \{1\}$ (αυτό ισχύει διότι $\forall r \in \mathbb{R} : r = r1$). Μπορεί όμως να δειχθεί ότι το $\mathbb{R}$ θεωρούμενος σαν διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{Q}$ <u>δεν</u> έχει πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων.*

2. Ένας διανυσματικός χώρος έχει γενικά άπειρα το πλήθος σύνολα γεννητόρων. Για παράδειγμα το $\{\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)\}$ είναι σύνολο γεννητόρων του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$ πάνω από το $\mathbb{R}$, όπως είδαμε στο Παράδειγμα 3.2.4. Αν $k \in \mathbb{R}$ και $k \neq 0$, τότε και το σύνολο $\{\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{\varepsilon} = (0, k)\}$ είναι σύνολο γεννητόρων του $\mathbb{R}^2$ (να το δειξετε σαν Ασκηση).

Εφαρμογή 3.2.11 *Θα προσδιορίσουμε ένα σύνολο γεννητόρων του διανυσματικού χώρου $\mathcal{W}$ των λύσεων της ομογενούς γραμμικής εξίσωσης:*

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n = 0 \qquad (*)$$

ο οποίος ορίσθηκε στο Παράδειγμα 3.1.6.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) $k_i = 0, \forall i = 1, 2, \cdots, n$. Τότε κάθε διάνυσμα $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ ικανοποιεί την $(*)$ και άρα $\mathcal{W} = \mathbb{K}^n$ για τον οποίο βρήκαμε ένα σύνολο γεννητόρων στο Παράδειγμα 3.2.4.

(β) Έστω ότι κάποιο (τουλάχιστον ένα) $k_i \neq 0$. Τότε εργαζόμαστε ώς εξής: Πολλαπλασιάζοντας την $(*)$ με το k_i^{-1} θα έχουμε την εξίσωση

$$\frac{k_1}{k_i}x_1 + \frac{k_2}{k_i}x_2 + \cdots + \frac{k_{i-1}}{k_i}x_{i-1} + x_i + \frac{k_{i+1}}{k_i}x_{i+1} + \cdots + \frac{k_n}{k_i}x_n = 0 \qquad (**)$$

η οποία προφανώς είναι ισοδύναμη (δηλαδή έχει το ίδιο σύνολο λύσεων με την $(*)$). Από την εξίσωση $(**)$ βλέπουμε ότι, εάν θέσουμε

$$l_1 := -\frac{k_1}{k_i},\ \ l_2 := -\frac{k_2}{k_i}, \cdots, l_{i-1} := -\frac{k_{i-1}}{k_i}, l_{i+1} := -\frac{k_{i+1}}{k_i}, \cdots, l_n := -\frac{k_n}{k_i}$$

τότε θα έχουμε την εξίσωση:

$$x_i = l_1x_1 + l_2x_2 + \cdots + l_{i-1}x_{i-1} + l_{i+1}x_{i+1} + \cdots + l_nx_n \qquad (\dagger)$$

η οποία είναι προφανώς ισοδύναμη με την $(**)$, άρα και με την $(*)$. Έστω τώρα $\vec{\alpha}$ μια λύση της $(*)$, δηλαδή μια n-άδα $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ έτσι ώστε: $k_1a_i + k_1a_2 + \cdots + k_na_n = 0$. Χρησιμοποιώντας ότι το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ικανοποιεί και τις ισοδύναμες εξισώσεις $(**)$, $(\dagger)$, θα έχουμε:

$$a_i = l_1a_1 + l_2a_2 + \cdots + l_{i-1}a_{i-1} + l_{i+1}a_{i+1} + \cdots + l_na_n \qquad (\dagger\dagger)$$

και επομένως:

$$\vec{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \cdots, a_n) =$$

$$(\alpha_1, \cdots, a_{i-1}, l_1a_1 + l_2a_2 + \cdots + l_{i-1}a_{i-1} + l_{i+1}a_{i+1} + \cdots + l_na_n, a_{i+1}, \cdots, a_n) =$$

$$a_1(1, 0, \cdots, 0, l_1, 0, \cdots, 0) + a_2(0, 1, \cdots, 0, l_2, 0, \cdots, 0) +$$

$$\cdots + a_{i-1}(0, 0, \cdots, 1, l_{i-1}, 0, \cdots, 0) + a_{i+1}(0, 0, \cdots, 0, l_{i+1}, 1, \cdots, 0) +$$

$$a_n(0, 0, \cdots, 0, l_n, 0, \cdots, 1)$$

Δηλαδή η τυχούσα λύση $\vec{\alpha}$ του συστήματος $(*)$, είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων:

$$\vec{\lambda}_1 := (1, 0, \cdots, 0, l_1, 0, \cdots, 0),\ \ \cdots,\ \ \vec{\lambda}_{i-1} := (0, 0, \cdots, 1, l_{i-1}, 0, \cdots, 0),\ \ \cdots$$

$$\vec{\lambda}_{i+1} := (0, 0, \cdots, 0, l_{i+1}, 1, \cdots, 0),\ \ \cdots,\ \ \vec{\lambda}_n := (0, 0, \cdots, 0, l_n, 0, \cdots, 1)$$

όπου οι αριθμοί $l_j, \forall j \neq i$, εμφανίζονται στην i-συντεταγμένη. Άρα θα έχουμε $\vec{\alpha} \in \langle \vec{\lambda}_1, \cdots, \vec{\lambda}_n \rangle$ και επομένως $\mathcal{W} \subseteq \langle \vec{\lambda}_1, \cdots, \vec{\lambda}_n \rangle$. Αντίστροφα από τις σχέσεις $l_j = -\frac{k_j}{k_i}$, $\forall j \neq i$, βλέπουμε εύκολα ότι τα διανύσματα $\vec{\lambda}_j$, $\forall j \neq i$, είναι λύσεις του $(*)$ και επομένως ανήκουν στο $\mathcal{W}$. Επειδή, σύμφωνα με το Παράδειγμα 3.1.6, το $\mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{K}^n$, έπεται ότι $\langle \vec{\lambda}_1, \cdots, \vec{\lambda}_n \rangle \subseteq \mathcal{W}$. Συνοψίζοντας τη παραπάνω ανάλυση, θα έχουμε:

$$\boxed{\mathcal{W} \ = \ \left\langle \vec{\lambda}_1, \cdots, \vec{\lambda}_{i-1}, \vec{\lambda}_{i+1}, \cdots, \vec{\lambda}_n \right\rangle}$$

3.3 Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

Στην παρούσα ενότητα θα ορίσουμε και μελετήσουμε δύο ενδιαφέροντες μεθόδους κατασκευής υπόχωρων. Αυτές οι μέθοδοι σχετίζονται με γνωστές μας συνολοθεωρητικές κατασκευές και ανακύπτουν από το γενικό ερώτημα αν η έννοια του υπόχωρου παραμένει αναλλοίωτη κάτω από διάφορες συνολοθεωρητικές κατασκευές όπως η τομή ή η ένωση.

3.3.1 Τομή Υπόχωρων

Είναι εύλογο να αναρωτηθεί κανείς αν η τομή δύο υπόχωρων είναι υπόχωρος. Η απάντηση είναι θετική όπως μας δείχνει η ακόλουθη γενική πρόταση.

Πρόταση 3.3.1 *Έστω $\{\mathcal{W}_i \mid i \in I\}$ μια συλλογή υπόχωρων του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$, όπου I είναι ένα (πεπερασμένο ή άπειρο) σύνολο δεικτών. Τότε η τομή των υπόχωρων*

$$\bigcap_{i\in I} \mathcal{W}_i := \{\vec{x} \in \mathcal{V} \mid \vec{x} \in \mathcal{W}_i,\ \forall i \in I\}$$

είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$.

Απόδειξη: Από το Λήμμα 3.1.2 έπεται ότι κάθε υπόχωρος του $\mathcal{V}$ περιέχει το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ του $\mathcal{V}$. Άρα $\vec{0} \in \mathcal{W}_i$, $\forall \in I$, και επομένως $\vec{0} \in \cap_{i\in I}\mathcal{W}_i$. Ιδιαίτερα $\cap_{i\in I}\mathcal{W}_i \neq \emptyset$. Έστω $\vec{x}, \vec{y}$ δύο διανύσματα τα οποία ανήκουν στην τομή $\cap_{i\in I}\mathcal{W}_i$. Τότε $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{W}_i$, $\forall i \in I$. Επειδή, $\forall i \in I$, το υποσύνολο $\mathcal{W}_i$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V}$, έπεται ότι $\vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{W}_i$, $\forall i \in I$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $\vec{x} + \vec{y} \in \cap_{i\in I}\mathcal{W}_i$ και επομένως το υποσύνολο $\cap_{i\in I}\mathcal{W}_i$ είναι κλειστό στην πράξη της πρόσθεσης. Τέλος αν $k \in \mathbb{K}$ και $\vec{x} \in \cap_{i\in I}\mathcal{W}_i$, τότε $\vec{x} \in \mathcal{W}_i$, $\forall i \in I$. Επειδή $\forall i \in I$, το υποσύνολο $\mathcal{W}_i$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V}$, έπεται ότι $k\vec{x} \in \mathcal{W}_i$, $\forall i \in I$. Τότε όπως και παραπάνω θα έχουμε $k\vec{x} \in \cap_{i\in I}\mathcal{W}_i$. Δηλαδή το υποσύνολο $\cap_{i\in I}\mathcal{W}_i$ είναι κλειστό στην πράξη του βαθμωτού πολλαπλασιασμού και επομένως είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$. □

Είδαμε στην Πρόταση 3.2.2 ότι, αν $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathcal{V}$, τότε το σύνολο $\langle S\rangle$ όλων των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων του S είναι ο μικρότερος υπόχωρος του $\mathcal{V}$ ο οποίος περιέχει το S. Η επόμενη Πρόταση δείχνει την σχέση μεταξύ των Προτάσεων 3.2.2 και 3.3.1.

Πρόταση 3.3.2 *Έστω $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα υποσύνολο διανυσμάτων του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$. Τότε ο υπόχωρος $\langle S\rangle$ που παράγεται από το S συμπίπτει* *με την τομή όλων των υπόχωρων του $\mathcal{V}$ που περιέχουν το S:*

$$\langle S\rangle = \bigcap\{\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V} \mid \text{ο } \mathcal{W} \text{ είναι υπόχωρος του } \mathcal{V} \text{ με } S \subseteq \mathcal{W}\}$$

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{Z}$ το υποσύνολο στο δεύτερο μέλος της παραπάνω σχέσης. Από την Πρόταση 3.2.2 έπεται ότι ο υπόχωρος $\langle S\rangle$ περιέχεται σε κάθε υπόχωρο $\mathcal{W}$ του $\mathcal{V}$ με $S \subseteq \mathcal{W}$. Άρα ο υπόχωρος $\langle S\rangle$ θα περιέχεται και στην τομή τους, και επομένως $\langle S\rangle \subseteq \mathcal{Z}$. Από την άλλη πλευρά το σύνολο $\langle S\rangle$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V}$ που περιέχει το S και άρα είναι κάποιος από τους υπόχωρους $\mathcal{W}$ που εμφανίζονται στην τομή $\mathcal{Z}$. Αυτό όμως έχει σαν συνέπεια ότι $\mathcal{Z} \subseteq \langle S\rangle$. Επομένως $\langle S\rangle = \mathcal{Z}$. □

Θα δούμε τώρα μια εφαρμογή της θεωρίας η οποία θα μας είναι χρήσιμη στην θεωρία των γραμμικών συστημάτων που θα αναπτύξουμε αργότερα.

Εφαρμογή 3.3.1 *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και έστω οι m το πλήθος ομογενείς γραμμικές εξισώσεις με n αγνώστους $x_1, x_2, \cdots, x_n$ και συντελεστές a_{ij}, $1 \leq m$, $1 \leq j \leq n$, από το σώμα $\mathbb{K}$:*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \qquad (\Sigma_1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \qquad (\Sigma_2)$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \qquad (\Sigma_m)$$

Ένα τέτοιο σύνολο γραμμικών εξισώσεων καλείται **ομογενές γραμμικό σύστημα** *m-εξισώσεων με n-αγνώστους και θα το συμβολίζουμε με (Σ). Ένα διάνυσμα $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ καλείται* **λύση** *του (Σ), αν το $\vec{\alpha}$ είναι λύση ταυτόχρονα όλων των εξισώσεων $(\Sigma_1), (\Sigma_2), \cdots, (\Sigma_m)$ του (Σ).*

Ισχυρισμός: Το σύνολο λύσεων, έστω Λ, του (Σ) είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{K}^n$. Πραγματικά, έστω Λ_i, $i = 1, 2, \cdots, m$, το σύνολο λύσεων της ομογενούς εξίσωσης (Σ_i). Από το Παράδειγμα 3.1.6 έπεται ότι το Λ_i είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{K}^n$. Επειδή προφανώς ισχύει $\Lambda = \Lambda_1 \cap \Lambda_2 \cap \cdots \cap \Lambda_n$, από την Πρόταση 3.3.1 θα έχουμε ότι το Λ είναι υπόχωρος του $\mathbb{K}^n$.

3.3.2 Άθροισμα και Ευθύ Άθροισμα Υπόχωρων

Στην παρούσα υποενότητα θα δούμε μια διαφορετική μέθοδο κατασκευής υπόχωρων η οποία θα μας είναι χρήσιμη αργότερα στην "ανάλυση" ενός διανυσματικού χώρου σε απλούστερους διανυσματικούς (υπό)χωρους.

Όπως πριν σταθεροποιούμε έναν διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}$ πάνω απο ένα σώμα $\mathbb{K}$.

Έχουμε ήδη δει στην Πρόταση 3.3.1 ότι η τομή (πεπερασμένου ή άπειρου) πλήθους υπόχωρων του $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V}$. Επιπρόσθετα η τομή είναι ο μικρότερος υπόχωρος του $\mathcal{V}$ ο οποίος περιέχεται σε όλους του υπόχωρους. Κάτι αντίστοιχο δεν ισχύει για την ένωση υπόχωρων όπως δειχνει η ακολουθη πρόταση.

Πρόταση 3.3.3 *Έστω $\mathcal{V}$ ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ δύο υπόχωροι του $\mathcal{V}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η ένωση $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V}$.*

2. *Είτε $\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2$ ή $\mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{W}_1$.*

Απόδειξη: 2. $\Rightarrow$ 1. Αν $\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2$, τότε προφανώς $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_2$ και αν $\mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{W}_1$, τότε προφανώς $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_1$. Έτσι σε κάθε περίπτωση η ένωση είναι υπόχωρος.

1. $\Rightarrow$ 2. Υποθέτουμε ότι η ένωση $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V}$ και έστω ότι ο $\mathcal{W}_1$ δεν περιέχεται στον $\mathcal{W}_2$, δηλαδή $\mathcal{W}_1 \nsubseteq \mathcal{W}_2$. Θα δείξουμε ότι αναγκαστικά ισχύει $\mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{W}_1$. Επειδή υποθέσαμε ότι $\mathcal{W}_1 \nsubseteq \mathcal{W}_2$, έπεται ότι υπάρχει (τουλάχιστον ένα) διάνυσμα $\vec{x}_0 \in \mathcal{W}_1$ με $\vec{x} \notin \mathcal{W}_2$. Έστω τώρα ένα τυχόν διάνυσμα $\vec{y} \in \mathcal{W}_2$. Επειδή τα $\vec{x}_0, \vec{y}$ ανήκουν προφανώς στην ένωση $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ η οποία είναι υπόχωρος, έπεται ότι $\vec{x}_0 + \vec{y} \in \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$. Αυτό σημαίνει ότι είτε $\vec{x}_0 + \vec{y} \in \mathcal{W}_1$ ή $\vec{x}_0 + \vec{y} \in \mathcal{W}_2$. Αν $\vec{x}_0 + \vec{y} \in \mathcal{W}_2$, τότε επειδή $\vec{y} \in \mathcal{W}_2$ και ο $\mathcal{W}_2$ είναι υπόχωρος, έπεται ότι $(\vec{x}_0 + \vec{y}) - \vec{y} = \vec{x}_0 \in \mathcal{W}_2$. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι $\vec{x}_0 \notin \mathcal{W}_2$. Άρα $\vec{x}_0 + \vec{y} \in \mathcal{W}_1$, και τότε επειδή $\vec{x}_0 \in \mathcal{W}_1$ και ο $\mathcal{W}_1$ είναι υπόχωρος, έπεται ότι $(\vec{x}_0 + \vec{y}) - \vec{x}_0 = \vec{y} \in \mathcal{W}_1$. Επομένως δείξαμε ότι το τυχόν διάνυσμα $\vec{y}$ του $\mathcal{W}_2$ ανήκει στον $\mathcal{W}_1$, δηλαδή $\mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{W}_1$.

Αν $\mathcal{W}_2 \nsubseteq \mathcal{W}_1$, τότε εργαζόμενοι παρόμοια, θα έχουμε $\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2$. □

Πρόχειρη Δοκιμασία

Να βρεθεί συγκεκριμένο παράδειγμα δύο υπόχωρων $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$ έτσι ώστε η ένωση $\mathcal{W}_2 \cup \mathcal{W}_1$ να μην είναι υπόχωρος.

(Υπόδειξη: Θεωρείστε στο καρτεσιανό επίπεδο $\mathbb{R}^2$ δύο διαφορετικές ευθείες οι οποίες διέρχονται από την αρχη των αξόνων $(0, 0)$.)

Η Προταση 3.3.3 μας οδηγεί στο να αναζητήσουμε τον μικρότερο υπόχωρο του $\mathcal{V}$ ο οποίος περιέχει κάποιους δεδομένους υπόχωρους του. Έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.3.4 *Έστω $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \cdots, \mathcal{W}_n$ ένα πεπερασμένο σύνολο υπόχωρων του $\mathcal{V}$. Το* **άθροισμα** *των υπόχωρων $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \cdots, \mathcal{W}_n$ ορίζεται να είναι το ακόλουθο υποσύνολο του $\mathcal{V}$:*

$$\boxed{\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n := \{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n \mid \vec{x}_i \in \mathcal{W}_i,\ \forall i = 1, 2, \cdots, n\}}$$

Σημειώνουμε ότι το πρώτο μέλος της παραπάνω σχέσης είναι απλά ένας συμβολισμός καθώς η πράξη πρόσθεσης $+$ του $\mathcal{V}$ έχει ορισθεί σε στοιχεία του $\mathcal{V}$ και όχι σε υποσύνολα του.

Η επόμενη πρόταση δικαιολογεί την εισαγωγή της έννοιας του αθροίσματος υπόχωρων.

Πρόταση 3.3.5 *Το άθροισμα $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$ πεπερασμένου πλήθους υπόχωρων $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \cdots, \mathcal{W}_n$ του $\mathcal{V}$, είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$ ο οποίος περιέχει όλους τους υπόχωρους $\mathcal{W}_i$. Επιπρόσθετα το άθροισμα $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$ είναι ο μικρότερος υπόχωρος του $\mathcal{V}$ ο οποίος περιέχει τους υπόχωρους $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \cdots, \mathcal{W}_n$.*

Δηλαδή αν $\mathcal{W}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$ έτσι ώστε $\mathcal{W}_i \subseteq \mathcal{W}, \forall i = 1, 2, \cdots, n$, τότε $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n \subseteq \mathcal{W}$.

Απόδειξη: Έχουμε δείξει στο Λήμμα 3.1.2 ότι το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ του $\mathcal{V}$ ανήκει σε κάθε υπόχωρο, άρα και σε κάθε έναν από τους $\mathcal{W}_i$. Επειδή $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} + \cdots + \vec{0}$, έπεται ότι $\vec{0} \in \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$ και ιδιαίτερα το τελευταίο σύνολο δεν είναι κενό. Έστω τώρα $\vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n$ και $\vec{y} = \vec{y}_1 + \cdots + \vec{y}_n$ δύο διανύσματα του $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$. Τότε χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα και αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης (Αξιώματα **(ΔΧ1)**, **(ΔΧ2)**), θα έχουμε: $\vec{x} + \vec{y} = (\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n) + (\vec{y}_1 + \cdots + \vec{y}_n) = (\vec{x}_1 + \vec{y}_1) + \cdots + (\vec{x}_n + \vec{y}_n)$. Επειδή οι $\mathcal{W}_i$ είναι υπόχωροι του $\mathcal{V}$ και $\vec{x}_i, \vec{y}_i \in \mathcal{W}_i$, $\forall i = 1, \cdots, n$, έπεται ότι $\vec{x}_i + \vec{y}_i \in \mathcal{W}_i$, $\forall i = 1, \cdots, n$. Επομένως $\vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$. Αν $k \in \mathbb{K}$ και $\vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n \in \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$, τότε $k\vec{x} = k(\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n) = k\vec{x}_1 + \cdots + k\vec{x}_n$. Επειδή οι $\mathcal{W}_i$ είναι υπόχωροι του $\mathcal{V}$ και $\vec{x}_i \in \mathcal{W}_i$, $\forall i = 1, \cdots, n$, έπεται ότι $k\vec{x}_i \in \mathcal{W}_i$, $\forall i = 1, \cdots, n$. Τότε όμως $k\vec{x} \in \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$. Επομένως το σύνολο $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$ είναι ενας υπόχωρος του $\mathcal{V}$.

Για κάθε $i = 1, 2, \cdots, n$, έστω $\vec{x}_i \in \mathcal{W}_i$. Τότε επειδή, σύμφωνα με το Αξίωμα **(ΔΧ3)**, έχουμε $\vec{x}_i = \vec{0} + \cdots + \vec{0} + \vec{x}_i + \vec{0} + \cdots + \vec{0}$ και επειδή $\vec{0} \in \mathcal{W}_i$, έπεται ότι $\vec{x}_i \in \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$. Επομένως θα έχουμε $\mathcal{W}_i \subseteq \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$. Έστω τώρα $\mathcal{W}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$ με την ιδιότητα $\mathcal{W}_i \subseteq \mathcal{W}$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$. Επειδή ο $\mathcal{W}$ είναι κλειστός στην πράξη της πρόσθέσης και περιέχει κάθε διάνυσμα $\vec{x}_i$, με $\vec{x}_i \in \mathcal{W}_i$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$, έπεται οτι θα περιέχει και το άθροισμα τους $\vec{x}_1+\cdots+\vec{x}_n$. Με άλλα λόγια θα περιέχει κάθε διάνυσμα του $\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2+\cdots+\mathcal{W}_n$ και επομένως $\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2+\cdots+\mathcal{W}_n \subseteq \mathcal{W}$. □

Σχόλιο 3.3.2 *1. Μπορούμε να ορίσουμε και το άθροισμα άπειρου πλήθους υπόχωρων του $\mathcal{V}$ ως εξής: Έστω $\{\mathcal{W}_i \mid i \in I\}$ μιά συλλογή υπόχωρων του $\mathcal{V}$, όπου I είναι ένα άπειρο σύνολο δεικτών. Τότε το άθροισμα του απείρου πλήθους υπόχωρων $\mathcal{W}_i$ ορίζεται να είναι το υποσύνολο του $\mathcal{V}$:*

$$\sum_{i\in I}\mathcal{W}_i := \Big\{ \sum_{i\in I}\vec{x}_i \ \in \ \mathcal{V} \ \mid \ \vec{x}_i \in \mathcal{W}_i \ \ \textit{και} \ \ \vec{x}_i = \vec{0},$$

$$\forall i \in I \ \ \textit{εκτός από ένα πεπερασμένο σύνολο δεικτών}\Big\}$$

Όπως και στην Πρόταση 3.3.5 μπορεί κανείς να δειξει ότι το υποσύνολο $\sum_{i\in I}\mathcal{W}_i$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V}$ ο οποίος περιέχει τους $\mathcal{W}_i$ και είναι ο μικρότερος υπόχωρος του $\mathcal{V}$ με αυτή την ιδιότητα.

2. Από την Πρόταση 3.3.5 προκύπτει άμεσα ότι $\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2+\cdots+\mathcal{W}_n = \langle \cup_{i=1}^n \mathcal{W}_i\rangle$, δηλαδή το άθροισμα των υπόχωρων συμπίπτει με τον υπόχωρο που παράγεται από την ένωση των υπόχωρων $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \cdots, \mathcal{W}_n$.

Όπως θα δούμε αργότερα η πλέον ενδιαφέρουσα περίπτωση, όταν έχουμε να μελετήσουμε ένα άθροισμα υπόχωρων, είναι το άθροισμα αυτό να είναι ευθύ με την έννοια του ακόλουθου ορισμού.

Ορισμός 3.3.6 *Έστω $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \cdots, \mathcal{W}_n$ ένα πεπερασμένο σύνολο υπόχωρων του $\mathcal{V}$. Το άθροισμα $\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2+\cdots+\mathcal{W}_n$ των υπόχωρων $\mathcal{W}_i$ καλείται* **ευθύ άθροισμα***, αν ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:*

$$\boxed{\mathcal{W}_i \cap (\mathcal{W}_1+\cdots+\mathcal{W}_{i-1}+\mathcal{W}_{i+1}+\cdots+\mathcal{W}_n) = \{\vec{0}\}, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n}$$

Δηλαδή αν η τομή καθενός από τους υπόχωρους $\mathcal{W}_i$ με το άθροισμα των υπολοίπων είναι ο μηδενικός υπόχωρος.

Αν το άθροισμα $\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2+\cdots+\mathcal{W}_n$ είναι ευθύ, θα το συμβολίζουμε με:

$$\boxed{\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_n}$$

Παρατήρηση 3.3.7 *Αν έχουμε δύο υπόχωρους $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$, τότε από τον ορισμό 3.3.6 προκύπτει άμεσα ότι το άθροισμα $\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2$ είναι ευθύ, δηλαδή έχουμε $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$, αν-ν $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \{\vec{0}\}$.*

Θα δούμε τώρα δύο παραδείγματα στα οποία το άθροισμα δυο υπόχωρων είναι ευθύ και συμπίπτει με όλον τον διανυσματικό χώρο. Αν και διαφορετικής φύσης και τα δύο βασίζονται πάνω στην ίδια ιδέα.

Παράδειγμα 3.3.3 *Στον διανυσματικό χώρο $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, θεωρούμε τον υπόχωρο $\mathcal{F}_A(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ των άρτιων συναρτήσεων και τον υπόχωρο $\mathcal{F}_\Pi(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ των περιττών συναρτήσεων. Θα δείξουμε ότι*

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{F}_A(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{F}_\Pi(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια τυχούσα συνάρτηση. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ οι οποίες ορίζονται ως εξής:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad g(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \textit{και} \quad h(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Τότε $g(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = g(x)$ και $h(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = -h(x)$. Άρα η g είναι άρτια και η h είναι περιττή. Από την άλλη πλευρά $g(x) + h(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = f(x)$. Δηλαδή η τυχούσα συνάρτηση f είναι άθροισμα μίας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των υπόχωρων $\mathcal{F}_A(\mathbb{R}, \mathbb{R}) + \mathcal{F}_\Pi(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ είναι όλος ο χώρος: $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{F}_A(\mathbb{R}, \mathbb{R}) + \mathcal{F}_\Pi(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Επομένως για να δείξουμε την ζητούμενη σχέση, αρκεί, σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.3.7, να δειξουμε ότι $\mathcal{F}_A(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{F}_\Pi(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{\vec{0}\}$ όπου $\vec{0}$ είναι η μηδενική συνάρτηση $\vec{0}(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Έστω $f \in \mathcal{F}_A(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{F}_\Pi(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, δηλαδή η f είναι ταυτόχρονα άρτια και περιττή. Τότε, $\forall x \in \mathbb{R}$, θα έχουμε: $f(-x) = f(x) = -f(x)$. Δηλαδή $2f(x) = 0$ και επομένως $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι $f = \vec{0}$. Επομένως $\mathcal{F}_A(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{F}_\Pi(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{\vec{0}\}$.

Παράδειγμα 3.3.4 *Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ των τετραγωνικών $n \times n$-πινάκων πάνω από ένα σώμα $\mathbb{K}$, θεωρούμε τον υπόχωρο $\mathbb{S}_{n\times n}(\mathbb{K})$ των συμμετρικών πινάκων και τον υπόχωρο $\mathbb{A}_{n\times n}(\mathbb{K})$ των αντισυμμετρικών πινάκων, βλέπε την Πρόχειρη δοκιμασία στο τελος της ενότητας 3.1.*

Πρόχειρη Δοκιμασία

Ακολουθώντας την ιδέα του Παραδείγματος 3.3.3 να δείξετε ότι:

$$\boxed{\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) = \mathbb{S}_{n\times n}(\mathbb{K}) \oplus \mathbb{A}_{n\times n}(\mathbb{K})}$$

Θα δούμε τώρα έναν σημαντικό χαρακτηρισμό του ευθέως αθροίσματος υπόχωρων. Πρώτα όμως χρειαζόμαστε έναν ορισμό:

Ορισμός 3.3.8 *1. Έστω $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα σύνολο διανυσμάτων του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$. Ένα διάνυσμα $\vec{x}$ του $\mathcal{V}$ (το οποίο υποθέτουμε ότι ανήκει* *στον υπόχωρο* $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n \rangle$*), θα λέμε ότι* **γράφεται κατά μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων** $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$*, αν:*

$$\boxed{\vec{x} = k_1\vec{x}_1 + \cdots + k_n\vec{x}_n = l_1\vec{x}_1 + \cdots + l_n\vec{x}_n \implies k_i = l_i, \ \forall i = 1, 2, \cdots, n}$$

Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι το διάνυσμα $\vec{x}$ *έχει* **μοναδικότητα γραφής ως προς τα διανύσματα** $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$.

2. Έστω $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \cdots, \mathcal{W}_n$ n *το πλήθος υπόχωροι του διανυσματικού χώρου* $\mathcal{V}$*. Ένα διάνυσμα* $\vec{x}$ *το οποίο ανήκει στον υπόχωρο* $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$*, θα λέμε ότι* **γράφεται κατά μοναδικό τρόπο σαν άθροισμα διανυσμάτων των υπόχωρων** $\mathcal{W}_i$*, αν:*

Αν $\vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n$ *και* $\vec{x} = \vec{y}_1 + \cdots + \vec{y}_n$*, όπου* $\vec{x}_i, \vec{y}_i \in \mathcal{W}_i, \forall i = 1, \cdots, n$

$$\textit{τότε ισχύει:} \quad \vec{x}_i = \vec{y}_i, \ \ \forall i = 1, \cdots, n.$$

Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι το διάνυσμα $\vec{x}$ *έχει* **μοναδικότητα γραφής ως προς τους υπόχωρους** $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \cdots, \mathcal{W}_n$.

Πρόταση 3.3.9 *Έστω* $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \cdots, \mathcal{W}_n$ n *το πλήθος υπόχωροι του διανυσματικού χώρου* $\mathcal{V}$*. Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

1. *Το άθροισμα* $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$ *είναι ευθύ:* $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_n$

2. *Κάθε διάνυσμα* $\vec{x}$ *του υπόχωρου* $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$ *γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα διανυσμάτων των υπόχωρων* $\mathcal{W}_i$.

3. *Αν* $\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n = \vec{0}$*, όπου* $\vec{x}_i \in \mathcal{W}_i$*,* $\forall i = 1, \cdots, n$*, τότε ισχύει ότι:* $\vec{x}_i = \vec{0}$*,* $\forall i = 1, \cdots, n$.

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει κυκλικά: 1. ⇒ 2. ⇒ 3. ⇒ 1.

1. ⇒ 2. Έστω ότι το άθροισμα των υπόχωρων $\mathcal{W}_i$ είναι ευθύ και έστω $\vec{x}$ ένα διάνυσμα του $\mathcal{W}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_n$ το οποίο υποθέτουμε ότι μπορούμε να το γράψουμε με δύο τρόπους σαν άθροισμα διανυσμάτων από τους $\mathcal{W}_i$:

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n = \vec{y}_1 + \cdots + \vec{y}_n, \ \ \vec{x}_i, \vec{y}_i \in \mathcal{W}_i, \forall i = 1, \cdots, n \qquad (*)$$

Για κάθε $i = 1, 2, \cdots, n$, προσθέτοντας και στα δύο μέλη το διάνυσμα $-\vec{y}_i$, θα έχουμε $\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_{i-1} + (\vec{x}_i - \vec{y}_i) + \vec{x}_{i+1} + \cdots + \vec{x}_n = \vec{y}_1 + \cdots + \vec{y}_{i-1} + \vec{y}_{i+1} + \cdots + \vec{y}_n$. Στην τελευταία σχέση μεταφέρουμε τα διανύσματα $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \cdots, \vec{x}_n$ στο δεύτερο μέλος, δηλαδή προσθέτουμε στο πρώτο μέλος τα διανύσματα $-\vec{x}_1, \cdots, -\vec{x}_{i-1}, -\vec{x}_{i+1}, \cdots, -\vec{x}_n$. Τότε χρησιμοποιώντας τα Αξιώματα του ορισμού 2.1.1 θα έχουμε την σχέση:

$$\vec{x}_i - \vec{y}_i = (\vec{y}_1 - \vec{x}_1) + \cdots + (\vec{y}_{i-1} - \vec{x}_{i-1}) + (\vec{y}_{i+1} - \vec{x}_{i+1}) + \cdots + (\vec{y}_n - \vec{x}_n) \ \ (**)$$

Στην σχέση $(**)$, το πρώτο μέλος ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{W}_i$, διότι $\vec{x}_i, \vec{y}_i \in \mathcal{W}_i$. Το δεύτερο μέλος της σχέσης ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{W}_1 + \cdots + \mathcal{W}_{i-1} + \mathcal{W}_{i+1} + \cdots + \mathcal{W}_n$, διότι $\vec{x}_j, \vec{y}_j \in \mathcal{W}_j$, $j = 1, \cdots, n$, $j \neq i$. Άρα $\vec{x}_i - \vec{y}_i \in \mathcal{W}_i \cap (\mathcal{W}_1 + \cdots + \mathcal{W}_{i-1} + \mathcal{W}_{i+1} + \cdots + \mathcal{W}_n)$. Επειδή το άθροισμα των υπόχωρων $\mathcal{W}_i$ είναι ευθύ, η τομή αυτή είναι ίση με $\{\vec{0}\}$, και επομένως $\vec{x}_i = \vec{y}_i$. Επειδή αυτό συμβαίνει για κάθε $i = 1, 2, \cdots, n$, συμπεραίνουμε ότι θα έχουμε μοναδικότητα γραφής του διανύσματος $\vec{x}$ ως προς τους υπόχωρους $\mathcal{W}_1, \cdots, \mathcal{W}_n$.

2. $\Rightarrow$ 3. Υποθέτουμε ότι ισχύει το 2. και έστω ότι $\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n = \vec{0}$, όπου $\vec{x}_i \in \mathcal{W}_i$, $\forall i = 1, \cdots, n$. Επειδή $\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n = \vec{0} + \cdots + \vec{0}$ και το διάνυσμα $\vec{0}$ ανήκει σε καθε υπόχωρο $\mathcal{W}_i$, από την μοναδικότητα της γραφής έπεται ότι $\vec{x}_i = \vec{0}$, $\forall i = 1, \cdots, n$.

3. $\Rightarrow$ 1. Υποθέτουμε ότι ισχύει το 3. και έστω $\vec{x}$ ένα διάνυσμα του $\mathcal{V}$ το οποίο ανήκει στην τομή $\mathcal{W}_i \cap (\mathcal{W}_1 + \cdots + \mathcal{W}_{i-1} + \mathcal{W}_{i+1} + \cdots + \mathcal{W}_n)$. Αυτό σημαίνει ότι $\vec{x} \in \mathcal{W}_i$ και $\vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_{i-1} + \vec{x}_{i+1} + \cdots + \vec{x}_n$, όπου $\vec{x}_i \in \mathcal{W}_i$, $\forall i = 1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n$. Προσθέτοντας σε αυτή τη σχέση το διάνυσμα $-\vec{x}$, και χρησιμοποιώντας τα Αξιώματα του ορισμού 2.1.1, θα έχουμε την σχέση

$$\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_{i-1} + (-\vec{x}) + \vec{x}_{i+1} + \cdots + \vec{x}_n = \vec{0} \qquad (***)$$

Επειδή ο $\mathcal{W}_i$ είναι υπόχωρος και $\vec{x} \in \mathcal{W}_i$, έπεται ότι $-\vec{x} \in \mathcal{W}_i$. Αυτό σημαίνει ότι στην σχέση $(***)$, το πρώτο μέλος ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{W}_1 + \cdots + \mathcal{W}_{i-1} + \mathcal{W}_i + \mathcal{W}_{i+1} + \cdots + \mathcal{W}_n$. Τότε όμως από την υπόθεση μας, θα έχουμε $\vec{x} = \vec{0}$ και $\vec{x}_j = 0$, $\forall j = 1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n$. Αυτό δείχνει ότι $\mathcal{W}_i \cap (\mathcal{W}_1 + \cdots + \mathcal{W}_{i-1} + \mathcal{W}_{i+1} + \cdots + \mathcal{W}_n) = \{\vec{0}\}$. Επειδή αυτό συμβαίνει για κάθε $i = 1, 2, \cdots, n$, θα έχουμε από το ορισμό 3.3.6 ότι το άθροισμα $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$ είναι ευθύ. $\square$

Το ακόλουθο σημαντικό πόρισμα είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 3.3.9 και του Πορίσματος 3.2.6.

Πόρισμα 3.3.10 *Έστω $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \cdots, \mathcal{W}_n$ n το πλήθος υπόχωροι του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_n$.

2. *Κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ του $\mathcal{V}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα $\vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n$ διανυσμάτων $\vec{x}_i$ των υπόχωρων $\mathcal{W}_i$.*

Απόδειξη: 1. $\Rightarrow$ 2. Επειδή $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_n$, θα έχουμε ότι κάθε διάνυσμα του $\mathcal{V}$ θα ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{W}_1 + \cdots + \mathcal{W}_n$, και επομένως θα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων των υπόχωρων $\mathcal{W}_i$. Η μοναδικότητα της γραφής προκύπτει από την Πρόταση 3.3.9 διότι το άθροισμα $\mathcal{W}_1 + \cdots + \mathcal{W}_n$ είναι ευθύ.

2. $\Rightarrow$ 1. Η συνθήκη στο 2. έχει σαν συνέπεια ότι $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 + \cdots + \mathcal{W}_n$. Επιπρόσθετα, σύμφωνα με την Πρόταση 3.3.9, η μοναδικότητα της γραφής δείχνει ότι το άθροισμα είναι ευθύ. $\square$

Θα δούμε τώρα δύο παραδείγματα διανυσματικών χώρων οι οποίοι είναι ευθέα αθροίσματα υπόχωρων τους.

Παράδειγμα 3.3.5 *Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}^n$ των n-άδων με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Τότε ισχύει:*

$$\boxed{\mathbb{K}^n = \langle \vec{e}_1 \rangle \oplus \langle \vec{e}_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \vec{e}_n \rangle}$$

όπου $\vec{e}_i = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0, 0)$ είναι το διάνυσμα του $\mathbb{K}^n$ που έχει 1 στην i-οστή συντεταγμένη και παντού αλλού 0.

Από το Παράδειγμα 3.2.9 έπεται ότι κάθε διάνυσμα $\vec{x} = (k_1, \cdots, k_n)$ του $\mathbb{K}^n$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{e}_i$, δηλαδή $\vec{x} = k_1\vec{e}_1 + \cdots + k_n\vec{e}_n$. Επειδή $k_i\vec{e}_i \in \langle \vec{e}_i \rangle$, θα έχουμε $\vec{x} \in \langle \vec{e}_1 \rangle + \langle \vec{e}_2 \rangle + \cdots + \langle \vec{e}_n \rangle$, και επομένως $\mathbb{K}^n = \langle \vec{e}_1 \rangle + \langle \vec{e}_2 \rangle + \cdots + \langle \vec{e}_n \rangle$. Έστω $\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n = \vec{0}$, όπου $\vec{x}_i \in \langle \vec{e}_i \rangle$, $\forall i = 1, \cdots, n$. Τότε υπάρχουν $k_i \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε $\vec{x}_i = k_i\vec{e}_i$, $\forall i = 1, \cdots, n$. Επομένως $\vec{0} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n = k_1\vec{e}_1 + \cdots + k_n\vec{e}_n$. Επειδή $k_1\vec{e}_1 + \cdots + k_n\vec{e}_n = k_1(1, 0, \cdots, 0, 0) + \cdots + k_n(0, 0, \cdots, 0, 1) = (k_1, \cdots, k_n)$, θα έχουμε προφανώς $k_i = 0$, δηλαδή $\vec{x}_i = 0$, $\forall i = 1, \cdots, n$. Τότε όμως από το Πρόταση 3.3.9, συμπεραίνουμε ότι το άθροισμα $\langle \vec{e}_1 \rangle + \langle \vec{e}_2 \rangle + \cdots + \langle \vec{e}_n \rangle$ είναι ευθύ. Επομένως $\mathbb{K}^n = \langle \vec{e}_1 \rangle \oplus \langle \vec{e}_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \vec{e}_n \rangle$.

Παράδειγμα 3.3.6 *Έστω τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$:*

$$\mathcal{W}_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}, \quad \mathcal{W}_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$$

Θα δείξουμε ότι: $\mathbb{R}^3 = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$.

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι τα υποσύνολα $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$. Επιπρόσθετα από την μορφή έπεται άμεσα ότι $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \{(0, 0, 0)\} = \{\vec{0}\}$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι κάθε διάνυσμα $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, μπορεί να γραφεί ως εξής: $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, όπου $\vec{x}_1 \in \mathcal{W}_1$, και $\vec{x}_2 \in \mathcal{W}_2$. Πραγματικα θα έχουμε: $\vec{x} = (x, y, z) = (x, x, x) + (0, y - x, z - x)$ και προφανώς $\vec{x}_1 := (x, x, x) \in \mathcal{W}_1$ και $\vec{x}_2 := (0, y - x, z - x) \in \mathcal{W}_2$.

Όπως είδαμε η έννοια του ευθέως αθροίσματος υπόχωρων αφορά την μοναδικότητα γραφής διανυσμάτων από τους υπόχωρους. Είναι εύλογο να αναρωτηθεί κανείς αν αφορά και την μοναδικότητα των υπόχωρων. Δηλαδή αν $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ και $\mathcal{W}_3$ είναι υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$ και ισχύει $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$, μπορούμε τότε να συμπεράνουμε ότι $\mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_3$; Αν και, όπως θα δούμε αργότερα, ισχύει κάτι ασθενέστερο από την ισότητα, η απάντηση είναι αρνητική όπως δείχνει και η ακόλουθη:

Πρόχειρη Δοκιμασία

Έστω ο υπόχωρος $\mathcal{W} = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$. Να βρεθούν άπειροι το πλήθος υπόχωροι $\mathcal{Z}_n$, $n \geq 1$, του $\mathbb{R}^2$ έτσι ώστε: $\mathbb{R}^2 = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}_n$, $\forall n \geq 1$, και επιπλέον $\mathcal{Z}_1 \neq \mathcal{Z}_n$, αν $n \geq 1$.

(Υπόδειξη: Θεωρείστε τους ακόλουθους υπόχωρους του $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{Z}_1 := \{(0,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{Z}_n := \{((n-1)x, nx) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}, \forall n \geq 2.$$

)

3.4 Ασκήσεις

Άσκηση 3.4.1 *Να βρεθεί ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα:*

$$\vec{x}_1 = (2,1,-3), \quad \vec{x}_2 = (3,2,-5), \quad \vec{x}_3 = (1,-1,1)$$

Ακολούθως να εξετασθεί αν το διάνυσμα $\vec{x} = (6,2,-7)$ μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$.

Άσκηση 3.4.2 *Ποιοί από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστοί;*

1. *Το σύνολο $\mathcal{E} := \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid ab \geq 0\}$ είναι διανυσματικος χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$, με τις συνηθισμένες πράξεις προσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού.*

   Σωστό $\boxed{\textit{Λάθος}}$

   Λύση *Τα διάνυσματα $\vec{x} = (0,3,0,0)$ και $\vec{y} = (-1,-2,0,0)$ ανήκουν στο $\mathcal{E}$, αλλά $\vec{x} + \vec{y} = (-1,1,0,0) \notin \mathcal{E}$.*

2. *Το σύνολο $\{(k_1, \cdots, k_n) \in \mathbb{K}^n \mid k_1 + \cdots + k_n = 0\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{K}^n$.*

   $\boxed{\textit{Σωστό}}$ *Λάθος*

   Λύση *Βλέπε το Παράδειγμα 3.1.6.*

3. *Το σύνολο $\mathcal{W} = \{(k_1, \cdots, k_n) \in \mathbb{K}^n \mid k_1 + \cdots + k_n = 1\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{K}^n$.*

   Σωστό $\boxed{\textit{Λάθος}}$

   Λύση *Τα διανύσματα $\vec{x} = (1,0,\cdots,0), \vec{y} = (0,1,\cdots,0)$ ανήκουν στο $\mathcal{W}$, αλλά το άθροισμα τους δεν ανήκει.*

4. *Το σύνολο* $\{(k_1, \cdots, k_n) \in \mathbb{K}^n \mid k_1 = k_n\}$ *είναι υπόχωρος του* $\mathbb{K}^n$.

   $\boxed{\text{Σωστό}}$ *Λάθος*

5. *Το σύνολο* $\mathcal{W}$ *των πολυωνύμων με βαθμό ακριβώς* n, $(n \geq 1)$, *είναι υποχωρος του* $\mathbb{R}[t]$.

   Σωστό $\boxed{\text{Λάθος}}$

   Λύση *Τα πολυώνυμα* $1+t^n$, t^n *ανήκουν στο* $\mathcal{W}$, *αλλά* $(1+t^n) - t^n = 1 \notin \mathcal{W}$.

6. *Το σύνολο* $\mathcal{W}(\rho)$ *των πολυωνύμων* $P(t)$ *πάνω από το* $\mathbb{R}$ *τα οποία δέχονται τον πραγματικό αριθμό* ρ *σαν ρίζα, δηλαδή* $P(\rho) = 0$, *είναι υπόχωρος του* $\mathbb{R}[t]$.

   $\boxed{\text{Σωστό}}$ *Λάθος*

7. *Το σύνολο* $\mathcal{W}$ *των ακολουθιών* $(x_n)_{n\geq 0}$ *πραγματικών αριθμών, για τις οποίες ισχύει:* $x_n^2 = x_{n-2}$, $\forall n \geq 2$, *είναι υπόχωρος του χώρου των ακολουθιών* $\mathbb{A}(\mathbb{R})$.

   Σωστό $\boxed{\text{Λάθος}}$

   Λύση *Η σταθερή ακολουθία* $(1, 1, \cdots, 1, \cdots)$ *ανήκει στο* $\mathcal{W}$, *αλλά η ακολουθία* $(-3)(1, 1, \cdots, 1, \cdots) = (-3, -3, \cdots, -3, \cdots)$ *δεν ανήκει.*

8. *Το σύνολο* $\mathcal{W}$ *των* n*-άδων* $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ *πραγματικών αριθμών για τις οποίες ισχύει* $k_1 k_2 \ldots k_n = 0$, *είναι υπόχωρος του* $\mathbb{K}^n$.

   Σωστό $\boxed{\text{Λάθος}}$

   Λύση $(1, 1, \cdots, 1, 0) \in \mathcal{W}$ *και* $(0, 0, \cdots, 0, 1) \in \mathcal{W}$, *αλλά* $(1, 1, \cdots, 1, 0) + (0, 0, \cdots, 0, 1) = (1, 1, \cdots, 1, 1) \notin \mathcal{W}$.

Άσκηση 3.4.3 *Έστω* $p, q \in \mathbb{R}$, *σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να δειχθεί ότι το σύνολο των «αναδρομικών» ακολουθιών*

$$\mathcal{V} := \{(x_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{A}(\mathbb{R}) \mid x_{n+2} = p x_{n+1} + q x_n\}$$

είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{A}(\mathbb{R})$ *των ακολουθιών πάνω από το* $\mathbb{R}$.

Άσκηση 3.4.4 *Να προσδιορισθεί ο πραγματικός αριθμός* λ *έτσι ώστε το διάνυσμα* $\vec{x} = (1, -2, \lambda)$ *να είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων* $\vec{x}_1 = (3, 0, -2), \vec{x}_2 = (2, -1, -5) \in \mathbb{R}^3$.

Άσκηση 3.4.5 *Να προσδιορισθούν όλοι οι υπόχωροι του* $\mathbb{R}^3$.
(Υπόδειξη: Εργαστείτε όπως στο Παράδειγμα 3.1.4.)

Άσκηση 3.4.6 *Στον διανυσματικό χώρο* $\mathbb{R}_2[t]$ *των πολυωνύμων πάνω από το* $\mathbb{R}$, *θεωρούμε τους υπόχωρους:*

$$\mathcal{W}_1 = \langle t^2 + t, t + 1\rangle, \quad \mathcal{W}_2 = \langle -t^2 + t + 2, t + 3\rangle$$

Να προσδιορισθεί ο υπόχωρος $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$.

Άσκηση 3.4.7 *Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του* $\mathbb{R}^3$*:*

$$\vec{x} = (2, 3, -1), \quad \vec{y} = (1, -2, 2), \quad \vec{z} = (3, 7, 0), \quad \vec{w} = (5, 0, -7)$$

Να δείξετε ότι: $\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = \langle \vec{z}, \vec{w}\rangle$.

Άσκηση 3.4.8 *Έστω* $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ *τρία διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου* $\mathcal{V}$ *για τα οποία ισχύει:* $k_1\vec{x} + k_2\vec{y} + k_3\vec{z} = \vec{0}$. *Αν* $k_1k_3 \neq 0$, *τότε να δείξετε ότι ισχύει:* $\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = \langle \vec{y}, \vec{z}\rangle$.

Άσκηση 3.4.9 *Να εξετασθεί αν τα ακόλουθα υποσύνολα*

1. $\mathcal{W}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$.
2. $\mathcal{W}_2 = \{(x, 2x + 1) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$.
3. $\mathcal{W}_3 = \{(2x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$.
4. $\mathcal{W}_4 = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$.

είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$. *Είναι τα υποσύνολα* $\mathcal{W}_3 \cap \mathcal{W}_4$ *και* $\mathcal{W}_3 + \mathcal{W}_4$ *υπόχωροι του* $\mathbb{R}^2$*; Είναι το υποσύνολο* $\mathcal{W}_3 \cup \mathcal{W}_4$ *υπόχωρος του* $\mathbb{R}^2$*;*

Άσκηση 3.4.10 *Να δείξετε ότι:* $\mathbb{K}^3 = \langle \vec{x}_1\rangle \oplus \langle \vec{x}_2\rangle \oplus \langle \vec{x}_3\rangle$, *όπου:*

$$\vec{x}_1 = (1, 0, 0), \quad \vec{x}_2 = (1, 1, 0), \quad \vec{x}_3 = (1, 1, 1)$$

Άσκηση 3.4.11 *Έστω* $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ *τρεις υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου* $\mathcal{E}$, *έτσι ώστε* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. *Να δείξετε ότι:*

$$\mathcal{U} + (\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = (\mathcal{U} + \mathcal{V}) \cap (\mathcal{U} + \mathcal{W}$$

Άσκηση 3.4.12 *Να δείξετε ότι τα ακόλουθα υποσύνολα του* $\mathbb{R}^3$*:*

$$\mathcal{W}_1 = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \ \mathcal{W}_2 = \{(0, 0, c) \mid c \in \mathbb{R}\}, \ \mathcal{W}_1 = \{(d, 0, d) \mid d \in \mathbb{R}\},$$

είναι υπόχωροι και ακολούθως να δείξετε ότι $\mathbb{R}^3 = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$.

Άσκηση 3.4.13 *Να δείξετε ότι:*

$$\mathbb{R}_2[t] = \langle 1, t-1, (t-2)(t-1) \rangle$$

Άσκηση 3.4.14 *Έστω τα ακόλουθα υποσύνολα του διανυσματικού χώρου* $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *των* 2×2 *πινάκων πάνω απο το* $\mathbb{R}$*:*

$$\mathcal{W} = \Big\{ \begin{pmatrix} x\ y \\ z\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \Big\}, \quad \mathcal{Z} = \Big\{ \begin{pmatrix} x\ 0 \\ 0\ y \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbb{R} \Big\}$$

Να δείξετε ότι τα σύνολα $\mathcal{W}, \mathcal{Z}$ *είναι υπόχωροι του* $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *και ακολούθως να προσδιορισθούν οι υπόχωροι* $\mathcal{W} \cap \mathcal{Z}$ *και* $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$.

Άσκηση 3.4.15 *Να βρεθεί το σύνολο λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος*

$$x + 2y + z = 0, \quad x + y + 2z = 0, \quad 2x + y + z = 0$$

Άσκηση 3.4.16 *Θεωρούμε τους* 2×2 *πίνακες πραγματικών αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν τα $a, b \in \mathbb{R}$*, έτσι ώστε ο πίνακας* $C = \begin{pmatrix} a & b \\ -37 & -3 \end{pmatrix}$ *να είναι γραμμικος συνδυασμός των* A, B.

Άσκηση 3.4.17 *Έστω* $\mathcal{V}$ *ο υπόχωρος του διανυσματικού χώρου* $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$*, ο οποιος παράγεται από τους πίνακες:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

και έστω $\mathcal{W}$ *ο υπόχωρος του* $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$*, ο οποιος παράγεται από τους πίνακες:*

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν οι υπόχωροι: $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ *και* $\mathcal{V} + \mathcal{W}$.

Άσκηση 3.4.18 *Έστω* $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *ο διανυσματικός χώρος των* $m \times n$ *πινάκων πάνω από το σώμα* $\mathbb{K}$. *Να βρεθεί ένα σύνολο γεννητόρων του* $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

(Υπόδειξη: Θεωρείστε τους mn το πλήθος πίνακες E_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, όπου ο πίνακας E_{ij} έχει στην (i,j)-θέση 1 και παντού αλλού 0. Δηλαδή:

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

όπου το 1 εμφανίζεται στην τομή της j-στήλης με την i-γραμμή. Ακολούθως δείξτε ότι $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) = \langle E_{ij} \rangle_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$.)

Άσκηση 3.4.19 *Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{A}(\mathbb{R})$ των ακολουθιών με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, και έστω $p, q \in \mathbb{R}$ με $q \neq 0$. Έστω*

$$\mathcal{V} = \{(x_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{A}(\mathbb{R}) \,|\, x_n = px_{n-1} + qx_{n-2}\}$$

το υποσύνολο των αναγωγικών ακολουθιών. Να δείξετε ότι το $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{A}(\mathbb{R})$ και ακολούθως να προσδιορίσετε ένα σύνολο γεννητόρων του.

Κεφάλαιο 4

Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

Στο παρόν Κεφάλαιο θα αναπτύξουμε τις θεμελιώδεις έννοιες της γραμμικής ανεξαρτησίας και της βάσης οι οποίες μας επιτρέπουν να κάνουμε με αναλλοίωτο τρόπο αποτελεσματικούς υπολογισμούς σε διανυσματικούς χώρους. Οι έννοιες αυτές θα μας οδηγήσουν στην βασική έννοια της διάστασης, δηλαδή στην αντιστοίχηση ενός αριθμού σε κάθε διανυσματικό χώρο, η οποία σε συνδυασμό με την έννοια της γραμμικής απεικόνισης θα μας επιτρέψει να ταξινομούμε διανυσματικούς χώρους.

Από τώρα και στο εξής σταθεροποιούμε ένα σώμα $\mathbb{K}$ και έναν διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}$ υπεράνω του $\mathbb{K}$. Συνήθως αυτό το υποδηλώνουμε γράφοντας $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ εννοώντας ότι ο $\mathcal{V}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος ορισμένος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.

4.1 Γραμμική Ανεξαρτησία

Έστω $\{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{V}$. Υπενθυμίζουμε ότι ένας γραμμικός συνδυασμός $k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n$ των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n$ καλείται *μη-τετριμμένος* αν $(k_1, k_2, \cdots, k_n) \neq (0, 0, \cdots, 0)$, δηλαδή τουλάχιστον ένα από τα k_i είναι διάφορο του μηδενός.

Ορισμός 4.1.1 *Έστω $\mathcal{X} := \{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{V}$. Το σύνολο $\mathcal{X}$ καλείται* **γραμμικά εξαρτημένο** *αν υπάρχει μη-τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n$ ο οποίος να είναι το μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{V}$. Δηλαδή: υπάρχουν αριθμοί $k_1, k_2, \cdots, k_n$*

από το σώμα $\mathbb{K}$ οι οποίοι δεν είναι ταυτόχρονα όλοι ίσοι με 0, έτσι ώστε:

$$k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n = \vec{0}$$

Ένα άπειρο σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{A}$ του $\mathcal{V}$ καλείται **γραμμικά εξαρτημένο** *αν το $\mathcal{A}$ περιέχει ένα πεπερασμένο γραμμικά εξαρτημένο υποσύνολο.*

Στην συνέχεια σημαντικό ρόλο στην θεωρία θα διαδραματίσει η λογικά αντίθετη έννοια της γραμμικής εξάρτησης:

Ορισμός 4.1.2 *Ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{X}$ του $\mathcal{V}$ καλείται* **γραμμικά ανεξάρτητο** *αν το $\mathcal{X}$ δεν είναι γραμμικά εξαρτημένο. Δηλαδή αν $\mathcal{X} := \{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n\}$, τότε το $\mathcal{X}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αν ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:*

$$\boxed{\forall k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{K}: \; k_1\vec{x}_1 + \cdots + k_n\vec{x}_n = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0}$$

Ένα άπειρο σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{A}$ του $\mathcal{V}$ καλείται **γραμμικά ανεξάρτητο** *αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathcal{A}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο.*

Σχόλιο 4.1.1 *Είναι φανερό από το ορισμό ότι η έννοια της γραμμικής εξάρτησης ή ανεξαρτησίας διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$ εξαρτάται από το σώμα υπεράνω του οποίου έχει ορισθεί ο $\mathcal{V}$. Το ακόλουθο παράδειγμα είναι ενδεικτικό.*

Θεωρούμε το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών το οποίο, όπως έχουμε δει μπορεί να θεωρηθεί σαν διανυσματικός χώρος υπεράνω του εαυτού του, και τότε γράφουμε $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$, αλλά μπορεί να θεωρηθεί και σαν διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$ και τότε γράφουμε $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. Θεωρούμε το σύνολο διανυσμάτων $\{1, i\} \subseteq \mathbb{C}$. Τότε το σύνολο $\{1, i\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο υποσύνολο του $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$, όπως δείχνει η σχέση: $(-i)1 + 1i = 0$ η οποία είναι μια τετριμμένη σχέση εξάρτησης των $1, i$ με μη-μηδενικούς συντελεστές από το $\mathbb{C}$. Αντίθετα το σύνολο $\{1, i\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. Πραγματικά, όπως μπορεί κανείς να δει πολύ εύκολα, δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί k, l έτσι ώστε $k1 + li = 0$ και $(k, l) \neq (0, 0)$.

Σχόλιο 4.1.2 *Σύμφωνα με τον ορισμό για να δείξουμε ότι ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{X} := \{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο εργαζόμαστε ως εξής: Υποθέτουμε ότι υπάρχουν αριθμοί $k_1, \cdots, k_n$ από το σώμα $\mathbb{K}$, έτσι ώστε $k_1\vec{x}_1 + \cdots + k_n\vec{x}_n = \vec{0}$. Αν από αυτή τη σχέση γραμμικής εξάρτησης καταφέρουμε να δείξουμε ότι αναγκαστικά έχουμε ότι $k_1 = \cdots k_n = 0$, τότε το σύνολο $\mathcal{X}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Διαφορετικά το $\mathcal{X}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.*

Το παρακάτω παράδειγμα είναι ενδεικτικό.

Παράδειγμα 4.1.3 *Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ υπεράνω του $\mathbb{R}$, θεωρούμε τα ακόλουθα σύνολα διανυσμάτων:*

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1,0,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$$

$$\mathcal{X} = \{\vec{x}_1 = (0,1,1),\ \vec{x}_2 = (1,0,1),\ \vec{x}_3 = (1,1,0)\}$$

$$\mathcal{Y} = \{\vec{y}_1 = (1,-1,0),\ \vec{y}_2 = (-1,0,-1),\ \vec{y}_3 = (1,2,3)\}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό θα εξετάσουμε αν τα παραπάνω σύνολα είναι γραμμικά ανεξάρτητα ή γραμμικά εξαρτημένα.

1. *Έστω ότι υπάρχουν αριθμοί $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{K}$, έτσι ώστε: $(*) : k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + k_3\vec{e}_3 = \vec{0}$. Τότε $k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) = (0,0,0)$, δηλαδή ισχύει $(k_1,0,0) + (0,k_2,0) + (0,0,k_3) = (0,0,0)$. Ισοδύναμα έχουμε $(k_1,k_2,k_3) = (0,0,0)$, και επομένως $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Δηλαδή δείξαμε ότι το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

2. *Έστω ότι υπάρχουν αριθμοί $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{K}$, έτσι ώστε: $(*) : k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + k_3\vec{x}_3 = \vec{0}$. Τότε $k_1(0,1,1) + k_2(1,0,1) + k_3(1,1,0) = (0,0,0)$, δηλαδή ισχύει $(0,k_1,k_1) + (k_2,0,k_2) + (k_3,k_3,0) = (0,0,0)$. Ισοδύναμα θα έχουμε $(k_2+k_3, k_1+k_3, k_1+k_2) = (0,0,0)$. Δηλαδή θα πρέπει οι αριθμοί k_1, k_2, k_3 να ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα:*

$$k_2 + k_3 = 0,\ \ k_1 + k_3 = 0,\ \ k_1 + k_2 = 0$$

   Αφαιρώντας την δεύτερη εξίσωση από την πρώτη έχουμε την εξίσωση $k_2 - k_1 = 0$, την οποία αν προσθέσουμε στην τρίτη, θα έχουμε $2k_1 = 0$, δηλαδή $k_1 = 0$. Τότε προφανώς θα έχουμε και $k_2 = k_3 = 0$ και επομένως δείξαμε ότι η σχέση $(*)$ την οποία υποθέσαμε ότι ισχύει μας οδηγεί στο ότι αναγκαστικά ισχύει $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Άρα το σύνολο $\mathcal{X}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

3. *Έστω ότι υπάρχουν αριθμοί $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{K}$, έτσι ώστε: $(*) : k_1\vec{y}_1 + k_2\vec{y}_2 + k_3\vec{y}_3 = \vec{0}$. Τότε $k_1(1,-1,0) + k_2(-1,0,-1) + k_3(1,2,3) = (0,0,0)$, δηλαδή ισχύει $(k_1,-k_1,0) + (-k_2,0,-k_2) + (k_3,2k_3,3k_3) = (0,0,0)$. Ισοδύναμα θα έχουμε $(k_1 - k_2 + k_3, -k_1 + 2k_3, -k_2 + 3k_3) = (0,0,0)$. Δηλαδή θα πρέπει οι αριθμοί k_1, k_2, k_3 να ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα:*

$$k_1 - k_2 + k_3 = 0,\ \ -k_1 + 2k_3 = 0,\ \ -k_2 + 3k_3 = 0$$

Από την δεύτερη εξίσωση έχουμε $k_1 = 2k_3$, από την τρίτη εξίσωση έχουμε $k_2 = 3k_3$, και αυτές οι τιμές ικανοποιούν την πρώτη εξίσωση. Επομένως το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και το σύνολο λύσεων είναι $\{(2t, 3t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Επιλέγοντας $t \neq 0$, π.χ. $t = 1$, έχουμε μια μη-μηδενική λύση $k_1 = 2, k_2 = 3, k_3 = 1$ η οποία εκ΄ κατασκευής ικανοποιεί την σχέση $2\vec{y}_1 + 3\vec{y}_2 + \vec{y}_3 = \vec{0}$. Σύμφωνα με τον ορισμό το σύνολο $\mathcal{Y}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Πρόχειρη Δοκιμασία

Εργαζόμενοι όπως στο Παράδειγμα 4.1.3 να δείξετε ότι στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}^n$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, το σύνολο

$$\{\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0),\ \ \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0),\ \ \cdots\ \ \vec{e}_n = (0, 0, 0, \cdots, 1)\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Λήμμα 4.1.3 *1. Έστω $\vec{x} \in \mathcal{V}$. Τότε το σύνολο $\{\vec{x}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν-ν $\vec{x} \neq \vec{0}$. Ιδιαίτερα το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.*

2. Έστω $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathcal{V}$. Τότε το σύνολο $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο αν-ν ένα εκ των $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του άλλου. Δηλαδή είτε $\vec{x}_1 = k\vec{x}_2$ ή $\vec{x}_2 = l\vec{x}_1$, για κατάλληλα $k, l \in \mathbb{K}$.

Απόδειξη: 1. Αν $\vec{x} = \vec{0}$, τότε $1\vec{x} = \vec{0}$. Επειδή $1 \neq 0$, έπεται ότι το $\{\vec{0}\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, και επομένως αν το $\{\vec{x}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε $\vec{x} \neq \vec{0}$. Αντίστροφα αν $\vec{x} \neq \vec{0}$, έστω $k \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $k\vec{x} = \vec{0}$. Αν $k \neq 0$, τότε υπάρχει το k^{-1} και επομένως πολλαπλασιάζοντας με το k^{-1} την σχέση $k\vec{x} = \vec{0}$, θα έχουμε $k^{-1}(k\vec{x}) = k^{-1}\vec{0} = \vec{0}$. Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την σχέση $(k^{-1}k)\vec{x} = 1\vec{x} = \vec{x} = \vec{0}$, η οποία είναι αδύνατη. Άρα $k = 0$, και επομένως το μονοσύνολο $\{\vec{x}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

2. Αν τα $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ •είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε $k\vec{x}_1 + l\vec{x}_2 = \vec{0}$, όπου $k, l \in \mathbb{K}$ και είτε $k \neq 0$ ή $l \neq 0$. Αν $k \neq 0$, τότε $\vec{x}_1 = -\frac{l}{k}\vec{x}_2$· όμοια αν $l \neq 0$, τότε $\vec{x}_2 = \frac{k}{l}\vec{x}_1$. Αντίστροφα αν $\vec{x}_2 = l\vec{x}_1$, τότε $l\vec{x}_1 + (-1)\vec{x}_2 = \vec{0}$, και επομένως τα $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ είναι γραμμικά εξαρτημένα· παρόμοια αν $\vec{x}_1 = k\vec{x}_2$, τότε $\vec{x}_1 + (-k)\vec{x}_2 = \vec{0}$, και επομένως τα $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. □

Παράδειγμα 4.1.4 *Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^3$ υπεράνω του $\mathbb{C}$, θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{x} = (1, 0, i)$ και $\vec{y} = (1 + i, 1, -1)$. Αν τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$ ήσαν γραμμικά εξαρτημένα, τότε σύμφωνα με το Λήμμα 4.1.3 θα υπήρχε μιγαδικός* *αριθμός k έτσι ώστε $\vec{x} = k\vec{y}$ ή $\vec{y} = k\vec{x}$. Στην πρώτη περίπτωση θα έχουμε $(1, 0, i) = k(1 + i, 1, -1) = (k + ki, k, -k)$, δηλαδή $k + ki = 1, k = 0, -k = i$ το οποίο είναι αδύνατον. Παρόμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι $\vec{y} = k\vec{x}$. Επομένως το σύνολο $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Παράδειγμα 4.1.5 *Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}_n[t]$ των πολυωνύμων υπεράνω του $\mathbb{K}$ με βαθμό το πολύ n, θεωρούμε $n+1$ πολυώνυμα $P_0(t), P_1(t), \cdots, P_n(t)$, έτσι ώστε $\deg P_i(t) = i, i = 0, 1, \cdots, n$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\{P_0(t), P_1(t), \cdots, P_n(t)\}$ είναι γραμμικα ανεξάρτητο.*

Επειδή ο βαθμός του $P_i(t)$ είναι i, έπεται ότι:

$$P_i(t) = a_{i0} + a_{i1}t + a_{i2}t^2 + \cdots + a_{ii-1}t^{i-1} + a_{ii}t^i, \;\; a_{ii} \neq 0, \quad 0 \leq i \leq n$$

Έστω $P(t) := k_0P_0(t) + k_1P_1(t) + \cdots + k_nP_n(t) = 0$, όπου $k_i \in \mathbb{K}$, $\forall i = 0, 1, \cdots, n$. Θέτοντας $P(t) = b_0 + b_1t + b^2t^2 + \cdots + b_nt^n$, από τον ορισμό της πρόσθεσης πολυωνύμων θα έχουμε τότε ότι:

$(\mathbf{0})$ $b_0 = k_0a_{00} + k_1a_{10} + k_2a_{20} + \cdots + k_na_{n0}$.

$(\mathbf{1})$ $b_1 = k_1a_{11} + k_2a_{21} + k_3a_{31} + \cdots + k_na_{n1}$.

$$\vdots$$

$(\mathbf{n-1})$ $b_{n-1} = k_{n-1}a_{n-1n-1} + k_na_{nn-1}$.

$(\mathbf{n})$ $b_n = k_na_{nn}$.

Επειδή το πολυώνυμο $P(t)$ από την υπόθεση μας είναι το μηδενικό, θα έχουμε $b_i = 0$, $\forall i = 0, 1, \cdots, n$. Επειδή $a_{nn} \neq 0$, από τη σχέση $(\mathbf{n})$ έπεται ότι $k_n = 0$. Τότε όμως από τη σχέση $(\mathbf{n-1})$, επειδή $a_{n-1n-1} \neq 0$, έπεται ότι $k_{n-1} = 0$. Συνεχίζοντας κατ' αυτό το τρόπο θα εχουμε τελικά $k_n = k_{n-1} = \cdots = k_1 = k_0 = 0$, και επομένως τα πολυώνυμα $P_0(t), P_1(t), \cdots, P_n(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Πρόχειρη Δοκιμασία

Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ υπεράνω του $\mathbb{R}$ θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{x} = (x_1, x_2)$ και $\vec{y} = (y_1, y_2)$. Να δείξετε ότι το σύνολο $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν-ν $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$.

Πρόχειρη Δοκιμασία

Θεωρούμε στο $\mathbb{R}^2$ δύο διανύσματα τα οποία είναι μοναδιαία και κάθετα. Να δείξετε ότι τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 4.1.6 *Έστω $\mathbb{K}[t]$ ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Στο Παράδειγμα 3.2.3 είδαμε ότι $\mathbb{K}[t] = \langle 1, t, t^2, \cdots, t^n, \cdots \rangle$, δηλαδή ο $\mathbb{K}[t]$ παράγεται υπεράνω του $\mathbb{K}$ από τα άπειρα το πλήθος πολυώνυμα $1, t, t^2, \cdots, t^n, \cdots$. Θα δείξουμε ότι αυτά τα πολυώνυμα είναι και γραμμικά ανεξάρτητα. Σύμφωνα με τον ορισμό αρκεί να δείξουμε ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο S του συνόλου $\{1, t, t^2, \cdots, t^n, \cdots\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Προφανώς κάθε τέτοιο υποσύνολο είναι της μορφής $\{t^{n_1}, t^{n_2}, \cdots, t^{n_k}\}$, όπου $n_1, n_2, \cdots, n_k \geq 0$ είναι διακεκριμένοι μη-αρνητικοί ακέραιοι. Αν $l_1 t^{n_1} + l_2 t^{n_2} + \cdots + l_k t^{n_k} = 0$, τότε το πολυώνυμο $P(t) = l_1 t^{n_1} + l_2 t^{n_2} + \cdots + l_k t^{n_k}$ είναι το μηδενικό, και επομένως από τον ορισμό θα έχουμε $l_1 = l_2 = \cdots = l_k = 0$. Άρα το σύνολο S είναι γραμμικά ανεξάρτητο και επομένως το σύνολο γεννητόρων $1, t, t^2, \cdots, t^n, \cdots$ του $\mathbb{K}[t]$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Θα αποδείξουμε τώρα κάποιες βασικές προτάσεις που δείχνουν ότι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο ικανοποιεί σημαντικές ιδιότητες. Αν και αυτές οι ιδιότητες ισχύουν (με ανάλογη απόδειξη) και για άπειρα σύνολα διανυσμάτων, χάριν ευκολίας θα περιορισθούμε σε πεπερασμένα σύνολα.

Η παρακατω Πρόταση αποτελει γενίκευση του Λήμματος 4.1.3.

Πρόταση 4.1.4 *Έστω $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ ένας διανυσματικός χώρος υπερανω του σώματος $\mathbb{K}$.*

1. Κάθε υποσύνολο ένος γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου του $\mathcal{V}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

2. Κάθε υπερσύνολο ενός γραμμικά εξαρτημένου συνόλου του $\mathcal{V}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Απόδειξη: 1. Έστω $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{V}$, και έστω $\mathcal{X}' := \{\vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2}, \cdots, \vec{x}_{i_k}\}$ ένα υποσύνολο του $\mathcal{X}$, όπου $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ είναι ένα υποσύνολο του συνόλου $\{1, 2, \cdots, n\}$. Έστω ότι $\lambda_{i_1}\vec{x}_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_k}\vec{x}_{i_k} = \vec{0}$. Αν $\{\vec{x}_{i_{k+1}}, \vec{x}_{i_{k+2}}, \cdots, \vec{x}_{i_n}\}$ είναι τα υπόλοιπα στοιχεία του $\mathcal{X}$ (δηλαδή $\mathcal{X} = \{\vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2}, \cdots, \vec{x}_{i_k}, \vec{x}_{i_{k+1}}, \cdots, \vec{x}_{i_n}\}$), τότε η τελευταία σχέση γράφεται ισοδύναμα $\lambda_{i_1}\vec{x}_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_k}\vec{x}_{i_k} + 0\vec{x}_{i_{k+1}} + \cdots + 0\vec{x}_{i_n} = \vec{0}$. Επειδή το $\mathcal{X}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, έπεται ότι $\lambda_{i_1} = \lambda_{i_2} = \cdots = \lambda_{i_n} = 0$. Άρα το $\mathcal{X}'$ είναι γραμμικα ανεξάρτητο.

2. Έστω $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα γραμμικά εξαρτημένο σύνολο διανυσματων του $\mathcal{V}$, και έστω $\mathcal{X}'$ ένα (πεπερασμένο) υπερσύνολο του. Τότε υπάρχουν στοιχεία $\vec{x}_{n+1}, \cdots, \vec{x}_m$ του $\mathcal{X}'$, έτσι ώστε $\mathcal{X}' = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}, \cdots, \vec{x}_m\}$. Επειδή το $\mathcal{X}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, έπεται ότι υπάρχουν αριθμοί $k_1, k_2, \cdots, k_n$,

όχι όλοι ταυτόχρονα ίσοι με 0, έτσι ώστε: $k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n = \vec{0}$. Η τελευταία σχέση γράφεται ισοδύναμα ως εξής: $k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n + 0\vec{x}_{n+1} + \cdots + 0\vec{x}_m = \vec{0}$. Επειδή ένα τουλάχιστον από τα k_i είναι μη-μηδενικό, έπεται ότι τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}, \cdots, \vec{x}_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. □

Πρόταση 4.1.5 *1. Το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n\}$ του $\mathcal{V}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο αν-ν τουλάχιστον ένα από τα $\vec{x}_i$ είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.*

2. Υποθέτουμε ότι το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n\}$ του $\mathcal{V}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και έστω $\vec{x} \in \mathcal{V}$. Τότε το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{X} \cup \{\vec{x}\} = \{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n, \vec{x}\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο αν-ν το $\vec{x}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n$.

Απόδειξη: 1. Έστω ότι το $\mathcal{X}$ είναι γραμμικα εξαρτημένο· τότε υπάρχουν αριθμοί $k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{K}$, όχι όλοι ταυτόχρονα ίσοι με μηδεν, έτσι ώστε: $k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_{i-1}\vec{x}_{i-1} + k_i\vec{x}_i + k_{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + k_n\vec{x}_n = \vec{0}$. Υποθέτουμε, χωρις βλάβη της γενικότητας, ότι $k_i \neq 0$. Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση γραμμικής εξάρτησης με k_i^{-1}, θα έχουμε την σχέση $k_i^{-1}k_1\vec{x}_1 + k_i^{-1}k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_i^{-1}k_{i-1}\vec{x}_{i-1} + \vec{x}_i + k_i^{-1}k_{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + k_i^{-1}k_n\vec{x}_n = \vec{0}$. Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την σχέση $\vec{x}_i = (-k_i^{-1}k_1)\vec{x}_1 + (-k_i^{-1}k_2)\vec{x}_2 + \cdots + (-k_i^{-1}k_{i-1})\vec{x}_{i-1} + (-k_i^{-1}k_{i+1})\vec{x}_{i+1} + \cdots + (-k_i^{-1}k_n)\vec{x}_n$. Άρα το $\vec{x}_i$ είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων διανυσματων του συνόλου $\mathcal{X}$.

Αντίστροφα αν ένα από τα διανύσματα του συνόλου $\mathcal{X}$, π.χ. το $\vec{x}_i$, είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, τότε υπάρχουν αριθμοί $k_1, \cdots, k_{i-1}, k_{i+1}, \cdots, k_n \in \mathbb{K}$, έτσι ώστε $\vec{x}_i = k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_{i-1}\vec{x}_{i-1} + k_{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + k_n\vec{x}_n$. Αυτή η σχέση είναι προφανως ισοδύναμη με την $k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_{i-1}\vec{x}_{i-1} + (-1)\vec{x}_i + k_{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + k_n\vec{x}_n = \vec{0}$ η οποία είναι ένας μη-τετριμμένος (διότι ο συντελεστής του $\vec{x}_i$ είναι $-1 \neq 0$) γραμμικός συνδυασμος των διανυσμάτων του συνολου $\mathcal{X}$ ίσος με το μηδενικο διάνυσμα. Άρα το $\mathcal{X}$ ειναι γραμμικά ανεξάρτητο.

2. Υποθέτουμε ότι το $\mathcal{X} \cup \{\vec{x}\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο σύνολο. Τότε θα έχουμε την σχέση $(*) : k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_{i-1}\vec{x}_{i-1} + k_i\vec{x}_i + k_{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + k_n\vec{x}_n + k\vec{x} = \vec{0}$, για κάποιους αριθμούς $k_1, \cdots, k_n, k \in \mathbb{K}$ οι οποίοι δεν είναι όλοι ταυτόχρονα ίσοι με 0. Αν $k = 0$, τότε θα έχουμε $k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_{i-1}\vec{x}_{i-1} + k_i\vec{x}_i + k_{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + k_n\vec{x}_n = \vec{0}$, και επομένως, λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των διανυσμάτων $\{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n\}$, θα έχουμε $k_1 = \cdots = k_n = 0$, το οποίο είναι άτοπο διότι ένα τουλάχιστον από τα $k_1, \cdots, k_n, k$ είναι $\neq 0$. Άρα $k \neq 0$, και επομένως πολλαπλασιάζοντας την σχέση $(*)$ με k^{-1}, θα έχουμε την σχέση $\vec{x} = (-k^{-1}k_1)\vec{x}_1 + \cdots + k^{-1}k_n\vec{x}_n$ η οποία δείχνει ότι το $\vec{x}$ είναι

γραμμικός συνδυασμός των $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n$. Το αντίστροφο προκύπτει άμεσα απο το 1.

$\square$

Πρόταση 4.1.6 *Έστω $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathcal{V}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το σύνολο S είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

2. *Κάθε διάνυσμα του $\langle S \rangle$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του S (με άλλα λόγια αν $k_1\vec{x}_1 + \cdots + k_n\vec{x}_n = l_1\vec{x}_1 + \cdots + l_n\vec{x}_n$, τότε $k_1 = l_1, k_2 = l_2, \cdots, k_n = l_n$).*

Απόδειξη: 1. $\Rightarrow$ 2. Έστω ότι $k_1\vec{x}_1 + \cdots + k_n\vec{x}_n = l_1\vec{x}_1 + \cdots + l_n\vec{x}_n$, όπου $k_i, l_i \in \mathbb{K}$, $1 \le i \le n$. Η σχέση αυτή είναι προφανώς ισοδύναμη με την σχέση $(k_1 - l_1)\vec{x}_1 + \cdots + (k_n - l_n)\vec{x}_n = \vec{0}$, η οποία λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n$ έχει σαν συνέπεια ότι $k_i - l_i = 0$, $\forall i = 1, \cdots, n$. Επομένως $k_i = l_i$, $\forall i = 1, \cdots, n$.

2. $\Rightarrow$ 1. Έστω ότι $k_1\vec{x}_1 + \cdots + k_n\vec{x}_n = \vec{0}$, όπου $k_i \in \mathbb{K}$, $1 \le i \le n$. Επειδή $0\vec{x} = \vec{0}$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{V}$, η παραπάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα $k_1\vec{x}_1 + \cdots + k_n\vec{x}_n = 0\vec{x}_1 + \cdots + 0\vec{x}_n$. Τότε από την υπόθεση 2. έπεται ότι $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$.
$\square$

Συνδυάζοντας την παραπάνω Πρόταση 4.1.6 με την Πρόταση 3.3.9, έχουμε το ακόλουθο Πόρισμα.

Πόρισμα 4.1.7 *Έστω $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathcal{V}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το σύνολο S είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

2. *Το άθροισμα υπόχωρων $\langle \vec{x}_1 \rangle + \langle \vec{x}_2 \rangle + \cdots + \langle \vec{x}_n \rangle$ είναι ευθύ.*

3. *$\langle S \rangle = \langle \vec{x}_1 \rangle \oplus \langle \vec{x}_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \vec{x}_n \rangle$.*

Άσκηση 4.1.7 *1. Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{x} = (3 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$, $\vec{y} = (7, 1 + 2\sqrt{2})$ του $\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικά εξαρτημένα όταν το $\mathbb{R}^2$ θεωρηθεί σαν διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$, αλλά τα $\vec{x}$, $\vec{y}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα όταν το $\mathbb{R}^2$ θεωρηθεί σαν διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{Q}$.*

2. Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{x} = (1 - i, i)$, $\vec{y} = (2, -1 + i)$ του $\mathbb{C}^2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα όταν το $\mathbb{C}^2$ θεωρηθεί σαν διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$.

3. Αν a είναι ένας άρρητος αριθμός, να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\{1, a\}$ του $\mathbb{R}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα όταν το $\mathbb{R}$ θεωρηθεί σαν διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{Q}$.

Άσκηση 4.1.8 *Για ποιές τιμές του $r \in \mathbb{R}$, το ακόλουθα διανύσματα*

$$\vec{x} = (r, 1, 1), \quad \vec{y} = (1, r, 1), \quad \vec{z} = (1, 1, r)$$

του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα;

Άσκηση 4.1.9 *Στον διανυσματικό χώρο $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι οι συναρτήσεις*

$$f_1(t) = e^t, \quad f_2(t) = e^{2t}, \quad f_3(t) = e^{3t}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Να γενικευθεί το αποτέλεσμα για n το πλήθος συναρτήσεις.

Άσκηση 4.1.10 *Να βρεθούν αναγκαίες και ικανές συνθήκες για τα $a, b, c \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε τα διανύσματα*

$$\vec{x} = (1, 1, 1, a), \quad \vec{y} = (1, 0, 1, b), \quad \vec{z} = (-2, 2, -2, c)$$

του $\mathbb{R}^4$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άσκηση 4.1.11 *Έστω $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$, και έστω $\vec{x}$ ένα διάνυσμα του $\mathcal{V}$ το οποίο δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$, δηλαδή $\vec{x} \notin \langle S \rangle$. Να δείξετε ότι το σύνολο $\{\vec{x}_1 + \vec{x}, \vec{x}_2 + \vec{x}, \cdots, \vec{x}_n + \vec{x}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

4.2 Η Έννοια της Βάσης

Έστω $\mathcal{V}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Συνδυάζοντας την έννοια των γεννητόρων ενός διανυσματικού χώρου και την έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας, αποκτούμε την έννοια της βάσης η οποία είναι θεμελιώδους σημασίας στην θεωρία των διανυσματικών χώρων.

Ορισμός 4.2.1 *Ένα υποσύνολο $\mathcal{B}$ του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ καλείται* **βάση** *του $\mathcal{V}$ (υπεράνω του $\mathbb{K}$) αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

1. *Το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*
2. *Το σύνολο $\mathcal{B}$ παράγει τον χώρο $\mathcal{V}$, δηλαδή $\mathcal{V} = \langle S \rangle$.*

Μια από τις σημαντικότερες ιδιότητες της βάσης περιγράφεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.2.2 *Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ ένα υποσύνολο του $\mathcal{V}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}$.*
2. *Κάθε διάνυσμα του $\mathcal{V}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του συνόλου $\mathcal{B}$.*
3. *$\mathcal{V} = \langle \vec{e}_1 \rangle \oplus \langle \vec{e}_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \vec{e}_n \rangle$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.1.6 και του Πορίσματος 4.1.7. □

Ο κύριος σκοπός της παρούσης παραγράφου είναι να δείξουμε ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος έχει τουλάχιστον μια βάση. Στην επόμενη παράγραφο θα δείξουμε επιπρόσθετα ότι δύο τυχούσες βάσεις περιέχουν τον ίδιο αριθμό διανυσμάτων.

Όμως πριν περάσουμε στην απόδειξη του σημαντικού αυτού αποτελέσματος, η οποία θα απαιτήσει αρκετά βήματα, θα δώσουμε κάποια παραδείγματα βάσεων.

Παράδειγμα 4.2.1 *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και $n \geq 1$.*

1. *Για κάθε $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, το μονοσύνολο $\{k\}$ αποτελεί μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}$ υπεράνω του $\mathbb{K}$.*

Πράγματικά: Κάθε μη-μηδενικό στοιχείο $k \in \mathbb{K}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και επιπλέον παράγει τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}$ υπεράνω του εαυτού του διότι $\forall l \in \mathbb{K}$: $l = (lk^{-1})k$. Άρα το μονοσύνολο $\{k\}$ είναι βάση του $\mathbb{K}$.

2. *Το σύνολο $\mathcal{B} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ αποτελεί μια βάση, η οποία καλείται* **κανονική***, του $\mathbb{K}^n$, όπου (το 1 εμφανίζεται στην i συνιστώσα):*

$$\vec{e}_i = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0), \quad 1 \leq i \leq n$$

Πράγματι, έχουμε ήδη δείξει προηγούμενα ότι το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο γεννητόρων του $\mathbb{K}^n$. Επομένως το συνολο $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathbb{K}^n$.

3. *Το σύνολο $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, \cdots, t^n\}$ είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}_n[t]$ των πολυωνύμων με βαθμό το πολύ n, υπεράνω του $\mathbb{K}$.*

Πράγματι: Είναι προφανές ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, \cdots, t^n\}$ παράγει τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}_n[t]$ (δες και το Παράδειγμα 3.2.9). Επιπλέον από το Παράδειγμα 4.1.5 έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι και γραμμικά ανεξάρτητο. Επομένως το $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathbb{K}_n[t]$.

Το ακόλουθο σπουδαίο αποτέλεσμα δείχνει ότι ανάμεσα σε ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων το οποίο περιέχεται σε ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων μπορούμε να παρεμβάλλουμε μια βάση.

Θεώρημα 4.2.3 *[Παρεμβολή Βάσης] Έστω $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ και έστω $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ δύο υποσύνολα του $\mathcal{V}$ για τα οποία ισχύουν τα εξής:*

1. *Το σύνολο $\mathcal{F}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*
2. *Το σύνολο $\mathcal{G}$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$.*

Τότε υπάρχει μια βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{V}$ έτσι ώστε: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$.

Απόδειξη: Θεωρούμε την συλλογή $\mathfrak{H}$ όλων των υποσυνόλων $\mathcal{H}$ του $\mathcal{V}$ τα οποία ικανοποιούν τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

1. Κάθε υποσύνολο $\mathcal{H} \in \mathfrak{H}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
2. Για κάθε υποσύνολο $\mathcal{H} \in \mathfrak{H}$ ισχύει: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$.

Δηλαδή:

$$\mathfrak{H} := \{\mathcal{H} \subseteq \mathcal{V} \mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \text{ και το } \mathcal{H} \text{ είναι γραμμικά ανεξάρτητο}\}$$

Παρατηρούμε ότι η συλλογή υποσυνόλων $\mathfrak{H}$ είναι μη-κενή και περιέχει πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία, δηλαδή πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathcal{V}$ με τις ιδιότητες 1. και 2. Πράγματι· η συλλογή $\mathfrak{H}$ είναι μη-κενή διότι περιέχει το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, και το πλήθος των στοιχείων της $\mathfrak{H}$ είναι πεπερασμένο διότι κάθε στοιχείο της $\mathfrak{H}$ περιέχεται στο σύνολο $\mathcal{G}$ και το $\mathcal{G}$ είναι πεπερασμένο από την υπόθεση. Επομένως μπορούμε να διαλέξουμε εκείνο το στοιχείο $\mathcal{B}$ του $\mathfrak{H}$ με το μικρότερο πλήθος στοιχείων. Με άλλα λόγια από την κατασκευή του το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι το υποσύνολο του $\mathcal{V}$ με το μικρότερο πλήθος στοιχείων το οποίο είναι γραμμικά ανεξάρτητο και περιέχει το $\mathcal{F}$ και περιέχεται στο $\mathcal{G}$: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$. Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathcal{B}$.

Επειδή το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι εκ' κατασκευής γραμμικά ανεξάρτητο, αρκεί να δείξουμε ότι παράγει τον $\mathcal{V}$. Έστω $\vec{x} \in \mathcal{G}$ ένα τυχόν διάνυσμα του $\mathcal{G}$. Αν $\vec{x} \in \mathcal{B}$, τότε το $\vec{x}$ είναι τετριμμένα γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του $\mathcal{B}$. Έστω $\vec{x} \notin \mathcal{B}$. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{B}' := \mathcal{B} \cup \{\vec{x}\}$. Επειδή προφανώς το σύνολο $\mathcal{B}'$ ικανοποιεί τη σχέση $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{G}$ και έχει μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων από το $\mathcal{B}$, δεν μπορεί να είναι γραμμικά ανεξάρτητο από την κατασκευή του $\mathcal{B}$. Άρα το $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, και επομένως από την Πρόταση 4.1.5 έπεται ότι το $\vec{x}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του συνόλου $\mathcal{B}$.

Επειδή το $\mathcal{G}$ είναι σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$, κάθε διάνυσμα του $\mathcal{B}$ θα είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του $\mathcal{G}$. Συνδυάζοντας τις παραπάνω παρατηρήσεις, καταλήγουμε στο ότι το $\vec{x}$ θα είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του συνόλου $\mathcal{B}$. Άρα σε κάθε περίπτωση το τυχόν διάνυσμα $\vec{x}$ του $\mathcal{G}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του $\mathcal{B}$. Επειδή από την υπόθεση το σύνολο $\mathcal{G}$ είναι σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$, έπεται ότι και το $\mathcal{B}$ είναι σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$. Άρα το $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}$ η οποία εκ' κατασκευής περιέχει το σύνολο $\mathcal{F}$ και περιέχεται στο σύνολο $\mathcal{G}$. $\square$

Το παραπάνω θεώρημα έχει δύο σημαντικά πορίσματα τα οποία δείχνουν ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος έχει τουλάχιστον μια βάση και επιπρόσθετα σε έναν τέτοιον χώρο κάθε γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση.

Πόρισμα 4.2.4 *[Ύπαρξη Βάσης] Έστω ότι $\mathcal{G} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$. Τότε υπάρχει ένα υποσύνολο $\mathcal{B}$ του $\mathcal{G}$ το οποίο είναι μια βάση του $\mathcal{V}$, δηλαδή υπάρχουν δείκτες $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$ έτσι ώστε το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2}, \cdots, \vec{x}_{i_k}\}$ να είναι βάση του $\mathcal{V}$.*

Ιδιαίτερα κάθε πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος έχει τουλάχιστον μια βάση.

Απόδειξη: Θέτοντας $\mathcal{F} = \emptyset$, και παρατηρώντας ότι τετριμμένα το $\mathcal{F}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, από το Θεώρημα 4.2.3 έπεται ότι υπάρχει μια βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{V}$ με την ιδιότητα $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$. Επομένως υπάρχουν δείκτες $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$ έτσι ώστε το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2}, \cdots, \vec{x}_{i_k}\}$ να είναι βάση του $\mathcal{V}$. $\square$

Πόρισμα 4.2.5 *[Επέκταση Γραμμικά Ανεξάρτητου Υποσυνόλου σε μια Βάση] Έστω $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$, και έστω $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k\}$ ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{V}$. Τότε υπάρχουν διανύσματα $\vec{x}_{k+1}, \vec{x}_{k+2}, \cdots, \vec{x}_n$, όπου $n \geq 1$, έτσι ώστε το σύνολο $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}, \vec{x}_{k+2}, \cdots, \vec{x}_n\}$ να είναι μια βάση του $\mathcal{V}$.*

Απόδειξη: Θέτουμε $\mathcal{F} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k\}$. Επειδή ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{V}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος, υπάρχει ένα σύνολο γεννητόρων $\mathcal{G}'$ του $\mathcal{V}$. Θέτουμε $\mathcal{G} := \mathcal{F} \cup \mathcal{G}'$. Τότε προφανώς το $\mathcal{G}$ παραμένει σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$ και εκ' κατασκευής περιέχει το σύνολο $\mathcal{F}$:: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Τότε από το Θεώρημα 4.2.3 έπεται ότι υπάρχει μια βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{V}$ με την ιδιότητα $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν διανύσματα $\vec{x}_{k+1}, \vec{x}_{k+2}, \cdots, \vec{x}_n$, όπου $n \geq 1$, έτσι ώστε το σύνολο $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}, \vec{x}_{k+2}, \cdots, \vec{x}_n\}$ να είναι μια βάση του $\mathcal{V}$. $\square$

Παράδειγμα 4.2.2 *Θεωρούμε τα διανύσματα*

$$\vec{x} = (2,1,4,3), \quad \vec{y} = (2,1,2,0)$$

του $\mathbb{R}^4$. *Θα δείξουμε ότι τα* $\vec{x}, \vec{y}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα και θα προσδιορίσουμε δύο διανύσματα* $\vec{z}, \vec{w}$ *έτσι ώστε το σύνολο* $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}\}$ *να αποτελεί βάση του* $\mathbb{R}^4$.

1. Έστω $k\vec{x} + l\vec{y} = \vec{0}$. *Τότε* $k(2,1,4,3) + l(2,1,2,0) = (0,0,0,0) \Rightarrow (2k+2l, k+l, 4k+2l, 3k) = (0,0,0,0)$. *Προφανώς η τελευταία σχέση δίνει ότι* $k = l = 0$ *και επομένως τα* $\vec{x}, \vec{y}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

2. Θεωρούμε την κανονική βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ *του* $\mathbb{R}^4$. *Αν το* $\vec{e}_1$ *ήταν γραμμικός συνδυασμός των* $\vec{x}$ *και* $\vec{y}$, *τότε θα είχαμε μια σχέση της μορφής:*

$$\vec{e}_1 = a\vec{x} + b\vec{y}, \text{ δηλαδή: } (1,0,0,0) = a(2,1,4,3) + b(2,1,2,0)$$

Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την $(1,0,0,0) = (2a+2b, 1+b, 4a+2b, 3a)$ *η οποία εύκολα βλέπουμε ότι είναι αδύνατη. Επομένως, από την Πρόταση 4.1.5, έπεται ότι το σύνολο* $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{e}_1\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Εργαζόμενοι παρόμοια βλέπουμε ότι το διάνυσμα* $\vec{e}_2$ *δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των* $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{e}_1\}$, *και επομένως το σύνολο* $\mathcal{B}' := \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Θα δείξουμε ότι το σύνολο* $\mathcal{B}'$ *είναι μια βάση του* $\mathbb{R}^4$ *(Αν είχαμε αποδείξει σ' αυτό το σημείο το Θεώρημα 4.3.8, το ζητούμενο θα ήταν άμεσο). Αρκεί να δείξουμε ότι το* $\mathcal{B}'$ *παράγει τον* $\mathbb{R}^4$. *Θα έχουμε:*

$$\vec{x} - \vec{y} = (0,0,2,3) = 2\vec{e}_3 + 3\vec{e}_4$$

$$\vec{x} - 2\vec{y} = (-2,-1,0,3) = -2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_4$$

Άρα αφαιρώντας θα έχουμε $\vec{y} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$. *Επομένως:*

$$\vec{e}_3 = \frac{1}{2}\vec{y} - \vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2$$

Τότε από την πρώτη σχέση θα έχουμε:

$$\vec{e}_4 = \frac{1}{3}[\vec{x} - \vec{y} - 2\vec{e}_3] = \frac{1}{3}[\vec{x} - 2\vec{y} + 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2]$$

Τώρα επειδή κάθε διάνυσμα $\vec{r} = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ *είναι γραμμικός συνδυασμός των* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$: $\vec{r} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 + d\vec{e}_4$, *λαμβάνοντας υπ' όψιν τις παραπάνω σχέσεις, θα έχουμε:*

$$\vec{r} = (a - c + \frac{2d}{3})\vec{e}_1 + (b - \frac{c}{2} + \frac{d}{3})\vec{e}_2 + (\frac{d}{3} - c)\vec{x} + (\frac{c}{2} - \frac{2d}{3})\vec{y}$$

και επομένως το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B}'$ *παράγει τον* $\mathbb{R}^4$. *Έτσι θέτοντας* $\vec{z} = \vec{e}_1$ *και* $\vec{w} = \vec{e}_2$ *έχουμε το ζητούμενο.*

4.3 Η Έννοια της Διάστασης

Έχοντας δείξει ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ έχει τουλάχιστον μια βάση, προκύπτει εύλογα το ερώτημα αν δύο τυχούσες βάσεις του $\mathbb{V}$ έχουν κάποιες κοινές ιδιότητες. Το Παράδειγμα 4.1.3 δείχνει ότι τα διανύσματα δύο βάσεων μπορεί να είναι διαφορετικά, επομένως δεν μπορούμε να περιμένουμε δύο τυχούσες βάσεις να έχουν κοινά διανύσματα. Όπως θα δείξουμε παρακάτω η ιδιότητα η οποία παραμένει αναλλοίωτη είναι ότι δύο τυχούσες βάσεις περιέχουν τον ίδιο αριθμό διανυσμάτων.

Το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα είναι το κλειδί για την απόδειξη του αναλλοίωτου του πλήθους διανυσμάτων δύο βάσεων.

Λήμμα 4.3.1 *[Λήμμα Ανταλλαγής] Έστω $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{V}$ ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων το οποίο παράγει τον $\mathcal{V}$, και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$ ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{V}$. Τότε $|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{G}|$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει με εις άτοπο επαγωγή: Υποθέτουμε ότι $|\mathcal{F}| > |\mathcal{G}|$ και θα δείξουμε ότι αυτή η υπόθεση θα μας οδηγήσει σε άτοπο. Έστω $\mathcal{G} = \{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n\}$. Τότε από την υπόθεση μας έχουμε ότι $|\mathcal{F}| > n$. Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο $\mathcal{F}$ περιέχει τουλάχιστον $n+1$ διανύσματα ή ισοδύναμα το $\mathcal{F}$ περιέχει ένα υποσύνολο $\mathcal{F}' := \{\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_n, \vec{y}_{n+1}\} \subseteq \mathcal{F}$ το οποίο αποτελείται από $n+1$ διανύσματα. Η στρατηγική μας είναι να αντικαταστήσουμε τα διανύσματα του συνόλου $\mathcal{G}$ με διανύσματα του συνόλου $\mathcal{F}'$ με τέτοιο τρόπο ώστε το το σύνολο που θα προκύψει να παραμείνει σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$.

Εν πρώτοις παρατηρούμε ότι επειδή το $\mathcal{F}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, από την Πρόταση 4.1.4 έπεται ότι και το σύνολο $\mathcal{F}'$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Επειδή το $\mathcal{G}$ είναι σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$, έπεται ότι το $\vec{y}_1 \in \mathcal{F}'$ θα είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του $\mathcal{G}$. Έτσι θα έχουμε ότι

$$\vec{y}_1 = k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n, \;\; k_i \in \mathbb{K}, \;\; 1 \leq i \leq n \tag{1}$$

Αν $k_i = 0, \forall i = 1, \cdots, n$, τότε $\vec{y}_1 = \vec{0}$ και αυτό είναι άτοπο διότι το μονοσύνολο $\{\vec{y}_1\}$ είναι υποσύνολο του γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου $\mathcal{F}'$ και γνωρίζουμε ότι το μονοσύνολο $\{\vec{0}\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο από το Λήμμα 4.1.3. Άρα υπάρχει $i = 1, \cdots, n$ έτσι ώστε $k_i \neq 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, εν ανάγκει αλλάζοντας την αρίθμηση των $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n$, ότι $k_1 \neq 0$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη της (1) με k_1^{-1}, θα έχουμε ισοδύναμα τη σχέση

$$\vec{x}_1 = k_1^{-1}\vec{y}_1 + (-k_1^{-1}k_2)\vec{x}_2 + \cdots + (-k_1^{-1}k_n)\vec{x}_n \tag*{(1)$'$}$$

Επειδή το σύνολο $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ παράγει τον $\mathcal{V}$ και το $\vec{x}_1$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{y}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$, έπεται άμεσα ότι και το σύνολο $\{\vec{y}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ παράγει τον $\mathcal{V}$.

Επομένως το διάνυσμα $\vec{y}_2$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\{\vec{y}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$, δηλαδή:

$$\vec{y}_2 = l_1\vec{y}_1 + l_2\vec{x}_2 + \cdots + l_n\vec{x}_n, \ \ l_i \in \mathbb{K}, \ 1 \leq i \leq n \tag{2}$$

Αν $l_i = 0$, $\forall i = 2, \cdots, n$, τότε θα έχουμε $\vec{y}_2 = l_1\vec{y}_1$, δηλαδή τα $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, και αυτό είναι άτοπο διότι το σύνολο $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο ως υποσύνολο του γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου $\mathcal{F}'$. Άρα υπάρχει $i = 2, \cdots, n$ έτσι ώστε $l_i \neq 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, εν ανάγκει αλλάζοντας την αρίθμηση των $\vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$, ότι $l_2 \neq 0$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη της (2) με l_2^{-1}, θα έχουμε ισοδύναμα τη σχέση

$$\vec{x}_2 = l_2^{-1}\vec{y}_2 + (-l_2^{-1}l_1)\vec{y}_1 + (-l_2^{-1}l_3)\vec{x}_3 + \cdots + (-l_2^{-1}l_n)\vec{x}_n \tag*{(2)$'$}$$

Επειδή το σύνολο $\{\vec{y}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ παράγει τον $\mathcal{V}$ και το $\vec{x}_2$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{x}_3, \cdots, \vec{x}_n$, έπεται άμεσα ότι και το σύνολο $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{x}_3, \cdots, \vec{x}_n\}$ παράγει τον $\mathcal{V}$.

Μέχρι τώρα έχουμε αντικαταστήσει τα δύο πρώρα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ του συνόλου των γεννητόρων $\mathcal{G}$ με τα δύο πρώτα διανύσματα $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ έτσι ώστε το σύνολο $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{x}_3, \cdots, \vec{x}_n\}$ που προκύπτει να παραμένει σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία αντικατάστασης ενός διανύσματος του $\mathcal{G}$ με ένα διάνυσμα του $\mathcal{F}'$, μετά από n βήματα, καταλήγουμε να αντικαταστήσουμε τα διανύσματα του $\mathcal{G}$ με τα διανύσματα του $\mathcal{F}'$, και το σύνολο $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n\}$ παραμένει σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$. Επομένως, συνεχίζοντας στο $(n+1)$ βήμα, το διάνυσμα $\vec{y}_{n+1}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n\}$, δηλαδή:

$$\vec{y}_{n+1} = m_1\vec{y}_1 + m_2\vec{y}_2 + \cdots + m_n\vec{y}_n, \ \ m_i \in \mathbb{K}, \ 1 \leq i \leq n \tag{$n+1$}$$

Τότε όμως από την Πρόταση 4.1.5 έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{F}' = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n, \vec{y}_{n+1}\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο και αυτό είναι άτοπο. Στο άτοπο καταλήξαμε υποθέτοντας ότι $|\mathcal{F}| > |\mathcal{G}|$. Επομένως θα έχουμε $|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{G}|$. □

Πόρισμα 4.3.2 *Κάθε βάση ενός πεπερασμένα παραγόμενου διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ περιέχει πεπερασμένο πλήθος διανυσμάτων.*

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{B}$ μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$, ιδιαίτερα το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Επειδή ο $\mathcal{V}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος, έπεται ότι ο $\mathcal{V}$ έχει ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων $\mathcal{G}$. Τότε από το Λήμμα Ανταλλαγής 4.3.1 θα έχουμε ότι $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{G}| < \infty$. □

Τώρα είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το ακόλουθο θεμελιώδες αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.3.3 *Έστω $\mathcal{B}_1$ και $\mathcal{B}_2$ δύο βάσεις ενός πεπερασμένα παραγόμενου διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$. Τότε $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος Ανταλλαγής 4.3.1: Επειδή τα σύνολα $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ είναι βάσεις, θα είναι γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα γεννητόρων του $\mathcal{V}$.

1. Επειδή το $\mathcal{B}_1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και το $\mathcal{B}_2$ είναι σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$, από το Λήμμα Ανταλλαγής θα έχουμε: $|\mathcal{B}_1| \leq |\mathcal{B}_2|$.

2. Επειδή το $\mathcal{B}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και το $\mathcal{B}_1$ είναι σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$, από το Λήμμα Ανταλλαγής θα έχουμε: $|\mathcal{B}_2| \leq |\mathcal{B}_1|$.

Επομένως: $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|$. □

Το παραπάνω Θεώρημα μας οδηγεί άμεσα στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.3.4 *Έστω $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Το πλήθος των διανυσμάτων μιας τυχούσας βάσης $\mathcal{B}$ του $\mathcal{V}$ καλείται* **διάσταση** *του $\mathcal{V}$ και συμβολίζεται ως εξής:*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} := |\mathcal{B}|, \quad \mathcal{B} \text{ είναι τυχούσα βάση του } \mathcal{V}$$

Από τώρα και στο εξής πεπερασμένα παραγόμενοι διανυσματικοί χώροι $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ θα καλούνται **διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης** και τότε θα γράφουμε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} < \infty$. Το υπόλοιπο μέρος των σημειώσεων θα αφιερωθεί στην μελέτη τους.

Σχόλιο 4.3.1 *Όπως έχουμε δει η έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου, και άρα και η έννοια της βάσης, εξαρτάται από το σώμα υπεράνω του οποίου είναι ορισμένος ο διανυσματικός χώρος. Επομένως και η έννοια της διάστασης εξαρτάται από το σώμα υπεράνω του οποίου είναι ορισμένος ο διανυσματικός χώρος. Αυτή την εξάρτηση υποδηλώνει και ο συμβολισμός $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$.*

Έτσι ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ έχει $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, διότι ο αριθμός $1 \in \mathbb{C}$ είναι μια βάση του $\mathbb{C}$ υπεράνω του $\mathbb{C}$. Πράγματι $1 \neq 0$ και άρα το 1 είναι γραμμικά ανεξάρτητο διάνυσμα του $\mathbb{C}$. Από την άλλη πλευρά κάθε μιγαδικός *αριθμός z γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός $z = z1$ του 1 με συντελεστές από το $\mathbb{C}$. Άρα το σύνολο $\{1\}$ειναι μια βάση του $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ και επομένως $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$.*

Από την άλλη πλευρά ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ έχει διάσταση 2 διότι το σύνολο $\{1, i\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{C}$ υπεράνω του $\mathbb{R}$. Πράγματι όπως έχουμε δει το σύνολο $\{1, i\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υπεράνω του $\mathbb{R}$. Επειδή κάθε μιγαδικός αριθμός z γράφεται ως $z = a + bi = a1 + bi$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$, έπεται ότι το σύνολο $\{1, i\}$ παράγει τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ και άρα αποτελεί βάση του. Επομένως $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

Παρατήρηση 4.3.5 [Διανυσματικοί Χώροι Άπειρης Διάστασης] *Διανυσματικοί χώροι $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ οι οποίοι δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενοι καλούνται χώροι άπειρης διάστασης. Γι' αυτούς τους χώρους θα γράφουμε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = \infty$. Η θεωρία των χώρων άπειρης διάστασης, η οποία είναι αντικείμενο διαφορετικών μαθημάτων, π.χ. της Συναρτησιακής Ανάλυσης, δεν θα μας απασχολήσει στις παρούσες σημειώσεις παρά μόνο περιστασιακά. Ο συμβολισμός $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = \infty$ υποδηλώνει ότι ο χώρος $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ δεν είναι πεπερασμένης διάστασης, δηλαδή δεν έχει βάση με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων ή ισοδύναμα δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενος.*

Από την άλλη πλευρά η έννοια της βάσης, όπως την έχουμε ορίσει, έχει έννοια και για άπειρα σύνολα, και επομένως και για διανυσματικούς χώρους οι οποίοι δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενοι. Μπορεί κανείς να δείξει ότι δύο τυχούσες βάσεις ενός τυχόντος διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$, όχι κατ' ανάγκην πεπερασμένα παραγόμενου, έχουν το ίδιο (ενδεχόμενα άπειρο) πλήθος στοιχείων. Η κοινή αυτή τιμή καλείται όπως και παραπάνω διάσταση του $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$. Σ' αυτό το σημείο θα πρέπει να είναι κανείς προσεκτικός καθώς υπάρχουν διαφορετικές έννοιες και «ποιότητες» απείρου, και επομένως κάποια διάκριση είναι αναγκαία.

Ενδεικτικά αναφέρουμε, χωρίς απόδειξη, τα ακόλουθα παραδείγματα διανυσματικών χώρων άπειρης διάστασης.

1. $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$, *δηλαδή το σώμα των πραγματικών αριθμών θεωρούμενο σαν διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος των ρητών έχει άπειρη διάσταση.*

2. $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[t] = \infty$, *δηλαδή ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων υπεράνω του $\mathbb{K}$ έχει άπειρη διάσταση.*

3. $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(S, \mathbb{R}) = \infty$, *όπου S είναι ένα άπειρο σύνολο· δηλαδή ο διανυσματικός χώρος όλων των πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού ένα άπειρο σύνολο, βλέπε 4.3.7 έχει άπειρη διάσταση.*

   Τυπικά διανυσματικοί χώροι συναρτήσεων, οι οποίοι είναι αντικείμενο της Ανάλυσης, είναι άπειρης διάστασης.

Στις παρούσες σημειώσεις κυρίως θα μας απασχολήσουν πεπερασμένα παραγόμενοι υπόχωροι διανυσματικών χώρων άπειρης διάστασης. Τέτοιοι υπόχωροι υπάρχουν σε αφθονία όπως δείχνει η ακόλουθη άμεση συνέπεια του Πορίσματος 4.2.4:

Πόρισμα 4.3.6 *Έστω $\mathcal{W}$ ένας υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$ (ο οποίος δεν είναι κατ' ανάγκην πεπερασμένης διάστασης). Αν ο $\mathcal{W}$ παράγεται από πεπερασμένα το πλήθος διανύσματα, τότε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} < \infty$.*

Παράδειγμα 4.3.2 *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και $n \geq 1$.*

1. $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = 1$.

Πράγματι: για κάθε μη-μηδενικό στοιχείο $k \in \mathbb{K}$, το μονοσύνολο $\{k\}$ είναι βάση του $\mathbb{K}$ και επομένως $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = 1$.

2. $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.

Πράγματι: Έχουμε δείξει ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$, όπου $\vec{e}_i = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ (το 1 εμφανίζεται στην i συνιστώσα), είναι μια βάση του $\mathbb{K}^n$. Άρα $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.

3. $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[t] = n + 1$.

Πράγματι: Έχουμε δείξει ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, \cdots, t^n\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{K}_n[t]$, και άρα $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[t] = n + 1$.

Παράδειγμα 4.3.3 *Έστω τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}^4$:*

$$\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$$

$$\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

Θα υπολογίσουμε μια βάση και την διάσταση του υπόχωρου $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$.

Έστω $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. Προσθέτοντας και ακολούθως αφαιρώντας τις εξισώσεις $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ και $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, θα έχουμε άμεσα ότι $x_1 = -x_3$ και $x_2 = -x_4$. Αντίστροφα κάθε στοιχείο $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ έτσι ώστε $x_1 = -x_3$ και $x_2 = -x_4$, ανήκει προφανώς στον υπόχωρο $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$. Επομένως:

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 = -x_3, \quad x_2 = -x_4\}$$

$$= \{(x_1, x_2, -x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x_1(1, 0, -1, 0) + x_2(0, 1, 0, -1) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Επομένως $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2 \rangle$, *όπου* $\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0, -1, 0)$, *και* $\vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0, -1)$. *Εύκολα βλέπουμε ότι το σύνολο* $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και άρα αποτελεί μια βάση του υπόχωρου* $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. *Συμπεραίνουμε ότι* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} \cap \mathcal{W} = 2$.

Πρόταση 4.3.7 *Έστω* $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \cdots, \mathcal{V}_n$ *διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος* $\mathbb{K}$. *Τότε:*

$$\boxed{\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_n) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_1 + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_2 + \cdots + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_n}$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε την ζητούμενη σχέση όταν $n = 2$· η γενική περίπτωση προκύπτει άμεσα με επαγωγή. Έστω $\mathcal{B}_1 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια βάση του $\mathcal{V}_1$ και $\mathcal{B}_2 = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_m\}$ μια βάση του $\mathcal{V}_2$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο

$$\mathcal{B} := \{(\vec{e}_1, \vec{0}), (\vec{e}_2, \vec{0}), \cdots, (\vec{e}_n, \vec{0}), (\vec{0}, \vec{\varepsilon}_1), (\vec{0}, \vec{\varepsilon}_2), \cdots, (\vec{0}, \vec{\varepsilon}_m)\}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$. Δείχνουμε πρώτα ότι το σύνολο $\mathcal{B}$ παράγει τον $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$. Έστω $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ ένα τυχόν διάνυσμα. Επειδή $\vec{x} \in \mathcal{V}_1$ και το σύνολο $\mathcal{B}_1$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}_1$, έπεται ότι $\vec{x} = k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + \cdots + k_n\vec{e}_n$, $k_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Παρόμοια επειδή $\vec{y} \in \mathcal{V}_2$ και το σύνολο $\mathcal{B}_2$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}_2$, έπεται ότι $\vec{y} = l_1\vec{\varepsilon}_1 + l_2\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + l_m\vec{\varepsilon}_m$, $l_j \in \mathbb{K}$, $1 \leq j \leq m$. Τότε θα έχουμε τη σχέση

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + \cdots + k_n\vec{e}_n, l_1\vec{\varepsilon}_1 + l_2\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + l_m\vec{\varepsilon}_m) =$$

$$k_1(\vec{e}_1, \vec{0}) + k_2(\vec{e}_2, \vec{0}) + \cdots + k_n(\vec{e}_n, \vec{0}) + l_1(\vec{0}, \vec{\varepsilon}_1) + l_2(\vec{0}, \vec{\varepsilon}_2) + \cdots + l_m(\vec{0}, \vec{\varepsilon}_m)$$

η οποία δείχνει ότι το σύνολο $\mathcal{B}$ παράγει τον χώρο $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι το $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω ότι υπάρχουν αριθμοί $k_i, l_j \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, έτσι ώστε:

$$k_1(\vec{e}_1, \vec{0}) + k_2(\vec{e}_2, \vec{0}) + \cdots + k_n(\vec{e}_n, \vec{0}) + l_1(\vec{0}, \vec{\varepsilon}_1) + l_2(\vec{0}, \vec{\varepsilon}_2) + \cdots + l_m(\vec{0}, \vec{\varepsilon}_m) = (\vec{0}, \vec{0})$$

Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με τη σχέση

$$(k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + \cdots + k_n\vec{e}_n, l_1\vec{\varepsilon}_1 + l_2\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + l_m\vec{\varepsilon}_m) = (\vec{0}, \vec{0})$$

από την οποία συνάγεται άμεσα ότι

$$k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + \cdots + k_n\vec{e}_n = \vec{0}, \quad l_1\vec{\varepsilon}_1 + l_2\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + l_m\vec{\varepsilon}_m = \vec{0}$$

Από τη γραμμική ανεξαρτησία των συνόλων $\mathcal{B}_1$ και $\mathcal{B}_2$ έπεται ότι $k_i = 0, \forall i = 1, 2, \cdots, n$ και $l_j = 0, \forall j = 1, 2, \cdots, m$. Συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και επομένως είναι μια βάση του $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$. Τότε όμως

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2) = |\mathcal{B}| = n + m = |\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2| = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_1 + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_2$$

$\square$

Παράδειγμα 4.3.4 *1.* $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \times \mathbb{C}) = 3$.

2. Η Πρόταση 4.3.7 δίνει μια άλλη απόδειξη του τύπου 2. του Παραδείγματος 4.3.2. Πραγματικά αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$ *(*n*-παράγοντες).*

Άσκηση 4.3.5 *Έστω* $\mathcal{V}$ *το σύνολο των λύσεων της γραμμικής εξίσωσης:*

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n = 0$$

δηλαδή:

$$\mathcal{V} := \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n = 0\}$$

όπου $k_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. *Να προσδιορισθεί μια βάση και η διάσταση του* $\mathcal{V}$.

Λύση: *Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:*

1. Αν $k_i = 0$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$, *τότε προφανώς* $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$. *Επομένως* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = n$, *και τυχούσα βάση, π.χ. η κανονική, είναι βάση του* $\mathcal{V}$.

2. Έστω ότι $(k_1, k_2, \cdots, k_n) \neq (0, 0, \cdots, 0)$. *Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι* $k_i \neq 0$. *Τότε από την Εφαρμογή 3.2.11 έπεται ότι το σύνολο διανυσμάτων του* $\mathbb{R}^n$

$$\vec{\lambda}_1 := (1, 0, \cdots, 0, l_1, 0, \cdots, 0), \ \cdots, \ \vec{\lambda}_{i-1} := (0, 0, \cdots, 1, l_{i-1}, 0, \cdots, 0), \ \cdots$$

$$\vec{\lambda}_{i+1} := (0, 0, \cdots, 0, l_{i+1}, 1, \cdots, 0), \ \cdots, \ \vec{\lambda}_n := (0, 0, \cdots, 0, l_n, 0, \cdots, 1)$$

όπου οι αριθμοί $l_j := \frac{k_j}{k_i}$, $\forall j \neq i$, *εμφανίζονται στην* i*-συντεταγμένη, είναι ένα σύνολο γεννητόρων του* $\mathcal{V}$. *Θα δείξουμε ότι το σύνολο*

$$\mathcal{B} \ = \ \{\vec{\lambda}_1, \cdots, \vec{\lambda}_{i-1}, \vec{\lambda}_{i+1}, \cdots, \vec{\lambda}_n\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί μια βάση του $\mathcal{V}$. *Έστω* $\mu_1\vec{\lambda}_1 + \mu_2\vec{\lambda}_2 + \cdots + \mu_{i-1}\vec{\lambda}_{i-1} + \mu_{i+1}\vec{\lambda}_{i+1} + \cdots + \mu_n\vec{\lambda}_n = \vec{0}$. *Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την* $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{i-1}, \mu, \mu_{i+1}, \cdots, \mu_n) = (0, 0, \cdots, 0)$, *όπου* $\mu := \mu_1 l_1 + \mu_2 l_2 + \cdots + \mu_n l_n$. *Τετριμμένα αυτές οι σχέσεις συνεπάγουν ότι* $\mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$, *και άρα πράγματι το σύνολο* $\mathcal{B}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Συμπεραίνουμε ότι* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = n - 1$, *διότι η βάση* $\mathcal{B}$ *του* $\mathcal{V}$ *έχει* $n - 1$ *στοιχεία.*

Κλείνουμε την παρούσα παράγραφο με κάποιες σημαντικές συνέπειες των όσων έχουμε αποδείξει μέχρι τώρα.

Θεώρημα 4.3.8 *1. Αν* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n$, *τότε κάθε γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του* $\mathcal{V}$ *έχει το πολύ* n *στοιχεία.*

2. Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n$*, τότε κάθε σύνολο γεννητόρων του* $\mathcal{V}$ *έχει τουλάχιστον* n *στοιχεία.*

3. Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n$*, τότε κάθε σύνολο διανυσμάτων του* $\mathcal{V}$ *με περισσότερα από* n *στοιχεία είναι γραμμικά εξαρτημένο.*

4. Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n$*, τότε κάθε σύνολο διανυσμάτων* $\mathcal{B}$ *του* $\mathcal{V}$ *το οποίο ικανοποιεί 2 από τις ακόλουθες 3 ιδιότητες είναι βάση.*

(a) *Το* $\mathcal{B}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

(b) *Το* $\mathcal{B}$ *παράγει τον* $\mathcal{V}$*.*

(c) *Το* $\mathcal{B}$ *έχει ακριβώς* n *στοιχεία.*

Απόδειξη: 1. Σύμφωνα με το Πόρισμα 4.2.5, κάθε γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο $\mathcal{F}$ του $\mathcal{V}$ επεκτείνεται σε μια βάση του $\mathcal{V}$. Επειδή $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n$, έπεται ότι $|\mathcal{F}| \leq n$.

2. Σύμφωνα με το Πόρισμα 4.2.4, κάθε σύνολο γεννητόρων $\mathcal{G}$ του $\mathcal{V}$ περιέχει σαν υποσύνολο μια βάση του $\mathcal{V}$. Επειδή $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n$, έπεται ότι $|\mathcal{G}| \geq n$.

3. Προκύπτει άμεσα από το 1.

4. Αν το υποσύνολο $\mathcal{B}$ ικανοποιεί τα (a), (b), τότε το $\mathcal{B}$ είναι εξ' ορισμού βάση του $\mathcal{V}$. Αν το υποσύνολο $\mathcal{B}$ ικανοποιεί τα (a), (c), τότε από το (a) και το Πόρισμα 4.2.5, το $\mathcal{B}$ επεκτείνεται σε μια βάση $\mathcal{B}'$ του $\mathcal{V}$. Επειδή $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n$, η βάση $\mathcal{B}'$ έχει n το πλήθος στοιχεία. Επειδή $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$ και $|\mathcal{B}| = n$, έπεται ότι $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, και άρα το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι βάση του $\mathcal{V}$. Αν το υποσύνολο $\mathcal{B}$ ικανοποιεί τα (b), (c), τότε από το (b) και το Πόρισμα 4.2.4, το $\mathcal{B}$ περιέχει σαν υποσύνολο μια βάση $\mathcal{B}'$ του $\mathcal{V}$. Επειδή $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n$, η βάση $\mathcal{B}'$ έχει n το πλήθος στοιχεία. Επειδή $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ και $|\mathcal{B}| = n$, έπεται ότι $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, και άρα το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι βάση του $\mathcal{V}$. □

Άσκηση 4.3.6 *Έστω* $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ *μια βάση του διανυσματικού χώρου* $\mathcal{V}$ *υπεράνω του σώματος* $\mathbb{K}$*. Να δείξετε ότι το σύνολο:*

$$\mathcal{B}' := \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2 + \cdots + \vec{\varepsilon}_n\}$$

είναι επίσης μια βάση του $\mathcal{V}$*.*

Λύση: *Επειδή* $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$*, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.3.8, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο* $\mathcal{B}'$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω*

$$k_1\vec{\varepsilon}_1 + k_2(\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2) + \cdots + k_n(\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2 + \cdots + \vec{\varepsilon}_n) = \vec{0}$$

Αυτή η σχέση είναι ισοδύναμη με την

$$(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)\vec{\varepsilon}_1 + (k_2 + \cdots + k_n)\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + (k_{n-1} + k_n)\vec{\varepsilon}_{n-1} + k_n\vec{\varepsilon}_n = \vec{0}$$

Επειδή το σύνολο $\{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο, έπεται ότι θα έχουμε:*

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k_2 + \cdots + k_n = \cdots = k_{n-1} + k_n = k_n = 0$$

Οι τελευταίες σχέσεις προφανώς δίνουν ότι $k_1 = \cdots = k_n = 0$. *Άρα το σύνολο* $\mathcal{B}'$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Παράδειγμα 4.3.7 *Παραδείγματα Βάσεων στον* $\mathbb{K}_n[t]$.

1. Έστω $P(t) \in \mathbb{K}_n[t]$ *ένα πολυώνυμο βαθμού* n. *Τότε το σύνολο*

$$\mathcal{B} := \{P(t), P'(t), P''(t), \cdots, P^{(n)}(t)\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{K}_n[t]$, *όπου* $P^{(k)}(t)$ *είναι η παράγωγος* k*-τάξης του* $P(t)$.

Πραγματικά: Επειδή $\deg P(t) = n$, *έπεται άμεσα ότι* $\deg P'(t) = n-1$, $\deg P''(t) = n-2, \cdots, \deg P^{(n-1)}(t) = 1, \deg P^{(n)}(t) = 0$. *Από το Παράδειγμα 4.1.5 έπεται ότι το σύνολο* $\mathcal{B}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Επειδή* $|\mathcal{B}| = n+1$ *επειδή από το Παράδειγμα 4.3.2 έχουμε* $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[t] = n+1$, *από το Θεώρημα 4.3.8 έπεται ότι το σύνολο* $\mathcal{B}$ *είναι βάση του* $\mathbb{K}_n[t]$.

2. Έστω $\alpha \in \mathbb{K}$. *Τότε το σύνολο*

$$\mathcal{C} := \{1, (t-\alpha), (t-\alpha)^2, \cdots, (t-\alpha)^n\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{K}_n[t]$.

Εργαζόμενοι όπως και στο 1., επειδή το πλήθος των διανυσμάτων του συνόλου $\mathcal{C}$ *είναι* $n+1 = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[t]$, *από το Θεώρημα 4.3.8 έπεται ότι το σύνολο* $\mathcal{C}$ *είναι βάση του* $\mathbb{K}_n[t]$.

Ερώτηση: *Ποιές είναι οι συνιστώσες του τυχόντος πολυωνύμου* $P(t) \in \mathbb{K}_n[t]$ *στην παραπάνω βάση;*

Απάντηση: *Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Taylor από τον Απειροστικό Λογισμό, έπεται ότι το πολυώνυμο* $P(t)$ *γράφεται μοναδικά ως εξής:*

$$P(t) = P(\alpha) + \frac{P'(\alpha)}{1!}(t-\alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2!}(t-\alpha)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(t-\alpha)^n$$

και επομένως οι συνιστώσες είναι: $\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}$, $0 \leq k \leq n$.

Πρόχειρη Δοκιμασία

Να εξετασθεί αν τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{K}_n[t]$ είναι βάσεις του $\mathbb{K}_n[t]$:

1. $\{1, 1+t, 1+t+t^2, \cdots, 1+t+t^2+\cdots+t^n\}$.
2. $\{1+t, t+t^2, \cdots, t^{n-1}+t^n\}$.
3. $\{1, 1-t, (1-t)^2, \cdots, (1-t)^n\}$.

4.4 Διάσταση Υπόχωρων

Αν $\mathcal{W}$ είναι ένας υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, τότε όπως έχουμε δει ο $\mathcal{W}$ με τους περιορισμούς των πράξεων του $\mathcal{V}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$, και επομένως ορίζεται η διάσταση του $\mathcal{W}$, όταν αυτός είναι πεπερασμένα παραγόμενος. Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά της διάστασης ενός διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης σε σχέση με τους υπόχωρους του.

Αρχίζουμε με την ακόλουθη πρόταση η οποία δείχνει ότι η ιδιότητα ενός διανυσματικού χώρου να είναι πεπερασμένης διάστασης κληρονομείται στους υπόχωρους του.

Πρόταση 4.4.1 *Έστω $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{W}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$.*

1. *Ο υπόχωρος $\mathcal{W}$ έχει πεπερασμένη διάσταση.*

2. $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$.

3. $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$ *αν-ν* $\mathcal{W} = \mathcal{V}$.

Απόδειξη: Έστω $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n < \infty$.

1. - 2. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.3.8, κάθε σύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{V}$, και άρα και του $\mathcal{W}$, με περισσότερα από $n+1$ στοιχεία είναι γραμμικά εξαρτημένα. Άρα το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του $\mathcal{W}$ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο το n. Έστω $\mathcal{C} := \{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_m\}$ το υποσύνολο του $\mathcal{W}$ με το μεγαλύτερο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων. Τότε τα διανύσματα του $\mathcal{C}$ είναι προφανώς γραμμικά ανεξάρτητα θεωρούμενα ως διανύσματα του $\mathcal{V}$, και άρα $m \leq n$. Έστω $\vec{y} \in \mathcal{W}$· τότε το σύνολο $\mathcal{C} \cup \{\vec{y}\} = \{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_m, \vec{y}\}$ έχει $m+1$ στοιχεία και άρα από την κατασκευή του $\mathcal{C}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Από τη Πρόταση 4.1.5 έπεται ότι το $\vec{y}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του $\mathcal{C}$, και άρα το σύνολο $\mathcal{C}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{W}$, και μάλιστα είναι μια βάση του $\mathcal{W}$ αφού είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Επομένως ο $\mathcal{W}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος, και μάλιστα, η διάσταση του είναι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} = m = |\mathcal{C}| \leq n = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$.

3. Προφανώς αν $\mathcal{V} = \mathcal{W}$, τότε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$. Υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} := n$ και έστω $\mathcal{C}$ μια βάση του $\mathcal{W}$. Τότε το σύνολο $\mathcal{C}$ περιέχει n διανύσματα τα οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητα ως διανύσματα του $\mathcal{W}$, άρα και ως διανύσματα του $\mathcal{V}$. Από το Θεώρημα 4.3.8 έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{C}$ είναι και βάση του $\mathcal{V}$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $\mathcal{V} = \langle \mathcal{C} \rangle = \mathcal{W}$. $\square$

Σχόλιο 4.4.1 *1. Σύμφωνα με τη Πρόταση 4.4.1 υπόχωροι διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης έχουν πεπερασμένη διάσταση. Από τώρα και στο εξής θα χρησιμοποιούμε αυτό το σημαντικό αποτέλεσμα χωρίς περαιτέρω αναφορά.*

2. Η διάσταση του μηδενικού υπόχωρου $\{\vec{0}\}$ είναι, όπως θα περίμενε κανείς, ίση με 0. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι μια βάση του $\{\vec{0}\}$. Αντίστροφα αν $\mathcal{W}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} = 0$, τότε $\mathcal{W} = \{\vec{0}\}$.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα χαρακτηρίζει το ευθύ άθροισμα υπόχωρων συναρτήσει ιδιοτήτων της διάστασης των υπόχωρων.

Πρόταση 4.4.2 *Έστω $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{Z}$ και $\mathcal{W}$ δύο υπόχωροι του $\mathcal{V}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το άθροισμα υπόχωρων $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$ είναι ευθύ.*

2. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W} + \mathcal{Z}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{Z}$.

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια βάση του $\mathcal{W}$ και $\mathcal{D} = \{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_m\}$ μια βάση του $\mathcal{Z}$.

1. $\Rightarrow$ 2. Επειδή το άθροισμα $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$ είναι ευθύ, έπεται εξ' ορισμού ότι $\mathcal{W} \cap \mathcal{Z} = \{\vec{0}\}$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{C} \cup \mathcal{D} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n, \vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_m\}$, το οποίο είναι προφανώς υποσύνολο του $\mathcal{W}+\mathcal{Z}$, είναι μια βάση του $\mathcal{W}+\mathcal{Z}$. Έστω $k_1\vec{e}_1+\cdots+k_n\vec{e}_n+l_1\vec{\varepsilon}_1+\cdots+l_m\vec{\varepsilon}_m = \vec{0}$, όπου $k_i, l_j \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$. Τότε θα έχουμε ισοδύναμα τη σχέση:

$$k_1\vec{e}_1 + \cdots + k_n\vec{e}_n = (-l_1)\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + (-l_m)\vec{\varepsilon}_m \qquad (\dagger)$$

Το πρώτο μέλος της $(\dagger)$, ως γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του $\mathcal{W}$, ανήκει στον υπόχωρο$\mathcal{W}$. Παρόμοια το δεύτερο μέλος της $(\dagger)$, ως γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του $\mathcal{Z}$, ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{Z}$. Επομένως και τα δύο μέλη της $\dagger$) ανήκουν στην τομή $\mathcal{W} \cap \mathcal{Z} = \{\vec{0}\}$. Άρα $k_1\vec{e}_1 + \cdots + k_n\vec{e}_n = \vec{0}$ και $(-l_1)\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + (-l_m)\vec{\varepsilon}_m = \vec{0}$. Όμως τα διανύσματα $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ και $\{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα καθώς αποτελούν βάσεις των $\mathcal{W}$ και $\mathcal{Z}$ αντίστοιχα. Άρα $k_1 = \cdots = k_n = 0$ και $l_1 = \cdots = l_m = 0$. Αυτό όμως σημαίνει ότι το σύνολο $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω τώρα $\vec{x} \in \mathcal{W}+\mathcal{Z}$ ένα τυχόν διάνυσμα του υπόχωρου $\mathcal{W}+\mathcal{Z}$. Τότε υπάρχουν διανύσματα $\vec{w} \in \mathcal{W}$ και $\vec{z} \in \mathcal{Z}$ έτσι ώστε $\vec{x} = \vec{w} + \vec{z}$. Επειδή το σύνολο $\mathcal{C}$ είναι βάση του $\mathcal{W}$, θα έχουμε $\vec{w} = k_1\vec{e}_1 + \cdots + k_n\vec{e}_n$, όπου $k_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Παρόμοια επειδή το σύνολο $\mathcal{D}$ είναι βάση του $\mathcal{Z}$, θα έχουμε $\vec{z} = l_1\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + l_m\vec{\varepsilon}_m$, όπου $l_j \in \mathbb{K}$,

$1 \leq j \leq m$. Τότε $\vec{x} = \vec{w} + \vec{z} = k_1\vec{e}_1 + \cdots + k_n\vec{e}_n + l_1\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + l_m\vec{\varepsilon}_m$, το οποίο σημαίνει ότι το σύνολο $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ παράγει τον υπόχωρο $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$. Άρα το σύνολο $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ αποτελεί βάση του $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$ και επομένως θα έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W} + \mathcal{Z}) = |\mathcal{C} \cup \mathcal{D}| = n + m = |\mathcal{C}| + |\mathcal{D}| = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} + \dim \mathcal{Z}.$$

2. $\Rightarrow$ 1. Όπως και στην απόδειξη του 1. $\Rightarrow$ 2. βλέπουμε ότι το σύνολο $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ παράγει τον υπόχωρο $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση θα έχουμε $|\mathcal{C} \cup \mathcal{D}| = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{Z} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{Z} = \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W} + \mathcal{Z})$, και επομένως από το Θεώρημα 4.3.8 θα έχουμε ότι το σύνολο $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ είναι μια βάση του $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$. Τώρα για να δείξουμε το 1., αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{W} \cap \mathcal{Z} = \{\vec{0}\}$. Έστω $\vec{x} \in \mathcal{W} \in \mathcal{Z}$. Τότε $\vec{x} \in \mathcal{W}$, και άρα επειδή το σύνολο $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_n\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{W}$, θα έχουμε $\vec{x} = k_1\vec{e}_1 + \cdots + k_n\vec{e}_n$, όπου $k_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Επίσης $\vec{x} \in \mathcal{Z}$, και άρα επειδή το σύνολο $\mathcal{D} = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_m\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{Z}$, θα έχουμε $\vec{x} = l_1\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + l_m\vec{\varepsilon}_m$, όπου $l_j \in \mathbb{K}$, $1 \leq j \leq m$. Τότε $\vec{x} = k_1\vec{e}_1 + \cdots + k_n\vec{e}_n = l_1\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + l_m\vec{\varepsilon}_m$ ή ισοδύναμα $k_1\vec{e}_1 + \cdots + k_n\vec{e}_n + (-l_1)\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + (-l_m)\vec{\varepsilon}_m = \vec{0}$. Επειδή, όπως δείξαμε παραπάνω, το σύνολο $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n, \vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ είναι βάση του $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$, θα έχουμε $k_i = 0 = l_j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $\vec{x} = \vec{0}$. Άρα $\mathcal{W} \cap \mathcal{Z} = \{\vec{0}\}$, και επομένως το άθροισμα $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$ είναι ευθύ. □

Άσκηση 4.4.2 *Έστω τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}_n[t]$:*

$$\mathcal{V} := \{P(t) \in \mathbb{R}_n[t] \mid P(t) = P(-t)\}$$

$$\mathcal{W} := \{P(t) \in \mathbb{R}_n[t] \mid P(t) = -P(-t)\}$$

Να δείξετε τα υποσύνολα $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ είναι υπόχωροι και ισχύει: $\mathbb{R}_n[t] = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$. Ποιά είναι η διάσταση του $\mathcal{V}$ και ποιά του $\mathcal{W}$;

Το ακόλουθο Θεώρημα περιγράφει μια σπουδαία ιδιότητα την οποία ικανοποιούν οι διανυσματικοί χώροι, και η οποία δείχνει ότι κάθε υπόχωρος έχει έναν «συμπληρωματικό» υπόχωρο ως προς το ευθύ άθροισμα υπόχωρων.

Θεώρημα 4.4.3 *Έστω $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ ένας πεπερασμένα παραγόμενα δανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Τότε για κάθε υπόχωρο $\mathcal{W}$ του $\mathcal{V}$, υπάρχει (τουλάχιστον ένας) υπόχωρος $\mathcal{Z}$ του $\mathcal{V}$ έτσι ώστε: $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}$.*

Απόδειξη: Έστω $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n < \infty$. Από την Πρόταση 4.4.1 έπεται ότι ο υπόχωρος $\mathcal{W}$ έχει πεπερασμένη διάσταση $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} = m \leq n = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$. Έστω $\mathcal{C} = \{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_m\}$ μια βάση του$\mathcal{W}$. Από το Πόρισμα 4.2.5 έπεται ότι υπάρχει ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{D} := \{\vec{\varepsilon}_{m+1}, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ του $\mathcal{V}$, έτσι ώστε το σύνολο $\mathcal{B} := \mathcal{C} \cup \mathcal{D} = \{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_m, \vec{\varepsilon}_{m+1}, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ να είναι μια βάση του $\mathcal{V}$. Θέτουμε

$\mathcal{Z} := \langle \mathcal{D} \rangle = \langle \vec{\varepsilon}_{m+1}, \cdots, \vec{\varepsilon}_n \rangle$. Επειδή το σύνολο $\mathcal{D}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathcal{V}$ (ως υποσύνολο της βάσης $\mathcal{B}$), έπεται ότι το $\mathcal{D}$ είναι μια βάση του $\mathcal{Z}$. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}$. Έστω $\vec{x} \in \mathcal{V}$. Επειδή το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι βάση του $\mathcal{V}$, έπεται ότι $\vec{x} = k_1\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + k_m\vec{\varepsilon}_m + k_{m+1}\vec{\varepsilon}_{m+1} + \cdots + k_n\vec{\varepsilon}_n$. Θέτοντας $\vec{w} = k_1\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + k_m\vec{\varepsilon}_m$ και $\vec{z} = k_{m+1}\vec{\varepsilon}_{m+1} + \cdots + k_n\vec{\varepsilon}_n$, και χρησιμοποιώντας ότι $\mathcal{W} = \langle \vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_m \rangle$ και $\mathcal{Z} = \langle \vec{\varepsilon}_{m+1}, \cdots, \vec{\varepsilon}_n \rangle$, έπεται ότι $\vec{w} \in \mathcal{W}$ και $\vec{z} \in \mathcal{Z}$. Επομένως το τυχόν διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{V}$ γράφεται ως $\vec{x} = \vec{w} + \vec{z}$, όπου $\vec{w} \in \mathcal{W}$ και $\vec{z} \in \mathcal{Z}$. Άρα $\mathcal{V} = \mathcal{W} + \mathcal{Z}$. Επειδή $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = |\mathcal{B}| = n + m = |\mathcal{C}| + |\mathcal{D}| = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} + \dim \mathcal{Z}$, από την Πρόταση 4.4.2 έπεται ότι το άθροισμα $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$ είναι ευθύ. Επομένως θα έχουμε $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}$. $\square$

Παρατήρηση 4.4.4 *Ο υπόχωρος $\mathcal{Z}$ που μας εξασφαλίζει το Θεώρημα 4.4.3 δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδικός. Το ακόλουθο παράδειγμα δείχνει ότι εν γένει υπάρχουν άπειροι το πλήθος διαφορετικοί υπόχωροι $\mathcal{Z}$ που ικανοποιούν το Θεώρημα.*

Έστω $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ και έστω $\mathcal{W} = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ που παράγεται από το διάνυσμα $(1, 0)$. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι τα ακόλουθα σύνολα $\mathcal{Z}_n := \{(x, nx) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$, $n \geq 1$, είναι ανά δύο διαφορετικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$ και επιπρόσθετα: $\mathbb{R}^2 = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}_1 = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}_2 = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}_3 = \cdots$ (Να το δειξετε σαν Ασκηση).

Πρόχειρη Δοκιμασία

Έστω $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \cdots, \mathcal{W}_n$ υπόχωροι του $\mathcal{V}$. Να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Το άθροισμα υπόχωρων $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$ είναι ευθύ.
2. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W}_1 + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W}_2 + \cdots + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W}_n$.

Πρόχειρη Δοκιμασία

Αν $\mathcal{V}_1$ και $\mathcal{V}_2$ είναι δύο υπόχωροι διάστασης 2 ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$, διάστασης 3, να δείξετε ότι $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \{\vec{0}\}$.

Εάν το άθροισμα δύο υπόχωρων δεν είναι ευθύ, ο τύπος 2. στην Πρόταση 4.4.2 δεν ισχύει (Να βρειτε αντιπαραδειγμα). Ο τύπος που συνδέει τις διαστάσεις δύο υπόχωρων σε σχέση με τις διαστάσεις του αθροίσματος και της τομής τους δίνεται από το ακόλουθο Θεώρημα, το οποίο γενικεύει την Πρόταση 4.4.2.

Θεώρημα 4.4.5 *Έστω $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{Z}$ και $\mathcal{W}$ δύο υπόχωροι του $\mathcal{V}$. Τότε ισχύει ο εξής τύπος:*

$$\boxed{\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W}+\mathcal{Z}) = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{W} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{Z} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W}\cap\mathcal{Z})}$$

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{C} = \{\vec{f_1}, \cdots, \vec{f_k}\}$ μια βάση του υπόχωρου $\mathcal{W}\cap\mathcal{Z}$. Επειδή ο $\mathcal{W}\cap\mathcal{Z}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{W}$, από το Πόρισμα 4.2.5, το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\mathcal{C}$ επεκτείνεται σε μια βάση του $\mathcal{W}$: υπάρχουν διανύσματα $\{\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_n\}$ του $\mathcal{W}$ έτσι ώστε το σύνολο $\mathcal{D} := \{\vec{f_1}, \cdots, \vec{f_k}, \vec{e}_1, \cdots \vec{e}_n\}$ να είναι βάση του $\mathcal{W}$. Παρόμοια επειδή ο $\mathcal{W}\cap\mathcal{Z}$ είναι και υπόχωρος του $\mathcal{Z}$, από το Πόρισμα 4.2.5, το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\mathcal{C}$ επεκτείνεται σε μια βάση του $\mathcal{Z}$: υπάρχουν διανύσματα $\{\vec{\varepsilon}_1, \cdots \vec{\varepsilon}_m\}$ του $\mathcal{Z}$ έτσι ώστε το σύνολο $\mathcal{E} := \{\vec{f_1}, \cdots, \vec{f_k}, \vec{\varepsilon}_1, \cdots \vec{\varepsilon}_m\}$ να είναι βάση του $\mathcal{Z}$. Σημειώνουμε ότι με τις παραπάνω κατασκευές και επιλογές θα έχουμε:

1. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W}\cap\mathcal{Z}) = |\mathcal{C}| = k$.

2. $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{W} = |\mathcal{D}| = k+n$.

3. $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{Z} = |\mathcal{E}| = k+m$.

4. $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{W} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{Z} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W}\cap\mathcal{Z}) = (k+n)+(k+m)-k = k+n+m$.

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι το σύνολο

$$\mathcal{B} := \{\vec{f_1}, \cdots, \vec{f_k}, \vec{e}_1, \cdots \vec{e}_n, \vec{\varepsilon}_1, \cdots \vec{\varepsilon}_m\}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{W}+\mathcal{Z}$, διότι τότε θα έχουμε: $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W}+\mathcal{Z}) = |\mathcal{B}| = k+n+m = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{W} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{Z} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W}\cap\mathcal{Z})$ η οποία είναι η σχέση που θέλουμε να δείξουμε.

Έστω ότι για κάποιους αριθμούς $\lambda_i, \mu_j, \nu_r \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq r \leq m$, ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\lambda_1\vec{f_1} + \cdots + \lambda_k\vec{f_k} + \mu_1\vec{e}_1 + \cdots + \mu_n\vec{e}_n + \nu_1\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + \nu_m\vec{\varepsilon}_m = \vec{0} \qquad (1)$$

Τότε θα έχουμε ισοδύναμα τη σχέση

$$\mu_1)\vec{e}_1 + \cdots + \mu_n\vec{e}_n = (-\lambda_1)\vec{f_1} + \cdots + (-\lambda_k)\vec{f_k} + (-\nu_1)\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + (-\nu_m)\vec{\varepsilon}_m \quad (2)$$

Το πρώτο μέλος της (2) ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{W}$ και το δεύτερο μέλος ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{Z}$. Άρα και τα δύο (ίσα) μέλη ανήκουν στην τομή $\mathcal{W}\cap\mathcal{Z}$. Επειδή το σύνολο $\{\vec{f_1}, \cdots, \vec{f_k}\}$ είναι μια βάση του υπόχωρου $\mathcal{W}\cap\mathcal{Z}$, έπεται ότι υπάρχουν αριθμοί $\rho_1, \cdots, \rho_k \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $\mu_1)\vec{e}_1 + \cdots + \mu_n\vec{e}_n = \rho_1\vec{f}_1 + \cdots + \rho_k\vec{f}_k$. Ισοδύναμα θα έ·χουμε τη σχέση:

$$\rho_1\vec{f}_1 + \cdots + \rho_k\vec{f}_k + (-\mu_1)\vec{e}_1 + \cdots + (-\mu_n)\vec{e}_n = \vec{0} \qquad (3)$$

Επειδή εκ΄ κατασκευής το σύνολο $\{\vec{f}_1, \cdots, \vec{f}_k, \vec{e}_1, \cdots \vec{e}_n\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{W}$, έπεται ότι $\rho_i = 0 = \mu_j$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n$. Τότε όμως από τη σχέση (1) θα έχουμε

$$\lambda_1\vec{f}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{f}_k + \nu_1\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + \nu_m\vec{\varepsilon}_m = \vec{0} \qquad (4)$$

Επειδή εκ΄ κατασκευής το σύνολο $\{\vec{f}_1, \cdots, \vec{f}_k, \vec{\varepsilon}_1, \cdots \vec{\varepsilon}_m\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{Z}$, από τη σχέση (4) έπεται ότι $\lambda_i = 0 = \nu_j$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq m$. Καταλήγουμε ότι όλοι οι συντελεστές λ_i, μ_j, ν_r είναι ίσοι με 0 και άρα το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Μένει να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{B}$ παράγει τον υπόχωρο $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$. Αυτό προκύπτει άμεσα, καθώς όπως δείξαμε στην απόδειξη της Πρότασης 4.4.2, η ένωση μιας βάσης του $\mathcal{W}$ και μιας βάσης του $\mathcal{Z}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του υπόχωρου $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$. □

Άσκηση 4.4.3 *Έστω $\mathcal{E}_\mathbb{K}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ με $\dim_\mathbb{K} = 4$, και έστω $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ δύο υπόχωροι του $\mathcal{E}$ για τους οποίους ισχύει $\dim_\mathbb{K} \mathcal{V} = 2$ και $\dim_\mathbb{K} \mathcal{W} = 3$. Να υπολογισθούν οι πιθανές τιμές της διάστασης $\dim_\mathbb{K}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})$ και να δειχθεί ότι: $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ αν-ν $\dim_\mathbb{K}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = 2$.*

Λύση: *Από την εξίσωση*

$$\dim_\mathbb{K}(\mathcal{V} + \mathcal{W}) = \dim_\mathbb{K} \mathcal{V} + \dim_\mathbb{K} \mathcal{W} - \dim_\mathbb{K}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})$$

του Θεωρήματος 4.4.5, θα έχουμε: $\dim_\mathbb{K}(\mathcal{V} + \mathcal{W}) = 2 + 3 - \dim_\mathbb{K}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = 5 - \dim_\mathbb{K}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})$. *Όμως το σύνολο $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$, και άρα* $\dim_\mathbb{K}(\mathcal{V} + \mathcal{W}) = \dim_\mathbb{R} \mathbb{R}^4 = 4$. *Επομένως* $\dim_\mathbb{R}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \geq 5 - 4 = 1$. *Από την άλλη πλευρά το σύνολο $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V}$, και άρα* $\dim_\mathbb{R}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \leq \dim_\mathbb{R} \mathcal{V} = 2$. *Έτσι θα έχουμε:* $1 \leq \dim_\mathbb{R}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \leq 2$. *Εάν* $\dim_\mathbb{R}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = 2$, *τότε επειδή* $\dim_\mathbb{R} \mathcal{V} = 2$ *και* $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$, *θα έχουμε* $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \mathcal{V}$, *το οποίο σημαίνει ότι* $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$. *Αντίστροφα αν* $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$, *τότε προφανώς* $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \mathcal{V}$ *και επομένως* $\dim_\mathbb{R}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = \dim_\mathbb{R} \mathcal{V} = 2$.

Άσκηση 4.4.4 *Έστω $\mathcal{E}_\mathbb{K}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ με $\dim_\mathbb{K} = 7$, και έστω $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ δύο υπόχωροι του $\mathcal{E}$ για τους οποίους ισχύει $\dim_\mathbb{K} \mathcal{V} = 4$ και $\dim_\mathbb{K} \mathcal{W} = 5$. Να υπολογισθούν οι πιθανές τιμές της διάστασης $\dim_\mathbb{K}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})$ και να δειχθεί ότι: $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ αν-ν $\dim_\mathbb{K}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = 4$.*

Άσκηση 4.4.5 *Έστω $\mathcal{E}_\mathbb{K}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{Z}$ τρεις υπόχωροι του $\mathcal{E}$. Να δείξετε ότι* *ισχύει ο ακόλουθος τύπος:*

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}\cap\mathcal{W}\cap\mathcal{Z}) \leq \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{W} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{Z} -$$

$$-\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}\cap\mathcal{W}) - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}\cap\mathcal{Z}) - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W}\cap\mathcal{Z}) + \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}\cap\mathcal{W}\cap\mathcal{Z}).$$

4.5 Βαθμίδα Διανυσμάτων

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε μεθόδους υπολογισμού της διάστασης του υπόχωρου ο οποίος παράγεται από ένα πεπερασμένο σύνολο δοθέντων διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου.

Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{E} = n$, και έστω

$$\mathcal{B} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$$

μια βάση του $\mathcal{E}$.

Θεωρούμε ένα πεπερασμένο σύνολο $\mathcal{X}$ διανυσμάτων του $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{X} := \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\} \subseteq \mathcal{E}$$

και θεωρούμε τον υπόχωρο $\langle\mathcal{X}\rangle := \langle\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\rangle$ του $\mathcal{E}$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα αυτά.

Ορισμός 4.5.1 *Η* **βαθμίδα** $\mathbf{r}(\vec{x}_i)$ *των διανυσμάτων* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m$ *του* $\mathcal{E}$ *ορίζεται να είναι η διάσταση του υπόχωρου του* $\mathcal{E}$ *ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα αυτά:*

$$\mathbf{r}(\vec{x}_i) := \dim_{\mathbb{K}}\langle\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\rangle$$

Με άλλα λόγια η βαθμίδα $\mathbf{r}(\vec{x}_i)$ των διανυσμάτων $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\}$ μετρά το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων τα οποία ανήκουν στο σύνολο διανυσμάτων $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\}$. Επειδή $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{E} = n$ και το σύνολο $\langle\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\rangle$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{E}$, έπεται ότι:

$$\mathbf{r}(\vec{x}_i) \leq n = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{E}$$

Παρατήρηση 4.5.2 *Σημειώνουμε ότι, σύμφωνα με την Πρόταση ; η βαθμίδα* $\mathbf{r}(\vec{x}_i)$ *του συνόλου των διανυσμάτων* $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\}$ *δεν αλλάζει αν εκτελέσουμε στο σύνολο* $\mathcal{X}$ *μια από τις στοιχειώδεις πράξεις* ($\mathit{ΣΠ}_1$), ($\mathit{ΣΠ}_2$), *και* ($\mathit{ΣΠ}_3$) *ή τυχόντα συνδυασμό τους.*

Επειδή το σύνολο $\mathcal{B} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ είναι βάση του $\mathcal{E}$, τα διανύσματα του συνόλου $\mathcal{X}$ γράφονται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + \cdots + a_{1n}\vec{e}_n \\ \vec{x}_2 &= a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{2n}\vec{e}_n \\ &\cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ \vec{x}_m &= a_{m1}\vec{e}_1 + a_{m2}\vec{e}_2 + \cdots + a_{mn}\vec{e}_n \end{aligned} \qquad (*)$$

Το ακόλουθο κριτήριο είναι πολύ χρήσιμο για τον υπολογισμό της βαθμίδας διανυσμάτων.

Πρόταση 4.5.3 *Διατηρώντας τους παραπάνω συμβολισμούς, υποθέτουμε επιπλέον ότι ισχύει η ακόλουθη συνθήκη:*

$$a_{ii} \neq 0, \ \forall i = 1, 2, \cdots, m \quad \textit{και} \quad a_{ij} = 0, \ \forall i > j.$$

Τότε τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και ιδιαίτερα: $\mathbf{r}(\vec{x}_i) = m$.

Απόδειξη: Έστω $\lambda\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_m\vec{x}_m = \vec{0}$. Τότε από τις σχέσεις $(*)$ θα έχουμε: $\lambda_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + \cdots + a_{1n}\vec{e}_n) + \lambda_2(a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{2n}\vec{e}_n) + \cdots + \lambda_m(a_{m1}\vec{e}_1 + a_{m2}\vec{e}_2 + \cdots + a_{mn}\vec{e}_n) = \vec{0}$. Η τελευταία σχέση γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{gathered} (\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \cdots + \lambda_m a_{m1})\vec{e}_1 + \\ (\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \cdots + \lambda_m a_{m2})\vec{e}_2 + \\ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ (\lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \cdots + \lambda_m a_{mn})\vec{e}_n = \vec{0}. \end{gathered}$$

Από τη γραμμική ανεξαρτησία των $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$, θα έχουμε τις σχέσεις:

$$\begin{gathered} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \cdots + \lambda_m a_{m1} = 0 \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \cdots + \lambda_m a_{m2} = 0 \\ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \cdots + \lambda_m a_{mn} = 0 \end{gathered}$$

Από την υπόθεση όμως οι παραπάνω σχέσεις γράφονται ως εξής:

$$\lambda_1 a_{11} = 0$$

$$\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} = 0$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \cdots + \lambda_m a_{mm} = 0$$

Χρησιμοποιώντας ότι $a_{ii} \neq 0$, $\forall i = 1, 2, \cdots, m$, από τις παραπάνω σχέσεις θα έχουμε άμεσα ότι: $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$. Άρα το σύνολο $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και επομένως $\mathbf{r}(\vec{x}_i) = m$. $\square$

Σημείωση 4.5.1 *Η παραπάνω Πρόταση 4.5.3 ισχύει και με την υπόθεση:*

$$a_{ii} \neq 0, \ \forall i = 1, 2, \cdots, m \quad \textit{και} \quad a_{ij} = 0, \ \forall i < j.$$

Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 4.5.3.

Παράδειγμα 4.5.2 *Θεωρούμε έναν διανυσματικό χώρο $\mathcal{E}$ διάστασης 5 υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ και έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$ μια βάση του $\mathcal{E}$. Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του $\mathcal{E}$:*

$$A_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 + 3\vec{e}_4 + \vec{e}_5$$

$$A_2 = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4 + 8\vec{e}_5$$

$$A_3 = 6\vec{e}_1 + 17\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3 + 10\vec{e}_4 + 22\vec{e}_5$$

$$A_4 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.5.3 θα προσδιορίσουμε την βαθμίδα $\mathbf{r}(A_i)$ αυτών των διανυσμάτων.

Σχηματίζουμε τον ακόλουθο πίνακα ο οποίος περιγράφει τις συνιστώσες των διανυσμάτων στην βάση $\mathcal{B}$:

A_1	A_2	A_3	A_4
1	2	6	1
2	5	17	3
-4	-3	-7	-3
3	4	10	2
1	8	22	0

Εκτελώντας διαδοχικά τις στοιχειώδεις πράξεις όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

A_1	$A_2' = A_2 - 2A_1$	$A_3' = A_3 - 6A_1$	$A_4' = A_4 - A_1$
1	0	0	0
2	1	5	1
-4	5	17	1
3	-2	-8	-1
1	6	16	-1

A_1	A_2'	$A_3'' = A_3' - 5A_2'$	$A_4'' = A_4' - A_2'$
1	0	0	0
2	1	0	0
-4	5	-8	-4
3	-2	2	1
1	6	-14	-7

A_1	A_2'	A_3''	$A_4''' = A_4'' - \frac{1}{2}A_3''$
1	0	0	0
2	1	0	0
-4	5	-8	0
3	-2	2	0
1	6	-14	0

και χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 4.5.2 βλέπουμε ότι:

$$\mathbf{r}(A_1, A_2, A_3, A_4) = \mathbf{r}(A_1, A_2', A_3'')$$

΄Ομως τα διανύσματα

$$A_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 + 3\vec{e}_4 + \vec{e}_5$$

$$A_2' = \vec{e}_2 + 5\vec{e}_{23} - 2\vec{e}_4 + 6\vec{e}_5$$

$$A_3'' = -8\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 - 14\vec{e}_5$$

ικανοποιούν τις πρϋποθέσεις της Πρότασης 4.5.3, και επομένως $\mathbf{r}(A_1, A_2', A_3'') = 3$. *Αρα:*

$$\mathbf{r}(A_1, A_2, A_3, A_4) = 3$$

Πρόχειρη Δοκιμασία

Να προσδιορίσετε την βαθμίδα των διανυσμάτων:

$$\vec{X}_1 = (1, 4, -1, 3), \;\; \vec{X}_2 = (2, 1, -3, -1), \;\; \vec{X}_3 = (0, 2, 1, -5)$$

του $\mathbb{R}^4$.

Άσκηση 4.5.3 *Να προσδιορισθεί η βαθμίδα των ακόλουθων διανυσμάτων του* $\mathbb{C}^4$*:*

$$A_1 = (1, i, 1+i, -i)$$

$$A_2 = (-i, 0, 2-i, 1+i)$$

$$A_3 = (0, -1, 0, 1)$$

$$A_4 = (3i, -2-i, -4+3i, -i)$$

4.6 Ασκήσεις

Άσκηση 4.6.1 *Είναι τα παρακάτω σύνολα διανυσμάτων γραμμικά ανεξάρτητα; Σε κάθε περίπτωση δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.*

1. $\{1, \pi\} \subseteq \mathbb{R}$ *υπεράνω του* $\mathbb{Q}$.

   $\boxed{\text{Σωστό}}$ *Λάθος*

2. $\{1, i\} \subseteq \mathbb{C}$ *υπεράνω του* $\mathbb{R}$.

   $\boxed{\text{Σωστό}}$ *Λάθος*

3. $\{1, i\} \subseteq \mathbb{C}$ *υπεράνω του* $\mathbb{C}$.

   Σωστό $\boxed{\text{Λάθος}}$

4. $\{\vec{x}_2, \vec{x}_4, \vec{x}_6\} \subseteq \mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ *όταν γνωρίζουμε ότι το σύνολο* $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4, \vec{x}_5, \vec{x}_6\} \subseteq \mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

   $\boxed{\text{Σωστό}}$ *Λάθος*

5. $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_2, \vec{x}_4\} \subseteq \mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ *όταν γνωρίζουμε ότι* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = 3$.

   Σωστό $\boxed{\text{Λάθος}}$

Άσκηση 4.6.2 *Έστω* $\mathcal{V}$ *ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος* $\mathbb{C}$ *των μιγαδικών αριθμών, και έστω* $\{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ *μια βάση του* $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$*. Να δείξετε ότι ο* $\mathcal{V}$ *μπορεί να θεωρηθεί και ως διανυσματικός χώρος υπεράνω του* $\mathbb{R}$*, και μάλιστα το σύνολο* $\{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n, i\vec{\varepsilon}_1, \cdots, i\vec{\varepsilon}_n\}$ *είναι μια βάση του* $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$*. Να συμπεράνετε ότι:*

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}$$

Άσκηση 4.6.3 *Έστω* $\mathcal{V}$ *ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος* $\mathbb{K}$*. Να δείξετε ότι ο* $\mathcal{V}$ *ακριβώς δύο υπόχωρους αν και μόνον αν* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = 1$.

Άσκηση 4.6.4 *Έστω $\mathcal{V}$ ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα:*

$$\vec{x}_1 = (1, 1, 2, 4),\ \ \vec{x}_2 = (2, -1, -5, 2),\ \ \vec{x}_3 = (1, -1, -4, 0),\ \ \vec{x}_4 = (2, 1, 1, 5),$$

Να προσδιορίσετε μια βάση του $\mathcal{V}$ την οποία να επεκτείνετε σε μια βάση του $\mathbb{R}^4$.

Άσκηση 4.6.5 *Θεωρούμε το ακόλουθο υποσύ·νολο του $\mathbb{R}^3$:*

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y = z\}$$

Να δείξετε ότι το $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και να προσδιορισθεί υπόχωρος $\mathcal{W}$ του $\mathbb{R}^3$ έτσι ώστε: $\mathbb{R}^3 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$. Είναι ο υπόχωρος $\mathcal{W}$ μοναδικός;

Άσκηση 4.6.6 *Έστω $\mathcal{V}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Να δείξετε ότι αν $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_i, \cdots, \vec{e}_n\}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathcal{V}$, τότε και το σύνολο $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_i + \lambda\vec{e}_j, \cdots, \vec{e}_n\}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathcal{V}$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ και $i \neq j$.*

Άσκηση 4.6.7 *Έστω $\mathcal{V}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Να δείξετε ότι αν $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_i, \cdots, \vec{e}_n\}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathcal{V}$. Να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το σύνολο*
$$\{\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \cdots, \vec{e}_{n-1} + \vec{e}_n, \vec{e}_n + \vec{e}_1\}$$
είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

2. *Το n είναι περιττός.*

Άσκηση 4.6.8 *Θεωρούμε τους ακόλουθους υπόχωρους του $\mathbb{R}^4$:*

$$\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\; x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}$$

$$\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\; x_1 = x_4 \;\textit{και}\; x_2 = 2x_3\}$$

$$\mathcal{Z} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

$$\mathcal{X} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\; x_1 + x_2 = 0 \;\textit{και}\; x_2 = 2x_4\}$$

Να βρεθούν βάσεις και η διάσταση των υπόχωρων: $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ και $\mathcal{Z} \cap \mathcal{X}$.

Άσκηση 4.6.9 *Να προσδιορισθεί, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η βαθμίδα των διανυσμάτων:*

$$\vec{x} = (-1, 1, 3),\ \ \vec{y} = (5, -2, 9),\ \ \vec{z} = (1, -\lambda, 2\lambda)$$

Άσκηση 4.6.10 *Έστω $\mathbb{M}_{(2\times 2)}(\mathbb{C})$ ο διανυσματικός χώρος των 2×2 πινάκων υπεράνω του σώματος $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών. Να εξετασθεί αν το ακόλουθο σύνολο πινάκων $\{A, B, C, D\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & -i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 2-i & 1+i \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3i & -2-i \\ -5+3i & -i \end{pmatrix}$$

Άσκηση 4.6.11

1. *Να προσδιορισθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$*

   $$\vec{x}_1 = (\lambda, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}),\ \vec{x}_2 = (-\frac{1}{2}, \lambda, -\frac{1}{2}),\ \vec{x}_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \lambda)$$

   να είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

2. *Για ποιές τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τα ακόλουθα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$ είναι γραμμικά εξαρτημένα;*

   (α')

   $$\vec{x}_1 = (3, -2, -1, 3),\ \vec{x}_2 = (1, 0, 2, 4),\ \vec{x}_3 = (1, -3, \lambda, \mu)$$

   (β')

   $$\vec{x}_1 = (1, 2, \lambda, 1),\ \vec{x}_2 = (\lambda, 1, 2, 3),\ \vec{x}_3 = (0, 1, \mu, 0)$$

3. *Να προσδιορισθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε τα διανύσματα του $\mathbb{R}_3[t]$*

   $$P_1(t) = 3t^3 + t^2 - 4t + 6,\ P_2(t) = t^3 + t^2 + 4t + 4,\ P_3(t) = t^3 - 4t + \lambda$$

   να είναι γραμμικά εξαρτημένα.

4. *Να προσδιορισθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε τα διανύσματα του $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$*

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & \lambda \end{pmatrix}$$

   να είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άσκηση 4.6.12 *Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$:*

$$\vec{x} = (1, -1, 2), \quad \vec{y} = (3, 1, -2)$$

Να δείξετε ότι τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα και ακολούθως να προσδιορισθεί ο πραγματικός αριθμός μ έτσι ώστε το σύνολο $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$, όπου $\vec{z} = (1, \mu, 1)$, να είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 4.6.13 *1. Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του υπόχωρου $\mathcal{V}$ του $\mathbb{R}^4$, όπου*

$$\mathcal{V} := \{(x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 = x_3\}$$

2. Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του υπόχωρου $\mathcal{V}$ του $\mathbb{R}^4$, όπου

$$\mathcal{V} := \{(x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\}$$

Άσκηση 4.6.14 *Έστω $\mathcal{V}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Έστω $\mathcal{X} := \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{V}$.*

1. Να δείξετε ότι το σύνολο

$$\{\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{x}_2 + \vec{x}_3, \cdots, \vec{x}_{n-1} + \vec{x}_n, \vec{x}_n + \vec{x}_1\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

2. Να δείξετε ότι το σύνολο

$$\{\vec{x}_1, k_2\vec{x}_1 + \vec{x}_2, k_3\vec{x}_1 + \vec{x}_3, \cdots, k_{n-1}\vec{x}_1 + \vec{x}_n, k_n\vec{x}_1 + \vec{x}_n\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο, $\forall k_i \in \mathbb{K}$, $2 \leq i \leq n$. Να εξετασθεί εάν ισχύει το αντίστροφο.

Άσκηση 4.6.15 *Έστω $\mathcal{V}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Αν $\mathcal{W}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$ με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} + 1 < \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$, να δείξετε ότι υπάρχει ένας υπόχωρος $\mathcal{Z}$ του $\mathcal{V}$ έτσι ώστε: $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{V}$ και $\mathcal{W} \neq \mathcal{Z} \neq \mathcal{V}$.*

Άσκηση 4.6.16 *Έστω $\mathcal{V}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Το μήκος μια αλυσίδας υπόχωρων*

$$\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{W}_{k-1} \subset \mathcal{W}_k$$

ορίζεται να είναι ο αριθμός k. Να δείξετε ότι ο $\mathcal{V}$ είναι πεπερασμένης διάστασης αν και μόνον αν υπάρχει μέγιστο στα μήκη όλων των δυνατών αλυσίδων υπόχωρων του $\mathcal{V}$.

Άσκηση 4.6.17 *Να εξετάσετε εάν τα ακόλουθα πολυώνυμα*

$$P(t) = t^3 - t^2 + 3,\ Q(t) = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 10,\ R(t) = 3t^3 + 3t^2 + t + 1$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_3[t]$.

Άσκηση 4.6.18 *Να προσδιορισθεί μια βάση του υπόχωρου του* $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *ο οποίος παράγεται από τους πίνακες*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 4.6.19 *να δείξετε ότι το σύνολο πολυωνύμων:*

$$P_0(t) = 1,\ P_1(t) = 1 + t,\ P_2(t) = 1 + t + t^2,\ \cdots,\ P_n(t) = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n$$

είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}_n[t]$. *Ακολούθως να βρεθούν οι συνιστώσες του τυχόντος πολυωνύμου* $P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ *ως προς την παραπάνω βάση.*

Άσκηση 4.6.20 *Να προσδιορισθεί η διάσταση του υπόχωρου του* $\mathbb{R}^n$ *ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα:*

$$\vec{x}_1 = (1, 1, 0, \cdots, 0, 0, 0),\ \ \vec{x}_2 = (0, 1, 1, \cdots, 0, 0, 0),\ \ \cdots$$

$$\vec{x}_{n-1} = (0, 0, 0, \cdots, 0, 1, 1),\ \ \vec{x}_n = (1, 0, 0, \cdots, 0, 0, 1)$$

Άσκηση 4.6.21 *Έστω* $\mathcal{V}$ *το σύνολο όλων των* 3×3 *πινάκων υπεράνω του* $\mathbb{R}$, *της μορφής:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & e \\ -c & -e & 0 \end{pmatrix}$$

Να δείξετε ότι το $\mathcal{V}$ *είναι ένας υπόχωρος του* $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, *και αφού προσδιορίσετε μια βάση του, να υπολογίσετε την διάσταση του.*

Άσκηση 4.6.22 *Έστω* $\mathcal{V}$ *το σύνολο όλων των* 3×3 *πινάκων υπεράνω του* $\mathbb{R}$, *της μορφής:*

$$A = \begin{pmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

Να δείξετε ότι το $\mathcal{V}$ *είναι ένας υπόχωρος του* $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, *και αφού προσδιορίσετε μια βάση του, να υπολογίσετε την διάσταση του.*

Άσκηση 4.6.23 *Έστω S ένα πεπερασμένο σύνολο με n στοιχεία. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$ υπεράνω του $\mathbb{R}$ όλων των συναρτήσεων $f : S \to R$. Για κάθε στοιχείο $s \in S$ θεωρούμε την χαρακτηριστική συνάρτηση*

$$\chi_s : S \to \mathbb{R},\, t \mapsto \chi_s(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \textit{αν} \;\; t = s \\ 0, & \textit{αν} \;\; t \neq s \end{array} \right\}$$

Να δείξετε ότι το σύνολο $\mathcal{B} := \{\chi_s \,|\, s \in S\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$. Ποιά είναι η διάσταση του διανυσματικού χώρου $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$;

Άσκηση 4.6.24 *Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{A}(\mathbb{R})$ των ακολουθιών με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, και έστω $p, q \in \mathbb{R}$ με $q \neq 0$. Έστω*

$$\mathcal{V} = \{(x_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{A}(\mathbb{R}) \,|\, x_n = px_{n-1} + qx_{n-2}\}$$

ο υπόχωρος των αναγωγικών ακολουθιών. Να δείξετε προσδιορίσετε μια βάση και την διάσταση του $\mathcal{V}$.

Κεφάλαιο 5

Γραμμικες Απεικονισεις

Στην άλγεβρα, και γενικότερα στα Μαθηματικά, σπουδαίο ρόλο στην μελέτη μιας έννοιας ή ενός αντικειμένου διαδραματίζει η σύγκριση της με ομοειδείς έννοιες ή ομοειδή αντικείμενα. Στο παρόν Κεφάλαιο θα μελετήσουμε τρόπους σύγκρισης δύο διανυσματικών χώρων υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Όπως είδαμε η βασική δομή ενός διανυσματικού χώρου καθορίζεται από την πράξη της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού. Επομένως είναι φυσικό να προσπαθήσουμε να συγκρίνουμε δύο διανυσματικούς χώρους μέσω μιας απεικόνισης η οποία απαιτούμε να διατηρεί την βασική δομή τους, δηλαδή την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Έτσι οδηγούμαστε στην έννοια της γραμμικής απεικόνισης μέσω της οποίας συσχετίζουμε και συγκρίνουμε δυο διανυσματικούς χώρους υπεράνω ενός σώματος, αν και ενδεχόμενα τα στοιχεία τους είναι διαφορετικής φύσης.

5.1 Ορισμός - Βασικές Ιδιότητες - Παραδείγματα

Από τώρα και στο εξής θεωρούμε ένα σώμα $\mathbb{K}$ και δύο διανυσματικούς χώρους $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.

Ορισμός 5.1.1 *Μια απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ καλείται* **γραμμική** *αν ικανοποιεί τα ακόλουθες συνθήκες:*

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$: $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$.
2. $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}, \forall k \in \mathbb{K}$: $f(k\vec{x}) = kf(\vec{x})$.

Πρίν περάσουμε σε παραδείγματα γραμμικών απεικονίσεων, θα δούμε κάποιες στοιχειώδεις ιδιότητες των γραμμικών απεικονίσεων οι οποίες απορρέουν σχετικά άμεσα από το ορισμό. Η παρακάτω πρόταση δείχνει ότι μια γραμμική απεικόνιση διατηρεί όλες τις έννοιες και κατασκευές οι οποίες απορρέουν από τον ορισμό του διανυσματικού χώρου.

Πρόταση 5.1.2 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}$ και $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$.*

1. $f(\vec{0}) = \vec{0}$.
2. $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x}), \ \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$.
3. $f(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{x}) - f(\vec{y}), \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$.
4. $\forall n \geq 1, \ \forall \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n \in \mathcal{E}, \ \forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$:

$$f(\lambda_1 \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n) = \lambda_1 f(\vec{x}_1) + \cdots + \lambda_n f(\vec{x}_n).$$

Απόδειξη: 1. Επειδή $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, από τη γραμμικότητα της f έπεται ότι $f(\vec{0}) = f(\vec{0} + \vec{0}) = f(\vec{0}) + f(\vec{0})$. Επομένως $\vec{0} = f(\vec{0}) - f(\vec{0}) = [f(\vec{0}) + f(\vec{0})] - f(\vec{0}) = f(\vec{0}) + [f(\vec{0}) - f(\vec{0})] = f(\vec{0}) + \vec{0} = f(\vec{0})$.

2. Χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα της f θα έχουμε: $f(-\vec{0}) = f((-1)\vec{0}) = (-1)f(\vec{0}) = -f(\vec{0})$.

3. Χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα της f και το 2. θα έχουμε: $f(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{x} + (-\vec{y})) = f(\vec{x}) + f(-\vec{y}) = f(\vec{x}) - f(\vec{y})$.

4. Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο πλήθος $n \geq 1$ των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$. Η περίπτωση $n = 1$ συμπίπτει με το 2. του ορισμού 5.1.1. Αν $n = 2$, τότε απο τον ορισμό 5.1.1 θα έχουμε: $f(\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2) = f(\lambda_1\vec{x}_1) + f(\lambda_2\vec{x}_2) = \lambda_1 f(\vec{x}_1) + \lambda_2 f(\vec{x}_2)$. Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $n \geq 2$ το πλήθος διανύσματα. Τότε, χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, θα έχουμε $f(\lambda_1\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n + \lambda_{n+1}\vec{x}_{n+1}) = f((\lambda_1\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n) + \lambda_{n+1}\vec{x}_{n+1}) = f(\lambda_1\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n) + f(\lambda_{n+1}\vec{x}_{n+1}) = \lambda_1 f(\vec{x}_1) + \lambda_2 f(\vec{x}_2) + \cdots + \lambda_n f(\vec{x}_n) + \lambda_{n+1} f(\vec{x}_{n+1})$. Επομένως ο ισχυρισμός 4. ισχύει για κάθε $n \geq 1$. □

Πόρισμα 5.1.3 *Έστω $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Μια απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ είναι γραμμική αν και μόνον αν:*

$$f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y}), \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

Απόδειξη: Αν η f είναι γραμμική, τότε η ζητούμενη σχέση προκύπτει από την Πρόταση 5.1.2. Αν η παραπάνω σχέση ισχύει, τότε η γραμμικότητα της f προκύπτει θέτοντας διαδοχικά $\lambda = \mu = 1$ και $\mu = 0$ στην παραπάνω σχέση. □

Παράδειγμα 5.1.1 *Έστω $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.*

1. Η μηδενική απεικόνιση $\mathbb{O}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, η οποία ορίζεται ως εξής: $\mathbb{O}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\vec{x}) = \vec{0}$, είναι τετριμμένα γραμμική.

2. Η ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, η οποία ορίζεται ως εξής: $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}(\vec{x}) = \vec{x}$, είναι τετριμμένα γραμμική.

3. Έστω $r \in \mathbb{K}$ ένας σταθερός αριθμός. Ομοθεσία με λόγο r επί του $\mathcal{E}$ καλείται η απεικόνιση $f_r : \mathcal{E} \to \mathcal{E}, \vec{x} \mapsto f_r(\vec{x}) = r\vec{x}$. Προφανώς η f_r είναι μια γραμμική απεικόνιση.

Παρατηρούμε ότι για $r = 1$ έχουμε $f_1 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$, και για $r = 0$ έχουμε $f_0 = \mathbb{O}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$.

4. Έστω η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + y, z)$. Τότε η f είναι γραμμική.

5. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως εξής: $f(a + bi) = a$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε η f είναι γραμμική.

6. Έστω $n \geq 1$ ένας φυσικός αριθμός και έστω $\mathbb{K}_n[t]$ ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων με βαθμό $\leq n$ υπεράνω του $\mathbb{K}$. Τότε η απεικόνιση $f : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}_n[t]$ η οποία ορίζεται ως εξής

$$f(a_0, a_1, \cdots, a_n) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$$

είναι γραμμική.

7. Η απεικόνιση $D : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$ η οποία στέλνει κάθε πολυώνυμο $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$ στην παράγωγο του $D(P(t)) = a_1 + 2a_2 t + \cdots + n a_n t^{n-1}$ είναι γραμμική απεικόνιση. Προφανώς η D μπορεί να θεωρηθεί και ως γραμμική απεικόνιση $\mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}_n[t]$ ή ως γραμμική απεικόνιση $\mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}_{n-1}[t]$.

8. Έστω $\theta \in [0, 2\pi]$ μια σταθερή γωνία, και έστω η απεικόνιση

$$f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto f_\theta(x, y) = (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y(\cos(\theta))$$

Τότε η απεικόνιση f_θ, η οποία αναπαριστά στροφή επιπέδου κατά γωνία θ, είναι γραμμική.

Πρόχειρη Δοκιμασία

Αποδείξτε ότι οι απεικονίσεις του Παραδείγματος 5.1.1 είναι πράγματι γραμμικές.

Πρόχειρη Δοκιμασία

Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) := (x+1,y)$. Είναι η f γραμμική;

Σχόλιο 5.1.2 *Όπως έχουμε δει υπάρχουν σύνολα τα οποία είναι διανυσματικοί χώροι υπεράνω δύο διαφορετικών σωμάτων. Το παρακάτω παράδειγμα δείχνει ότι η έννοια της γραμμικής απεικόνισης εξαρτάται από το σώμα υπεράνω του οποίου είναι ορισμένοι οι διανυσματικοί χώροι.*

Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(a+bi) = b+ai$, όπου $a,b \in \mathbb{R}$. Αν θεωρήσουμε το $\mathbb{C}$ σαν διανυσματικό χώρο υπεράνω του $\mathbb{R}$, τότε η f είναι γραμμική. Πραγματικά: έστω $z = a_1 + b_1 i$ και $w = a_2 + b_2 i$ δύο μιγαδικοί αριθμοί. Τότε $f(z+w) = f\big((a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)\big) = f\big((a_1+a_2)+(b_1+b_2)i\big) = (b_1+b_2)+(a_1+a_2)i = (b_1+a_1i)+(b_2+a_2i) = f(z)+f(w)$. Επίσης αν $r \in \mathbb{R}$, τότε $f(rz) = f\big(r(a_1+b_1i)\big) = f(ra_1+rb_1i) = rb_1+ra_1i = r(b_1+a_1i) = rf(z)$. Άρα η $f : \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ είναι γραμμική. Η f όμως δεν είναι γραμμική όταν το $\mathbb{C}$ θεωρηθεί ως διανυσματικός χώρος υπεράνω του εαυτού του. Πραγματικά για να είναι η $f : \mathbb{C}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ γραμμική θα πρέπει να ισχύει $f(zw) = zf(w), \forall z,w \in \mathbb{C}$. Όμως $f(zw) = f\big((a_1+b_1i)(a_2+b_2i)\big) = f\big((a_1a_2-+b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i\big) = (a_1b_2+b_1a_2)+(a_1a_2+b_1b_2)i$, και $zf(w) = (a_1+b_1i)(b_2+a_2i) = (a_1b_2-b_1a_2)+(a_1a_2+b_1b_2)i$. Ιδιαίτερα διαλέγοντας $z = w = i$ βλέπουμε ότι $f(zw) \neq zf(w)$ και επομένως η f δεν είναι γραμμική.

Πρόχειρη Δοκιμασία

Να δείξετε ότι η απεικόνιση $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $f(z_1,z_2) = z_1+\overline{z}_2$, όπου $\overline{z}$ συμβολίζει τον συζυγή του μιγαδικού αριθμού z, είναι γραμμική όταν τα σύνολα $\mathbb{C}^2$ και $\mathcal{C}$ θεωρηθούν ως διανυσματικοί χώροι υπεράνω του $\mathbb{C}$, αλλά δεν είναι γραμμική όταν τα σύνολα $\mathbb{C}^2$ και $\mathcal{C}$ θεωρηθούν ως διανυσματικοί χώροι υπεράνω του $\mathbb{R}$.

Όπως έχουμε δει κάθε σώμα $\mathbb{K}$ μπορεί να θεωρηθεί σαν διανυσματικός χώρος υπεράνω του εαυτού του. Αν $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$, τότε οι γραμμικές απεικονίσεις $\mathcal{E} \to \mathbb{K}$ έχουν ιδιαίτερη σημασία και θα μας απασχολήσουν στο επόμενο Κεφάλαιο. Προς το παρόν αναφέρουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 5.1.4 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathbb{K}$ καλείται* **γραμμική μορφή** *επί του $\mathcal{E}$.*

Το σύνολο όλων των γραμμικών μορφών επί του $\mathcal{E}$ συμβολίζεται με $\mathcal{E}^\star$.

Οι ακόλουθες δύο προτασεις μας εφοδιάζουν με μια μεγάλη ποικιλία παραδειγμάτων γραμμικών απεικονίσεων.

Πρόταση 5.1.5 *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα.*

1. Έστω $a_1, a_2, \cdots, a_n$ σταθεροί αριθμοί από το σώμα $\mathbb{K}$. Τότε η απεικόνιση

$$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},\ \vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto f(\vec{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

είναι γραμμική, δηλαδή είναι μια γραμμική μορφή.

2. Αντίστροφα αν $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ είναι μια γραμμική μορφή, τότε υπάρχουν (μοναδικοί) αριθμοί $a_1, a_2, \cdots, a_n$ από το σώμα $\mathbb{K}$, έτσι ώστε: $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$, $\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

Απόδειξη: 1. Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{K}^n$. Τότε: $f(\vec{x} + \vec{y}) = f((x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n)) = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n) = a_1(x_1 + y_1) + a_2(x_2 + y_2) + \cdots + a_n(x_n + y_n) = (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) + (a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$. Άρα ισχύει η συνθήκη 1. του ορισμού 5.1.1. Επίσης αν $\lambda \in \mathbb{K}$, τότε: $f(\lambda\vec{x}) = f(\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n)) = f(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n) = a_1\lambda x_1 + a_2\lambda x_2 + \cdots a_n\lambda x_n = \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) = \lambda f(\vec{x})$. Άρα ισχύει και η συνθήκη 2. του ορισμού 5.1.1, και επομένως η f είναι γραμμική.

2. Έστω $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ μια γραμμική απεικόνιση. Θέτουμε $a_1 := f(\vec{e}_1), a_2 := f(\vec{e}_2), \cdots, a_n := f(\vec{e}_n)$, όπου $\vec{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, \vec{e}_n = (0, 0, \cdots, 1)$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{K}^n$. Τότε για κάθε $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, θα έχουμε $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$. Επομένως, χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα της f, θα έχουμε: $f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n) = x_1f(\vec{e}_1) + x_2f(\vec{e}_2) + \cdots + x_nf(\vec{e}_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$. Από τον ορισμό τους οι αριθμοί $a_1, a_2, \cdots, a_n$ είναι μοναδικοί. □

Παράδειγμα 5.1.3 *Η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := 3x + 2y - 5z$ είναι γραμμική.*

Πρόταση 5.1.6 *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και $n, m \in \mathbb{N}$. Αν $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ είναι μια απεικόνιση, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η f είναι γραμμική.*

2. *Υπάρχουν m το πλήθος γραμμικές μορφές $f_1, \cdots, f_m : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ έτσι ώστε:*
$$f(\vec{x}) = \big(f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \cdots, f_m(\vec{x})\big).$$

3. *Υπάρχουν nm το πλήθος αριθμοί $\{a_{ij}\}_{1\leq j\leq n}^{1\leq i\leq m}$ από το σώμα $\mathbb{K}$, έτσι ώστε, $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:*

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \cdots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$$

Απόδειξη: 1. $\Rightarrow$ 2. Η απεικόνιση f προσδιορίζει μοναδικά m απεικονίσεις $f_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, όπου $f_i(\vec{x}) =$ η i-οστή συνιστώσα του διανύσματος $f(\vec{x})$. Θα δείξουμε ότι η f_i είναι γραμμική, $\forall i = 1, 2, \cdots, m$. Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^n$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Τότε $f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \big(f_1(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}), f_2(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}), \cdots, f_m(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y})\big)$. Επειδή η f είναι γραμμική θα έχουμε

$$\begin{aligned}
f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) &= \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y}) \\
&= \lambda(f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \cdots, f_m(\vec{x})) + \mu(f_1(\vec{y}), f_2(\vec{y}), \cdots, f_m(\vec{y})) \\
&= (\lambda f_1(\vec{x}), \lambda f_2(\vec{x}), \cdots, \lambda f_m(\vec{x})) + (\mu f_1(\vec{y}), \mu f_2(\vec{y}), \cdots, \mu f_m(\vec{y})) \\
&= (\lambda f_1(\vec{x}) + \mu f_1(\vec{y}), \lambda f_2(\vec{x}) + \mu f_2(\vec{y}), \cdots, \lambda f_m(\vec{x}) + \mu f_m(\vec{y}))
\end{aligned}$$

Επομένως $f_i(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda f_i(\vec{x}) + \mu f_1(\vec{y})$, $\forall i = 1, 2, \cdots, m$, και άρα η f_i είναι γραμμική.

2. $\Leftrightarrow$ 3. Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 5.1.5.

2. $\Rightarrow$ 1. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των πράξεων του διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}^m$ και την γραμμικότητα των απεικονίσεων f_i, $1 \leq i \leq m$, έπεται άμεσα ότι η f είναι γραμμική. $\square$

Παράδειγμα 5.1.4 *Θεωρούμε τις απεικονίσεις*

$$f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3,\ (x_1, \cdots, x_5) \mapsto f(x_1, \cdots, x_5) = (x_1 - 2x_3, 4x_5 + 8x_4, x_2 - 3x_5 + 6x_1 + 5x_3)$$

$$g : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3,\ (x, y, z) \mapsto g(x, y, z) = (x + iz, 3ix - 2y + iz, 4y + 5iz)$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.6 οι απεικονίσεις f, g είναι γραμμικές.

Άσκηση 5.1.5 *Έστω A ένας σταθερός $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ των $m \times n$ πινάκων υπεράνω του $\mathbb{K}$ και ορίζουμε απεικόνιση*

$$f : \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K}),\ M \mapsto f(M) := MA - AM$$

Να εξετασθεί εάν η f είναι γραμμική.

Λύση: *Χρησιμοποιώντας τις στοιχειώδεις ιδιότητες πινάκων από το Κεφάλαιο 2, θα έχουμε $f(M_1 + M_2) = (M_1 + M_2)A - A(M_1 + M_2) = M_1A + M_2A - AM_1 - AM_2 = (M_1A - AM_1) + (M_2A - AM_2) = f(M_1) + f(M_2)$. Επίσης αν $r \in \mathbb{K}$, τότε: $f(rM) = (rM)A - A(rM) = r(MA) - (Ar)M = r(MA) - r(AM) = r(MA - AM) = rf(M)$. Άρα η f είναι γραμμική.*

Πρόχειρη Δοκιμασία

Έστω A ένας σταθερός $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους $\mathbb{K}_n$ και $\mathbb{K}_m$ των στηλών με n και m στοιχεία αντίστοιχα, από το σώμα $\mathbb{K}$. Ορίζουμε μια απεικόνιση

$$f_A : \mathbb{K}_n \to \mathbb{K}_m, \;\; \vec{X} \mapsto f_A(\vec{X}) := A\vec{X}$$

Να δείξετε ότι η f είναι γραμμική.

5.2 Πυρήνας και Εικόνα Γραμμικής Απεικόνισης

Όπως είδαμε στην Πρόταση 5.1.2 μια γραμμική απεικόνιση διατηρεί γραμμικούς συνδυασμούς διανυσμάτων. Στην παρούσα παράγραφο θα δούμε ότι γενικότερα μια γραμμική απεικόνιση διατηρεί υπόχωρους. Επίσης θα μελετήσουμε ειδικού τύπου γραμμικές απεικονίσεις.

Ορισμός 5.2.1 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Έστω $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$ και $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{F}$ τυχόντα υποσύνολα.*

1. *Η* **εικόνα** *$f(\mathcal{V})$ του υποσυνόλου $\mathcal{V}$ μέσω της f ορίζεται να είναι το υποσύνολο:*
$$f(\mathcal{V}) := \{\vec{y} \in \mathcal{F} \,|\, \exists \vec{x} \in \mathcal{V} : f(\vec{x}) = \vec{y}\}$$
2. *Η* **αντίστροφη εικόνα** *$f^{-1}(\mathcal{W})$ του υποσυνόλου $\mathcal{W}$ μέσω της f ορίζεται να είναι το υποσύνολο:*
$$f^{-1}(\mathcal{W}) := \{\vec{x} \in \mathcal{E} \,|\, f(\vec{x}) \in \mathcal{W}\}$$

Επειδή, όπως θα δούμε σε λίγο, οι υπόχωροι $f^{-1}(\{\vec{0}\})$ και $f(\mathcal{E})$ παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον, αξίζουν ιδιαίτερη μνεία και γι' αυτό δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 5.2.2 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.*

1. *Η* **εικόνα** *$\mathrm{Im}(f)$ της f ορίζεται να είναι η εικόνα του $\mathcal{E}$ μέσω της f, δηλαδή:*
$$\mathrm{Im}(f) := f(\mathcal{E}) = \{\vec{y} \in \mathcal{F} \,|\, \exists \vec{x} \in \mathcal{E} : f(\vec{x}) = \vec{y}\}$$
2. *Ο* **πυρήνας** *$\mathrm{Ker}(f)$ της f ορίζεται να είναι η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(\{\vec{0}\})$ του μηδενικού υπόχωρου $\{\vec{0}\}$ του $\mathcal{F}$ μέσω της f, δηλαδή:*
$$\mathrm{Ker}(f) := f^{-1}(\{\vec{0}\}) = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \,|\, f(\vec{x}) = \vec{0}\}$$

Παράδειγμα 5.2.1 *Θεωρούμε την απεικόνιση*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) := (x + y, y)$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.6 η f είναι γραμμική. Θα προσδιορίσουμε την εικόνα $\mathrm{Im}(f)$ και τον πυρήνα $\mathrm{Ker}(f)$ της f. Έστω $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f)$. Τότε $f(x, y, z) = (0, 0)$ και επομένως $(x + y, y) = (0, 0)$. Αυτό σημαίνει ότι $x = -y$ και $y = 0$, και άρα $x = y = 0$. Επομένως $\mathrm{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = y = 0\} = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \in \mathbb{R}\}$. Προφανώς ο $\mathrm{Ker}(f)$ είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ ο οποίος παράγεται από το διάνυσμα $(0, 0, 1)$ το οποίο αποτελεί βάση του. Από την άλλη πλευρά έστω $(a, b) \in \mathrm{Im}(f)$. Τότε υπάρχει ένα διάνυσμα $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ έτσι ώστε $f(x, y, z) = (a, b)$, δηλαδή $(x+y, y) = (a, b)$. Επομένως $x+y = a$ και $y = b$, το οποίο συνεπάγεται ότι $x = a-b$. Έτσι $\mathrm{Im}(f) = \{(a-b, b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a, b \in \mathbb{R}\} = \{a(1, 0)-b(1, 1) \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$. Προφανώς η εικόνα $\mathrm{Im}(f)$ είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $\vec{e} = (1, 0)$ και $\vec{\varepsilon} = (1, 1)$ τα οποία αποτελούν βάση του. Άρα $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(f) = 2$ και επειδή $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$, θα έχουμε $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ (φυσικά αυτό μπορεί να διαπιστωθεί και άμεσα).

Πρόταση 5.2.3 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.*

1. *Αν $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$, τότε η εικόνα $f(\mathcal{V})$ του $\mathcal{V}$ μέσω της f είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{F}$.*

2. *Αν $\mathcal{W}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{F}$, τότε η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(\mathcal{W})$ του $\mathcal{W}$ μέσω της f είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$.*

Απόδειξη: 1. Παρατηρούμε ότι επειδή ο $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{E}$, θα έχουμε $\vec{0} \in \mathcal{V}$. Επίσης επειδή η f είναι γραμμική, θα έχουμε $f(\vec{0}) = \vec{0}$. Άρα $\vec{0} \in f(\mathcal{V})$ και επομένως το σύνολο $f(\mathcal{V})$ είναι μη-κενό. Έστω $\vec{z}, \vec{w} \in f(\mathcal{V})$, και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Τότε υπάρχουν $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$ έτσι ώστε $f(\vec{x}) = \vec{z}$ και $f(\vec{y}) = \vec{w}$. Επειδή το σύνολο $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{E}$, έπεται ότι $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in \mathcal{V}$. Τότε $f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) \in f(\mathcal{V})$, και επομέ·νώς επειδή η f είναι γραμμική θα έχουμε: $f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y}) = \lambda\vec{z} + \mu\vec{w} \in f(\mathcal{V})$. Συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $f(\mathcal{V})$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{F}$.

2. Επειδή η f είναι γραμμική θα έχουμε $f(\vec{0}) = \vec{0}$, και επειδή ο $\mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{E}$ θα έχουμε $\vec{0} \in \mathcal{W}$. Άρα $\vec{0} \in f^{-1}(\mathcal{W})$ και επομένως το σύνολο $f^{-1}(\mathcal{W})$ είναι μη-κενό. Έστω τώρα $\vec{x}, \vec{y} \in f^{-1}(\mathcal{W})$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Τότε $f(\vec{x}), f(\vec{y}) \in \mathcal{W}$, και επειδή ο $\mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{F}$, έπεται ότι $\lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y}) \in \mathcal{W}$. Όμως επειδή η f είναι γραμμική θα έχουμε $\lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y}) = f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) \in \mathcal{W}$, το οποίο σημαίνει ότι $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in f^{-1}(\mathcal{W})$. Άρα το σύνολο $f^{-1}(\mathcal{W})$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$. □

Επειδή το μονοσύνολο $\{\vec{0}\}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{F}$ και ο χώρος $\mathcal{E}$ είναι υπόχωρος του εαυτού του, από την παραπάνω πρόταση έχουμε την ακόλουθη συνέπεια.

Πόρισμα 5.2.4 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.*

1. *Ο πυρήνας $\mathrm{Ker}(f)$ της f είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$.*
2. *Η εικόνα $\mathrm{Im}(f)$ της f είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{F}$.*

Θα δούμε τώρα ότι μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ επάγει μια 1-1 και επί αντιστοιχία ανάμεσα σε κάποια διακεκριμένα σύνολα υπόχωρων των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$.

Πρόταση 5.2.5 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Τότε η απεικόνιση συνόλων*

$$\mathbf{F} : \big\{\textit{υπόχωροι } \mathcal{V} \textit{ του } \mathcal{E} \textit{ έτσι ώστε } \mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathcal{V}\big\} \longrightarrow \big\{\textit{υπόχωροι } \mathcal{W} \textit{ του } \mathrm{Im}(f)\big\}$$

η οποία ορίζεται ως $\mathbf{F}(V) := f(\mathcal{V})$ είναι 1-1 και επί. Η αντίστροφη της $\mathbf{F}$ είναι η απεικόνιση $\mathbf{F}^{-1}(\mathcal{W}) := f^{-1}(\mathcal{W})$.

Απόδειξη: Αν $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$, τότε από τη Πρόταση 5.2.3 έπεται ότι $f(\mathcal{V})$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{F}$, και προφανώς θα έχουμε $f(\mathcal{V}) \subseteq \mathrm{Im}(f) = f(\mathcal{E})$. Επομένως η απεικόνιση $\mathbf{F}$ είναι καλά ορισμένη. Έστω $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ δύο υπόχωροι του $\mathcal{E}$ οι οποίοι περιέχουν τον πυρήνα $\mathrm{Ker}(f)$: $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathcal{V}_i$, $i = 1, 2$, και υποθέτουμε ότι ισχύει: $\mathbf{F}(\mathcal{V}_1) = \mathbf{F}(\mathcal{V}_2)$, δηλαδή $f(\mathcal{V}_1) = f(\mathcal{V}_2)$. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$. Έστω $\vec{x} \in \mathcal{V}_1$. Τότε $f(\vec{x}) \in f(\mathcal{V}_1) = f(\mathcal{V}_2)$. Άρα υπάρχει $\vec{y} \in \mathcal{V}_2$ έτσι ώστε $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$, και επομένως $f(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}$· δηλαδή $\vec{x} - \vec{y} \in \mathrm{Ker}(f)$. Επειδή $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathcal{V}_2$, έπεται ότι $\vec{z} := \vec{x} - \vec{y} \in \mathcal{V}_2$. Τότε όμως το διάνυσμα $\vec{x} = \vec{z} + \vec{y}$ ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{V}_2$. Επομένως $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2$. Δουλεύοντας ανάλογα θα έχουμε $\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_1$. Άρα $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$ και η απεικόνιση $\mathbf{F}$ είναι 1-1. Έστω τώρα $\mathcal{W}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{F}$ έτσι ώστε $\mathcal{W} \subseteq \mathrm{Im}(f) = f(\mathcal{E})$. Θέτουμε $V := f^{-1}(\mathcal{W})$. Από τη Πρόταση 5.2.3 έπεται ότι ο $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$. Θα δείξουμε ότι $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathcal{V}$ και $\mathbf{F}(\mathcal{V}) = \mathcal{W}$. Αν $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$, τότε $f(\vec{x}) = \vec{0} \in \mathcal{W}$. Άρα $\vec{x} \in f^{-1}(\mathcal{W}) = \mathcal{V}$ και επομένως $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathcal{V}$. Από την άλλη πλευρά, εξ' ορισμού προκύπτει άμεσα ότι $f(\mathcal{V}) = F(f^{-1}(\mathcal{W})) \subseteq \mathcal{W}$. Αν $\vec{w} \in \mathcal{W}$, τότε $\vec{w} \in \mathrm{Im}(f) = f(\mathcal{E})$ και άρα $\vec{w} = f(\vec{x})$ για κάποιο $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Τότε εξ' ορισμού το $\vec{x}$ ανήκει στο $f^{-1}(\mathcal{W}) = \mathcal{V}$ και άρα $\vec{w} = f(\vec{x}) \in f(f^{-1}(\mathcal{W})) = f(\mathcal{V})$. Επομένως $\mathcal{W} = f(f^{-1}(\mathcal{W})) = f(\mathcal{V})$ και αυτό σημαίνει ότι $\mathbf{F}(\mathcal{V}) = \mathcal{W}$, δηλαδή η απεικόνιση $\mathbf{F}$ είναι επί. $\square$

Θα μελετήσουμε τώρα κάποιους ειδικούς τύπους γραμμικών απεικονίσεων οι οποίοι θα διαδραματίσουν σπουδαίο ρόλο στη συνέχεια.

Ορισμός 5.2.6 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.*

1. *Η f καλείται* **μονομορφισμός** *αν η f είναι 1-1, δηλαδή:*

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E} : \quad f(\vec{x}) = f(\vec{y}) \implies \vec{x} = \vec{y}$$

2. *Η f καλείται* **επιμορφισμός** *αν η f είναι απεικόνιση επί:*

$$\forall \vec{y} \in \mathcal{F}, \; \exists \vec{x} \in \mathcal{E} : \; f(\vec{x}) = \vec{y}$$

3. *Η f καλείται* **ισομορφισμός** *αν η f είναι 1-1 και επί.*

Ορισμός 5.2.7 *Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Οι $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ καλούνται* **ισόμορφοι** *αν υπάρχει ένας ισομορφισμός $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$. Σε αυτή την περίπτωση θα γράφουμε $\mathcal{E} \cong \mathcal{F}$.*

Προφανώς οι διανυσματικοί χώροι $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ είναι ισόμορφοι αν-ν υπάρχει ένας ισομορφισμός $g : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$. Επιπλέον η σχέση ισομορφίας $\cong$ στο σύνολο των διανυσματικών χώρων υπεράνω του $\mathbb{K}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας όπως δείχνει η ακόλουθη άσκηση.

Άσκηση 5.2.2 *Έστω ότι $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ είναι διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Τότε να δείξετε τα ακόλουθα:*

1. *$\mathcal{E} \cong \mathcal{E}$.*
2. *$\mathcal{E} \cong \mathcal{F}$ αν και μόνον αν $\mathcal{F} \cong \mathcal{E}$.*
3. *Αν $\mathcal{E} \cong \mathcal{F}$ και $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$, τότε $\mathcal{E} \cong \mathcal{G}$.*

Να συμπεράνετε ότι η σχέση ισομορφίας $\cong$ στο σύνολο των διανυσματικών χώρων υπεράνω του $\mathbb{K}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

Συμβολισμός 5.2.3 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.*

1. *Αν η f είναι μονομορφισμός, αυτό θα το συμβολίζουμε ως εξής: $f : \mathcal{E} \rightarrowtail \mathcal{F}$.*
2. *Αν η f είναι επιμορφισμός, αυτό θα το συμβολίζουμε ως εξής: $f : \mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$.*
3. *Αν η f είναι ισομορφισμός, αυτό θα το συμβολίζουμε ως εξής: $f : \mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}$.*

Λήμμα 5.2.8 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ και $g : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Αν ισχύει $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$, τότε η g είναι μονομορφισμός και η f είναι επιμορφιρμός.*

Απόδειξη: Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{F}$ και υποθέτουμε ότι $g(\vec{x}) = g(\vec{y})$. Τότε $f(g(\vec{x}) = f(g(\vec{y}))$, και άρα επειδή $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$, θα έχουμε $\vec{x} = (f \circ g)(\vec{x}) = f(g(\vec{x})) = f(g(\vec{y})) = (f \circ g)(\vec{y}) = \vec{y}$. Άρα η g είναι μονομορφισμός. Έστω τώρα $\vec{y} \in \mathcal{F}$. Εφαρμόζοντας το διάνυσμα $\vec{y}$ στη σχέση $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$, θα έχουμε $(f \circ g)(\vec{y}) = f(g(\vec{y})) = \vec{y}$. Επομένως η f είναι επιμορφισμός. □

Πρόταση 5.2.9 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.*

1. *Η f είναι* **μονομορφισμός** *αν-ν* $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$.

2. *Η f είναι* **επιμορφισμός** *αν-ν* $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{F}$.

3. *Η f είναι* **ισομορφισμός** *αν-ν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ έτσι ώστε: $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ και $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$. Σε αυτή τη περίπτωση η απεικόνιση f είναι αντιστρέψιμη και $g = f^{-1}$.*

Απόδειξη: 1. Έστω ότι η f είναι μονομορφισμός, και έστω $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$. Τότε $f(\vec{x}) = \vec{0}$, και επειδή $f(\vec{0}) = \vec{0}$, θα έχουμε $f(\vec{x}) = f(\vec{0})$. Όμως η f είναι 1-1 και άρα $\vec{x} = \vec{0}$. Επειδή πάντοτε $\vec{0} \in \mathrm{Ker}(f)$ συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$. Αντίστροφα αν $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$, και $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$, τότε $f(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}$, και άρα $\vec{x} - \vec{y} \in \mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$. Επομένως $\vec{x} = \vec{y}$ και άρα η f είναι μονομορφισμός.

2. Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό.

3. Υποθέτουμε ότι η f είναι ισομορφισμός. Τότε, επειδή η f είναι 1-1 και επί, υπάρχει η αντίστροφή της απεικόνιση $g := f^{-1} : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις: $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ και $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$. Αρκεί να δείξουμε ότι η g είναι γραμμική. Έστω $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \mathcal{F}$, και $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$. Επειδή η f είναι ισομορφισμός, για τα διανύσματα $\vec{y}_1, \vec{y}_2, k_1\vec{y}_1 + k_2\vec{y}_2 \in \mathcal{F}$ υπάρχουν μοναδικά διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε:

$$f(\vec{x}_1) = \vec{y}_1, \;\; f(\vec{x}_2) = \vec{y}_2, \;\; f(\vec{x}_3) = k_1\vec{y}_1 + k_2\vec{y}_2 \tag{1}$$

Εφαρμόζοντας την g στις δύο πρώτες σχέσεις θα έχουμε:

$$\vec{x}_1 = g(f(\vec{x}_1)) = g(\vec{y}_1), \;\; \vec{x}_2 = g(f(\vec{x}_2)) = g(\vec{y}_2) \tag{2}$$

Τότε $k_1 f(x_1) = k_1\vec{y}_1$ και $k_2 f(x_2) = k_2\vec{y}_2$. Επειδή η f είναι γραμμική, προσθέτοντας τις τελευταίες σχέσεις θα έχουμε $f(k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2) = k_1\vec{y}_1 + k_2\vec{y}_2$. Εφαρμόζοντας την g, θα έχουμε $g(f(k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2)) = k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 = g(k_1\vec{y}_1 + k_2\vec{y}_2)$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την (2), η τελευταία σχέση γράφεται

$$k_1 g(\vec{y}_1) + k_2 g(\vec{y}_2) = g(k_1\vec{y}_1 + k_2\vec{y}_2) \tag{3}$$

Η σχέση (3) δείχνει ότι η απεικόνιση g είναι γραμμική.

Αντίστροφα αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις: $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ και $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$, τότε η f είναι ισομορφισμός όπως προκύπτει απο το Λήμμα 5.2.8. □

Άσκηση 5.2.4 *Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ \ f(x_1, x_2, x_3) := (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$$

Να δείξετε ότι η f είναι ισομορφισμός.

Λύση: *Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{Ker}(f)$. Τότε $f(\vec{x}) = \vec{0}$, δηλαδή $f(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ ή ισοδύναμα: $(x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3) = (0, 0, 0)$. Η τελευταία σχέση δίνει: $x_1 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ η οποία είναι ισοδύναμη με την $x_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Άρα $\vec{x} = \vec{0}$, και επομένως $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$, δηλαδή η f είναι μονομορφισμός. Έστω $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Θέτοντας $\vec{x} := (y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_2) \in \mathbb{R}^3$, θα έχουμε: $f(\vec{x}) = f(y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_2) = (y_1, y_1 + y_2 - y_1, y_1 + y_2 - y_1 + y_3 - y_2) = (y_1, y_2, y_3) = \vec{y}$. Άρα η f είναι επιμορφισμός και επομένως η f είναι ισομορφισμός. Παρατηρείστε ότι η $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ορίζεται ως εξής: $f^{-1}(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_2)$.*

Πρόχειρη Δοκιμασία

1. Να δείξετε ότι η γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \ \ f(x, y, z) = (4x - 2y - z, 3x - 4y + z)$$

είναι επιμορφισμός αλλά όχι μονομορφισμός.

2. Να δείξετε ότι η γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \ \ f(x, y, z) = (2x - y, x + 2y, 0)$$

είναι μονομορφισμός αλλά όχι επιμορφισμός.

5.3 Το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης

Το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο εν συντομία υποστηρίζει ότι μια γραμμική απεικόνιση καθορίζεται πλήρως από τις τιμές της σε μια βάση, είναι θεμελιώδες καθώς από τη μια πλευρά δίνει μια ισχυρή μέθοδο κατασκευής γραμμικών απεικονίσεων και από την άλλη περιγράφει μια από τις σπουδαιότερες ιδιότητες των διανυσματικών χώρων. Αυτό το αποτέλεσμα θα χρησιμοποιείται συνεχώς στα επόμενα εδάφια.

Θεώρημα 5.3.1 *[Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης] Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.*

Έστω $\mathsf{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια βάση του $\mathcal{E}$ και έστω $\mathsf{C} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \cdots, \vec{w}_n\}$ ένα σύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{F}$. Τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ έτσι ώστε:

$$f(\vec{e}_i) = \vec{w}_i, \ \forall i = 1, 2, \cdots, n. \tag{$*$}$$

Απόδειξη: Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$ ένα τυχόν διάνυσμα του $\mathcal{E}$. Επειδή το σύνολο B είναι μια βάση του $\mathcal{E}$, κατά τα γνωστά, υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n \tag{1}$$

Ορίζουμε μια απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ ως εξής

$$f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}, \ \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) := x_1\vec{w}_1 + x_2\vec{w}_2 + \cdots + x_n\vec{w}_n \tag{2}$$

Θα δείξουμε ότι η f είναι μια καλά ορισμένη γραμμική, και είναι η μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $(*)$.

Κατ' αρχήν από την μοναδικότητα της γραφής ενός διανύσματος του $\mathcal{E}$ ως γραμμικός συνδυασμός της βάσης B, έπεται άμεσα ότι η f είναι καλά ορισμένη απεικόνιση. Επιπλέον η f ικανοποιεί τις σχέσεις $(*)$. Πράγματι θα έχουμε: $\vec{e}_i = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + \cdots + 1\vec{e}_i + \cdots + 0\vec{e}_n$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$. Έτσι από τον ορισμό της f έπεται ότι: $f(\vec{e}_i) = \vec{w}_i$, $1 \leq i \leq n$. Έστω τώρα $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ και $k, l \in \mathbb{K}$. Τότε τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ και $k\vec{x} + l\vec{y}$ γράφονται μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης B:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n \tag{3}$$

$$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \cdots + y_n\vec{e}_n \tag{4}$$

$$k\vec{x} + l\vec{y} = z_1\vec{e}_1 + z_2\vec{e}_2 + \cdots + z_n\vec{e}_n \tag{5}$$

Από τις (3) και (4) έπεται άμεσα ότι $k\vec{x} + l\vec{y} = (kx_1 + ly_1)\vec{e}_1 + (kx_2 + ly_2)\vec{e}_2 + \cdots + (kx_n + ly_n)\vec{e}_n$, και άρα από τη μοναδικότητα της γραφής έχουμε: $z_i = kx_i + ly_i$, $1 \leq i \leq n$. Από την άλλη πλευρά, σύμφωνα με τον ορισμό της f, θα έχουμε:

$$f(\vec{x}) = x_1\vec{w}_1 + x_2\vec{w}_2 + \cdots + x_n\vec{w}_n$$

$$f(\vec{y}) = y_1\vec{w}_1 + y_2\vec{w}_2 + \cdots + y_n\vec{w}_n$$

$$f(k\vec{x} + l\vec{x}) = (kx_1 + ly_1)\vec{w}_1 + (kx_2 + ly_2)\vec{w}_2 + \cdots + (kx_n + ly_n)\vec{w}_n$$

Προσθέτοντας τις δύο πρώτες θα έχουμε

$kf(\vec{x})+lf(\vec{y}) = k(x_1\vec{w}_1+x_2\vec{w}_2+\cdots+x_n\vec{w}_n)++l(y_1\vec{w}_1+y_2\vec{w}_2+\cdots+y_n\vec{w}_n)$

Επομένως $f(k\vec{x}+l\vec{y}) = kf(\vec{x})+lf(\vec{y})$, και άρα η f είναι γραμμική.

Έστω τώρα $g : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια άλλη γραμμική απεικόνιση η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $(*)$. Επομένως θα έχουμε $f(\vec{e}_i) = \vec{w}_i = g(\vec{e}_i)$, $1 \leq i \leq n$. Τότε λόγω της γραμμικότητας της g, από την σχέση (1) θα έχουμε: $g(\vec{x}) = g(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\cdots+x_n\vec{e}_n) = x_1g(\vec{e}_1)+x_2g(\vec{e}_2)+\cdots+x_ng(\vec{e}_n) = x_1\vec{w}_1+x_2\vec{w}_2+\cdots+x_n\vec{w}_n = f(\vec{x})$, δηλαδή $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$. Επειδή το $\vec{x} \in \mathcal{E}$ είναι τυχόν, έπεται ότι $f = g$. Άρα η f είναι η μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $(*)$. □

Παράδειγμα 5.3.1 *Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ υπεράνω του $\mathbb{R}$, θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\epsilon}_1 = (1,1,0), \vec{\epsilon}_2 = (1,0,4), \vec{\epsilon}_3 = (0,0,-1)$. Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.3.1 θα δείξουμε ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(\vec{\epsilon}_1) = 2, f(\vec{\epsilon}_2) = -7$, και $f(\vec{\epsilon}_3) = -1$.*

Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$. Σύμφωνα με το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης για να υπολογίσουμε την τιμή $f(x_1, x_2, x_3)$ θα πρέπει να γράψουμε το $\vec{x}$ ως γραμμικό συνδυασμό της βάσης $\mathcal{B}$. Εύκολα βλέπουμε ότι:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3 = x_2\vec{\epsilon}_1 + (x_1 - x_2)\vec{\epsilon}_2 + (4x_1 - 4x_2 - x_3\vec{\epsilon}_3$$

Επομένως σύμφωνα με την απόδειξη του Θεώρηματος 5.3.1, θα έχουμε: $f(x_1, x_2, x_3 = 2x_2 + (-7)(x_1 - x_2) + (-1)(4x_1 - 4x_2 - x_3) = -11x_1 + 13x_2 + x_3$. Επομένως η ζητούμενη γραμμική απεικόνιση είναι $f(x_1, x_2, x_3) = -11x_1 + 13x_2 + x_3$.

Πόρισμα 5.3.2 *Έστω $f, g : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις, όπου $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ είναι διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Τότε $f = g$ αν και μόνον αν $f(\vec{e}_i) = g(\vec{e}_i)$, $\forall i = 1, \cdots, n$, όπου $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ είναι μια τυχούσα βαση του $\mathcal{E}$.*

Ιδιαίτερα $f = \mathbb{O}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$, δηλαδή η f είναι η μηδενική γραμμικη απεικόνιση, αν και μόνον αν $f(\vec{e}_i) = \vec{0}$, $\forall i = 1, \cdots, n$.

Σχόλιο 5.3.2 *Σύμφωνα με το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης, μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ καθορίζεται μοναδικά από τις τιμές της στα διανύσματα μιας, τυχούσας αλλά σταθερής, βάσης του $\mathcal{E}$. Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί πολλές φορές στο να ορίζουμε με γραμμική απεικόνιση περιγράφοντας τις τιμές της στα διανύσματα της βάσης.*

Στα επόμενα εδάφια θα δούμε πολλές σημαντικές εφαρμογές του Θεωρήματος Γραμμικής Επέκτασης.

5.4 Η Θεμελιώδης Εξίσωση Διαστάσεων

Στην παρούσα ενότητα θα αποδείξουμε την θεμελιώδη εξίσωση διαστάσεων η οποία συνοδεύει μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης, και θα μελετήσουμε κάποιες σπουδαίες συνέπειες της.

Ορισμός 5.4.1 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Αν οι χώροι $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ έχουν πεπερασμένη διάσταση, τότε η* **βαθμίδα** *της f ορίζεται να είναι η διάσταση του υπόχωρου $\mathrm{Im}(f)$ και συμβολίζεται με $\mathbf{r}(f)$:*

$$\mathbf{r}(f) := \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f)$$

Θεώρημα 5.4.2 *[Θεμελιώδης Εξίσωση Διαστάσεων] Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Αν $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε ισχύει η ακόλουθη εξίσωση:*

$$\boxed{\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) + \mathbf{r}(f)}$$

Απόδειξη: Επειδή ο χώρος $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένη διάσταση και ο πυρήνας $\mathrm{Ker}(f)$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{E}$, έπεται ότι ο χώρος $\mathrm{Ker}(f)$ έχει πεπερασμένη διάσταση, βλέπε την Πρόταση 4.4.1. Έστω $k := \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f)$ και έστω $\mathsf{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k\}$ μια βάση του $\mathrm{Ker}(f)$. Σύμφωνα με το Πόρισμα 4.2.5 υπάρχουν διανύσματα $\vec{e}_{k+1}, \cdots, \vec{e}_n \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε το σύνολο $\mathsf{B} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \cdots, \vec{e}_n\}$ να είναι μια βάση του $\mathcal{E}$. Τότε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$, και αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) = n - k = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f)$. Για να το δείξουμε αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο

$$\mathsf{D} := \{f(\vec{e}_{k+1}), \cdots, f(\vec{e}_n)\}$$

είναι μια βάση του υπόχωρου $\mathrm{Im}(f)$, καθώς τότε $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) = |\mathsf{D}| = n-k$. Προφανώς τα διανύσματα του συνόλου D ανήκουν στον υπόχωρο $\mathrm{Im}(f)$.

<u>*Το σύνολο D είναι γραμμικά ανεξάρτητο:*</u> Έστω $l_{k+1}, \cdots, l_n \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε να ισχύει $l_{k+1}f(\vec{e}_{k+1}) + \cdots + l_n f(\vec{e}_n) = \vec{0}$ ή ισοδύναμα (λόγω της γραμμικότητας της f) $f(l_{k+1}\vec{e}_{k+1} + \cdots + l_n\vec{e}_n) = \vec{0}$. Αυτό όμως σημαίνει ότι το διάνυσμα $l_{k+1}\vec{e}_{k+1} + \cdots + l_n\vec{e}_n$ ανήκει στον πυρήνα $\mathrm{Ker}(f)$ της f, και επομένως θα γράφεται μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός της βάσης C. Δηλαδή υπάρχουν αριθμοί $l_1, \cdots, l_k \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε:

$$l_{k+1}\vec{e}_{k+1} + \cdots + l_n\vec{e}_n = l_1\vec{e}_1 + \cdots + l_k\vec{e}_k$$

ή ισοδύναμα:

$$(-l_1)\vec{e}_1 + \cdots + (-l_k)\vec{e}_k + l_{k+1}\vec{e}_{k+1} + \cdots + l_n\vec{e}_n = \vec{0}$$

Τότε όμως $l_1 = \cdots = l_k = l_{k+1} = \cdots = l_n = 0$, διότι το σύνολο $\mathsf{B} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \cdots, \vec{e}_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο ως βάση του $\mathcal{E}$. Επομένως το σύνολο D είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Το σύνολο D *παράγει τον υπόχωρο* $\mathrm{Im}(f)$*:* Έστω $\vec{y} \in \mathrm{Im}(f)$· τότε υπάρχει $\vec{x} \in \mathcal{E}$: $f(\vec{x}) = \vec{y}$. Επειδή το σύνολο B είναι βάση του $\mathcal{E}$, θα έχουμε $\vec{x} = l_1\vec{e}_1 + \cdots + l_k\vec{e}_k + l_{k+1}\vec{e}_{k+1} + \cdots + l_n\vec{e}_n$, για κάποιους (μοναδικούς) αριθμούς $l_j \in \mathbb{K}$, $1 \le j \le n$. Τότε, χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα της f και ότι τα διανύσματα $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_k$ ανήκουν στον πυρήνα της f (άρα $f(\vec{e}_i) = \vec{0}$, $1 \le i \le k$), θα έχουμε: $\vec{y} = f(\vec{x}) = f(l_1\vec{e}_1 + \cdots + l_k\vec{e}_k + l_{k+1}\vec{e}_{k+1} + \cdots + l_n\vec{e}_n) = l_1 f(\vec{e}_1) + \cdots + l_k f(\vec{e}_k) + l_{k+1} f(\vec{e}_{k+1}) + \cdots + l_n f(\vec{e}_n) = l_{k+1} f(\vec{e}_{k+1}) + \cdots + l_n f(\vec{e}_n)$. Άρα το σύνολο D παράγει τον υπόχωρο $\mathrm{Im}(f)$.

Συνοψίζοντας θα έχουμε ότι το σύνολο $\mathsf{D} = \{f(\vec{e}_{k+1}), \cdots, f(\vec{e}_n)\}$ είναι μια βάση του $\mathrm{Im}(f)$, και άρα $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) = |\mathsf{D}| = n - k = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f)$. Επομένως $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) + \mathbf{r}(f)$. □

Παράδειγμα 5.4.1 *Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση:*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$$

Θα προσδιορίσουμε την βαθμίδα $\mathbf{r}(f)$ *της* f *καθώς και μια βάση των υπόχωρων* $\mathrm{Im}(f)$ *και* $\mathrm{Ker}(f)$*.*

Επειδή $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f)$ *αν και μόνον αν* $f(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z) = (0, 0, 0)$*, έπεται ότι οι συντεταγμένες* x, y, z *του διανύσματος* (x, y, z) *είναι λύσεις του συστήματος:*

$$x + 2y = 0, \quad y - z = 0, \quad x + 2z = 0$$

Εύκολα βλέπουμε ότι οι λύσεις του παραπάνω συστήματος περιγράφονται από το σύνολο $\{(-2t, t, t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$*. Επομένως* $\mathrm{Ker}(f) = \{(-2t, t, t) \in \mathbb{R}^3 \,|\, t \in \mathbb{R}\} = \{t(-2, 1, 1) \in \mathbb{R}^3 \,|\, t \in \mathbb{R}\}$*. Αυτή η περιγραφή του πυρήνα μας επιτρέπει να δούμε άμεσα ότι το διάνυσμα* $\vec{\varepsilon} := (-2, 1, 1)$ *είναι μια βάση του* $\mathrm{Ker}(f)$ *και επομένως* $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(f) = 1$*. Από την θεμελιώδη εξίσωση διαστάσεων* $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(f) + \mathbf{r}(f)$ *θα έχουμε τότε* $3 = 1 + \mathbf{r}(f)$*, και επομένως* $\mathbf{r}(f) = 2$*. Θα προσδιορίσουμε μια βάση του υπόχωρου* $\mathrm{Im}(f)$*. Θα έχουμε:*

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x, y, z) \,|\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(x + 2y, y - z, x + 2z) \,|\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$= \{(x, y, x) + (2y, -z + 2z) \,|\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$= \{(x(1,0,1) + y(0,1,0) + y(2,0,0) + z(0,-1,2) \,|\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} =$$
$$= \{x(1,0,1) + y(2,1,0) + z(0,-1,2) \,|\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$$

Επομένως $\mathrm{Im}(f) = \langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3 \rangle$, *όπου*

$$\vec{\varepsilon}_1 = (1,0,1),\ \vec{\varepsilon}_2 = (2,1,0),\ \vec{\varepsilon}_3 = (0,-1,2)$$

Εύκολα βλέπουμε ότι τα διανύσματα $\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_2$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν τον υπόχωρο* $\mathrm{Im}(f)$ *διότι* $\vec{\varepsilon}_3 = 2\vec{\varepsilon}_1 - \vec{\varepsilon}_2$. *Επομένως το σύνολο* $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2\}$ *είναι μια βάση του* $\mathrm{Im}(f)$. *΄Οπως και παραπάνω διαπιστώνουμε ότι* $\mathbf{r}(f) = 2$.

Άσκηση 5.4.2 *΄Εστω* $\mathcal{B} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *μια βάση του* $\mathbb{R}^3$ *(όχι κατ΄ ανάγκην η κανονική), και έστω* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *η μοναδική γραμμική απεικόνιση για την οποία ισχύει:*

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \ f(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1,\ \ f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

Να δείξετε ότι η f *είναι ισομορφισμός.*

Λύση: *Θα προσδιορίσουμε πρώτα την* f *και ακολούθως τον πυρήνα της. ΄Εστω* $\vec{x}$ *ένα τυχόν διάνυσμα του* $\mathbb{R}^3$. *Τότε το* $\vec{x}$ *γράφεται μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός της βάσης* $\mathcal{B}$: $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, *όπου* $x_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le 3$. *Τότε:* $f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + x_3 f(\vec{e}_3) = x_1(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3) + x_2(2\vec{e}_1) + x_3(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3)\vec{e}_1 + (-x_1 + x_3)\vec{e}_2 + (x_1 + 2x_3)\vec{e}_3$. *Επομένως η* f *ορίζεται (ως προς τη βάση* $\mathcal{B}$*) από τον τύπο:*

$$f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3)\vec{e}_1 + (-x_1 + x_3)\vec{e}_2 + (x_1 + 2x_3)\vec{e}_3$$

Θα προσδιορίσουμε τον πυρήνα της f. *΄Εστω* $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \in \mathrm{Ker}(f)$. *Τότε* $f(\vec{x}) = (x_1 + 2x_2 + x_3)\vec{e}_1 + (-x_1 + x_3)\vec{e}_2 + (x_1 + 2x_3)\vec{e}_3 = \vec{0}$, *και επομένως, επειδή τα* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα, θα έχουμε:*

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0,\ \ -x_1 + x_3 0,\ \ x_1 + 2x_3 = 0$$

Λύνοντας αυτό το σύστημα ως πρός x_1, x_2, x_3, *βλέπουμε εύκολα ότι έχει μοναδική λύση* $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. *Τότε όμως* $\vec{x} = \vec{0}$ *και επομένως* $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$. *Ιδιαίτερα η* f *είναι μονομορφισμός και* $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(f) = 0$. *Από την θεμελιώδη εξίσωση διαστάσεων* $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(f) + \mathbf{r}(f)$ *έπεται τότε ότι* $3 = \mathbf{r}(f)$. *Με άλλα λόγια* $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(f) = 3$. *Αυτό όμως συνεπάγεται ότι* $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$, *δηλαδή η* f *είναι επιμορφισμός. Επομένως η* f *είναι ισομορφισμός.*

Το υπόλοιπο τμήμα της παρούσης ενότητας θα αφιερωθεί στην μελέτη των συνεπειών της Θεμελιώδους Εξίσωσης Διαστάσεων και ιδιαίτερα στην μελέτη της βαθμίδας μιας γραμμικής απεικόνισης.

Αρχίζουμε με το ακόλουθο σπουδαίο Θεώρημα το οποίο δίνει ένα απλό κριτήριο για το πότε δύο διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης είναι ισόμορφοι.

Θεώρημα 5.4.3 *Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. $\mathcal{E} \cong \mathcal{F}$.

2. $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$.

Απόδειξη: 1. $\Rightarrow$ 2. Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ ένας ισομορφισμός, και έστω $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) + \mathbf{r}(f)$ η θεμελιώδης εξίσωση διαστάσεων της f. Επειδή η f είναι μονομορφισμός, από την Πρόταση 5.2.9 θα έχουμε $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ και άρα $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) = 0$. Επίσης η f είναι επιμορφισμός, δηλαδή $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{F}$, και άρα $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$. Συνοψίζοντας θα έχουμε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$.

2. $\Rightarrow$ 1. Υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} := n$, και έστω $\mathsf{B} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ και $\mathsf{C} = \{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ βάσεις των $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ αντίστοιχα. Σύμφωνα με το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης 5.3.1, υπάρχουν μοναδικές γραμμικές απεικονίσεις

$$f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}, \ \text{έτσι ώστε: } f(\vec{e}_i) = \vec{\varepsilon}_i, \ 1 \leq i \leq n$$

$$g : \mathcal{F} \to \mathcal{E}, \ \text{έτσι ώστε: } g(\vec{\varepsilon}_i) = \vec{e}_i, \ 1 \leq i \leq n$$

Θα δείξουμε ότι η f είναι ισομορφισμός με αντίστροφη την g. Θεωρούμε την σύνθεση $g \circ f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ η οποία προφανώς είναι μια γραμμική απεικόνιση. Παρατηρούμε ότι $(g \circ f)(\vec{e}_i) = g(f(\vec{e}_i)) = g(\vec{\varepsilon}_i) = \vec{e}_i$, $1 \leq i \leq n$. Όμως και η ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ είναι γραμμική και ικανοποιεί τις σχέσεις $\mathrm{Id}(\vec{e}_i) = \vec{e}_i$, $1 \leq i \leq n$. Άρα από το κριτήριο μοναδικότητας στο Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης 5.3.1, έπεται ότι $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$. Εναλλάσσοντας τους ρόλους των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$, θα έχουμε με παρόμοιο τρόπο ότι $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$. Επομένως από την Πρόταση 5.2.9 έπεται οτι η f είναι ισομορφισμός με αντίστροφη την g. Άρα οι χώροι $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ είναι ισόμορφοι. □

Επειδή ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{K}^n$, όπως έχουμε δει, έχει διάσταση n, θα έχουμε ως άμεσες συνέπειες του παραπάνω Θεωρήματος τα ακόλουθα σημαντικά πορίσματα.

Πόρισμα 5.4.4 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ με διάσταση $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$. Τότε ο χώρος $\mathcal{E}$ είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{K}^n$: $\mathcal{E} \cong \mathbb{K}^n$.*

Πόρισμα 5.4.5 *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα, και $n, m \geq 1$ δύο φυσικοί αριθμοί. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. $\mathbb{K}^n \cong \mathbb{K}^m$.

2. $n = m$.

Σχόλιο 5.4.3 *Τα Πορίσματα 5.4.4 και 5.4.5 είναι πολύ σημαντικά. Το μεν πρώτο διότι, καθώς ισόμορφοι χώροι έχουν τις ίδιες βασικές ιδιότητες, ανάγει την μελέτη των διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ (των οποίων τα στοιχεία ενδέχεται να είναι πολυώνυμα, συναρτήσεις, πίνακες κτλ) στη μελέτη των διανυσματικών χώρων $\mathbb{K}^n$, $n \geq 1$ οι οποίοι μας είναι πολύ πιο προσιτοί. Γι' αυτό το λόγο αποτελούν μοντέλα των διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης. Το δε δεύτερο πόρισμα μας εξασφαλίζει το «αναλλοίωτο της διάστασης» διανυσματικών χώρων πεπερασμένων ακολουθιών.*

Θα δούμε τώρα μια διαφορετική απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.5 με χρήση της Θεμελιώδους Εξίσωσης Διαστάσεων.

Θεώρημα 5.4.6 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ δύο υποχωροι του $\mathcal{E}$. Τότε ισχύει ο εξής τύπος:*

$$\boxed{\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}+\mathcal{W}) = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{W} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}\cap\mathcal{W})}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}\times\mathcal{W}$ και τον υπόχωρο $\mathcal{V}+\mathcal{W}$ του $\mathcal{E}$. Υπενθυμίζουμε ότι, σύμφωνα με την Πρόταση 4.3.7, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}\times\mathcal{W}) = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{W}$. Ορίζουμε μια απεικόνιση ως εξής:

$$f : \mathcal{V}\times\mathcal{W} \to \mathcal{V}+\mathcal{W},\ (\vec{x},\vec{y}) \ \mapsto\ \vec{x}+\vec{y}$$

Είναι εύκολο να δειχθεί (βλέπε την επόμενη Άσκηση 4.3.7) ότι η f είναι μια γραμμική απεικόνιση. Επίσης είναι προφανές ότι η f είναι επιμορφισμός, και άρα $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}+\mathcal{W})$. Επομένως η θεμελιώδης εξίσωση διαστάσεων για την f έχει την μορφή: $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{W} = \dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}+\mathcal{W})$ ή ισοδύναμα $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}+\mathcal{W}) = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{W} - \dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Ker}(f)$. Έτσι αρκεί να δείξουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Ker}(f) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}\cap\mathcal{W})$. Όμως

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f) &= \{(\vec{x},\vec{y}) \in \mathcal{V}\times\mathcal{W} \,|\, f(\vec{x},\vec{y}) = \vec{0}\}\\ &= \{(\vec{x},\vec{y}) \in \mathcal{V}\times\mathcal{W} \,|\, \vec{x}+\vec{y} = \vec{0}\}\\ &= \{(\vec{x},\vec{y}) \in \mathcal{V}\times\mathcal{W} \,|\, \vec{x} = -\vec{y}\}\end{aligned}$$

Έτσι αν $(\vec{x},\vec{y}) \in \mathrm{Ker}(f)$, τότε $\vec{x} = -\vec{y}$. Επειδή $\mathcal{V} \ni \vec{x} = -\vec{y} \in \mathcal{W}$, έπεται ότι

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(\vec{x},-\vec{x}) \in \mathcal{V}\times\mathcal{W} \,|\, \vec{x} \in \mathcal{V}\cap\mathcal{W}\}$$

Επομένως μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση

$$g : \mathcal{V} \cap \mathcal{W} \to \operatorname{Ker}(f), \ \ \vec{x} \mapsto g(\vec{x}) = (\vec{x}, -\vec{x})$$

Ισχυριζόμαστε ότι η g είναι ισομορφισμός. Πραγματικά είναι πολύ εύκολο να δει κανείς ότι η g είναι γραμμική. Επιπλέον η g είναι ισομορφισμός διότι είναι προφανώς επί, και 1-1 διότι $\operatorname{Ker}(g) = \{\vec{x} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W} \,|\, g(\vec{x}) = (\vec{0}, \vec{0})\} = \{\vec{x} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W} \,|\, (\vec{x}, -\vec{x}) = (\vec{0}, \vec{0})\} = \{\vec{0}\}$. Επομένως οι χώροι $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ και $\operatorname{Ker}(f)$ είναι ισόμορφοι, ιδιαίτερα θα έχουμε $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(f)$. □

Πρόχειρη Δοκιμασία

Να δείξετε ότι η απεικόνιση $f : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \to \mathcal{V} + \mathcal{W}$ του Θεωρήματος 5.4.6 είναι γραμμική.

Άσκηση 5.4.4 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ δύο υποχωροι του $\mathcal{E}$. Αν $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\vec{0}\}$, να δείξετε ότι:*

$$\mathcal{V} \times \mathcal{W} \ \cong \ \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$$

Θα δώσουμε τώρα κάποια χρήσιμα κριτήρια για το πότε μια γραμμική απεικόνιση είναι ισομορφισμός.

Πρόταση 5.4.7 *[Κριτήρια Ισομορφισμού] Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Αν $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$ και η f είναι μονομορφισμός, τότε η f είναι ισομορφισμός.*

2. *Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$ και η f είναι επιμορφισμός, τότε η f είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη: 1. Επειδή η f είναι μονομορφισμός, θα έχουμε $\operatorname{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ και άρα $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(f) = 0$. Επομένως η θεμελιώδης εξίσωση διαστάσεων θα έχει την μορφή $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(f)$. Από την υπόθεση όμως θα έχουμε και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(f)$. Τότε από την Πρόταση 4.4.1 έπεται ότι $\mathcal{F} = \operatorname{Im}(f)$ και επομένως η f είναι επί. Άρα η f είναι ισομορφισμός.

2. Επειδή η f είναι επιμορφισμός, θα έχουμε $\operatorname{Im}(f) = \mathcal{F}$ και άρα $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$. Επομένως η θεμελιώδης εξίσωση διαστάσεων θα έχει την μορφή $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$. Επειδή από την υπόθεση έχουμε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$, έπεται ότι $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(f) = 0$ ή ισοδύναμα $\operatorname{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$, και άρα η f είναι μονομορφισμός. Επομένως η f είναι ισομορφισμός. □

Άσκηση 5.4.5 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ και έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ μια βάση του $\mathcal{E}$. Θέτοντας $\vec{w}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{w}_2 = 2\vec{e}_1$, και $\vec{w}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ στο Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης 5.3.1, έπεται ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ έτσι ώστε:*

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \;\; f(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1, \;\; f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

Να δείξετε ότι η f είναι ισομορφισμός.

Λύση: Θα προσδιορίσουμε τον τύπο της f σε σχέση με την βάση $\mathcal{B}$.

Πρόχειρη Δοκιμασία

Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματκός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ και $g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις για τις οποίες ισχύει: $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.

Να δείξετε ότι οι απεικονίσεις f και g είναι ισομορφισμοί και μάλιστα $g = f^{-1}$.

5.5 Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε την άλγεβρα των γραμμικών απεικονίσεων μεταξύ διανυσματικών χώρων υπεράνω ενός σώματος.

Από τώρα και στο εξής σταθεροποιούμε ένα σώμα $\mathbb{K}$.

Συμβολισμός 5.5.1 *Αν $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ είναι διανυσματικοί χώροι υπεράνω του $\mathbb{K}$, θα συμβολίζουμε με*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) := \{f : \mathcal{E} \to \mathcal{F} \mid \eta \;\; f \;\; \textit{είναι γραμμική}\}$$

το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων από τον $\mathcal{E}$ στον $\mathcal{F}$.

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$. Επομένως πρέπει να ορίσουμε πρώτα πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού γραμμικών απεικονίσεων.

Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $f, g : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις.

Πρόσθεση: Ορίζουμε το άθροισμα $f+g$ των f και g να είναι η απεικόνιση

$$f+g : \mathcal{E} \to \mathcal{F}, \;\; \vec{x} \mapsto \;\; (f+g)(\vec{x}) := f(\vec{x}) + g(\vec{x})$$

Δείχνουμε ότι η απεικόνιση $f+g$ είναι γραμμική.

Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ και $k, l \in \mathbb{K}$. Τότε $(f+g)(k\vec{x}+l\vec{y}) = f(k\vec{x}+l\vec{y}) + g(k\vec{x}+l\vec{y}) = kf(\vec{x})+lf(\vec{y})+kg(\vec{x})+lg(\vec{y}) = k(f(\vec{x})+g(\vec{x}))+l(f(\vec{y})+g(\vec{y})) = k[(f+g)(\vec{x})]+l[(f+g)(\vec{y})]$.

Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός Γραμμικών Απεικονίσεων: Αν $k \in \mathbb{K}$, τότε ορίζουμε τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό kf της f με το k να είναι η απεικόνιση

$$kf : \mathcal{E} \to \mathcal{F}, \;\; \vec{x} \mapsto \;\; (kf)(\vec{x}) := kf(\vec{x})$$

Δείχνουμε ότι η απεικόνιση kf είναι γραμμική.

Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ και $\mu, \nu \in \mathbb{K}$. Τότε $(kf)(\mu\vec{x}+\nu\vec{y}) = k[f(\mu\vec{x}+\nu\vec{y})] = k[\mu f(\vec{x})+\nu f(\vec{y})] = k\mu f(\vec{x})+k\nu f(\vec{y}) = \mu kf(\vec{x})+\nu kf(\vec{y}) = \mu(kf)(\vec{x})+\nu(kf)(\vec{y})$.

Θεώρημα 5.5.1 *Με τις παραπάνω πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού, το σύνολο* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ *είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του* $\mathbb{K}$.

Επιπλέον αν οι $\mathcal{E}$ *και* $\mathcal{F}$ *έχουν πεπερασμένη διάσταση, τότε και ο διανυσματικός χώρος* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ *έχει πεπερασμένη διάσταση και μάλιστα:*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} \cdot \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$$

Απόδειξη: Υπενθυμίζουμε από το Κεφάλαιο 1 ότι αν $\mathcal{V}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$ και S είναι ένα τυχόν σύνολο, τότε το σύνολο $\mathcal{F}(S, \mathcal{V})$ όλων των απεικονίσεων $f : S \to \mathcal{V}$ με πράξεις όπως ορίσθηκαν από τις σχέσεις (2.1) και (2.2) του Κεφαλαίου 1 (και οι οποίες συμπίπτουν με τις παραπάνω), είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$. Επομένως θέτοντας $S = \mathcal{E}$ και $\mathcal{V} = \mathcal{F}$, έπεται ότι με τις παραπάνω πράξεις το σύνολο $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ όλων των απεικονίσεων (όχι κατ' ανάγκην γραμμικών) $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$. Θα δείξουμε ότι το υποσύνολο $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ του $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ το οποίο αποτελείται από όλες τις γραμμικές απεικονίσεις είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, και άρα είναι ένας διανυσματικός χώρος. Πράγματι: όπως είδαμε παραπάνω η πρόσθεση γραμμικών απεικονίσεων καθώς και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός αριθμού με γραμμική απεικόνιση είναι επίσης γραμμική απεικόνιση. Επιπρόσθετα Η μηδενική απεικόνιση $\mathbb{O}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, $\vec{x} \mapsto \mathbb{O}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\vec{x}) = \vec{0}$, η οποία είναι το μηδενικό στοιχείο του διανυσματικού χώρου $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, είναι προφανώς γραμμική και επομένως ανήκει στο υποσύνολο

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ του $\mathcal{F}(\mathcal{E},\mathcal{F})$. Ιδιαίτερα $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \neq \emptyset$. Επομένως το υποσύνολο $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ του $\mathcal{F}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{F}(\mathcal{E},\mathcal{F})$, και άρα είναι ένας διανυσματικός χώρος.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = m$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = n$. Θα δείξουμε ο χώρος $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ έχει πεπερασμένη διάσταση και μάλιστα: $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F}) = mn$.

Έστω $\mathsf{B} := \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_m\}$ μια βάση του $\mathcal{E}$ και $\mathsf{C} := \{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ μια βάση του $\mathcal{F}$. Σταθεροποιούμε δύο δείκτες i και j με $1 \leq i \leq m$ και $1 \leq j \leq n$. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση

$$f_{ij} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}, \ \text{έτσι ώστε:} \ f_{ij}(\vec{e}_k) = \delta_{ik}\vec{\varepsilon}_j, \ 1 \leq k \leq m \qquad (*)$$

Αν $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_m\vec{e}_m = \sum_{k=1}^m x_k\vec{e}_k$, τότε:

$$f_{ij}(\vec{x}) = (\sum_{k=1}^m \delta_{ik}x_k)\vec{\varepsilon}_j$$

Έτσι αποκτούμε nm γραμμικές απεικονίσεις $f_{ij} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο

$$\mathsf{B}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})} := \{f_{ij} \,|\, 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n\}$$

είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$.

Το σύνολο $\mathsf{B}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο: Θεωρούμε nm το πλήθος αριθμούς $\{a_{ij} \mid \ 1 \leq i \leq m, \, 1 \leq j \leq n\}$ από το σώμα $\mathbb{K}$ έτσι ώστε:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} f_{ij} = \mathbb{O}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$$

Επειδή μια γραμμική απεικόνιση είναι η μηδενική αν και μόνον αν στέλνει κάθε διάνυσμα της βάσης στο μηδενικό διάνυσμα, η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με την σχέση:

$$[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} f_{ij}](\vec{e}_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} f_{ij}(\vec{e}_k) = \mathbb{O}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\vec{e}_k) = \vec{0}, \ \ 1 \leq k \leq m$$

Σύμφωνα με τη σχέση $(*)$ η τελευταία σχέση γράφεται ως εξής:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \delta_{ik} \vec{\varepsilon}_k = \vec{0}, \ \ 1 \leq k \leq m$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\vec{\varepsilon}_j = \vec{0},\ \ 1 \leq k \leq m$$

Όμως επειδή το σύνολο $\mathsf{C} = \{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ είναι βάση του $\mathcal{F}$, θα έχουμε ότι $\forall k = 1, 2, \cdots, m$:

$$k_{ij} = 0,\ \ 1 \leq j \leq n$$

Επομένως οι αριθμοί $\{a_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ είναι ίσοι με μηδέν, και άρα το σύνολο γραμμικών απεικονίσεων $\mathsf{B}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Το σύνολο $\mathsf{B}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})}$ παράγει τον χώρο $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$: Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση. Εφαρμόζοντας την f σε κάθε διάνυσμα $\vec{e}_i$ της βάσης B του $\mathcal{E}$, γνωρίζουμε ότι η τιμή $f(\vec{e}_i)$ είναι γραμμικός συνδυασμός της βάσης $\mathsf{C} = \{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ του $\mathcal{F}$. Έτσι υπάρχουν (μοναδικοί) αριθμοί $\{a_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ από το σώμα $\mathbb{K}$ έτσι ώστε:

$$f(\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\vec{\varepsilon}_j,\ \ 1 \leq i \leq m \tag{1}$$

Ισχυριζόμαστε ότι $f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_{ij}$. Αυτή η σχέση είναι μια ισότητα μεταξύ γραμμικών απεικονίσεων. Επομένως η ισχύς της είναι ισοδύναμη, σύμφωνα με το Πόρισμα 5.3.2 με την ισχύ της ακόλουθης σχέσης:

$$f(\vec{e}_k) = \Big[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_{ij}\Big](\vec{e}_k),\ \ \ \forall k = 1, 2, \cdots, m \tag{2}$$

Θα έχουμε, $\forall k = 1, 2, \cdots, m$:

$$\begin{aligned}
\Big[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_{ij}\Big](\vec{e}_k) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_{ij}(\vec{e}_k) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{ik}\vec{\varepsilon}_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\vec{\varepsilon}_j \\
&= f(\vec{e}_k)
\end{aligned}$$

Άρα η ζητούμενη σχέση (2) ισχύει και επομένως η τυχούσα γραμμική απεικόνιση f είναι γραμμικός συνδυασμός των γραμμικών απεικονίσεων f_{ij}. Συνοψίζοντας, έχουμε ότι το σύνολο $\mathsf{B}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})}$ παράγει τον χώρο $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$.

Έτσι το σύνολο $\mathsf{B}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})}$ είναι μια βάση του χώρου $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$, και επομένως επειδή $|\mathsf{B}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})}| = nm$, έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F}) = mn = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} \cdot \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$$

□

Θέτοντας $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ στο Θεώρημα 5.5.1 θα έχουμε το ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 5.5.2 *Αν $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, τότε το σύνολο $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{E})$ των γραμμικών απεικονίσεων $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$.*

Επιπλέον αν ο χώρος $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε και ο διανυσματικός χώρος $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{E})$ έχει πεπερασμένη διάσταση και μάλιστα:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{E}) = (\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E})^2$$

Υπενθυμίζουμε ότι θεωρώντας το σώμα $\mathbb{K}$ σαν διανυσματικό χώρο υπεράνω του εαυτού του, έχουμε την ακόλουθη άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.4.2.

Πόρισμα 5.5.3 *Αν $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, τότε το σύνολο $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathbb{K})$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$.*

Επιπλέον αν ο χώρος $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε και ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{E}^\star = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathbb{K})$ έχει πεπερασμένη διάσταση και μάλιστα:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathbb{K}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}^\star = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}$$

Πόρισμα 5.5.4 *Αν $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διαστάσης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Τότε ο χώρος $\mathcal{E}$ είναι ισόμορφος με τον δυϊκό του χώρο $\mathcal{E}^\star$: $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}^\star$.*

Απόδειξη: Από το Πόρισμα 5.5.3 έχουμε ότι οι χώροι $\mathcal{E}$ και $\mathcal{E}^\star$ έχουν την ίδια διάσταση. Έτσι το ζητούμενο προκύπτει από το Θεώρημα 5.4.3. □

Σχόλιο 5.5.2 *Αν και το Πόρισμα 5.5.4 μας εξασφαλίζει ότι κάθε διανυσματικός χώρος $\mathcal{E}$ πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του $\mathbb{K}$ είναι ισόμορφος με τον δυϊκό του χώρο $\mathcal{E}^\star$, αυτό το αποτέλεσμα δεν είναι πλήρως ικανοποιητικό. Ο λόγος είναι ότι ο ισομορφισμός $f : \mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}^\star$ εξαρτάται δραστικά, όπως προκύπτει από το Θεώρημα 5.4.3, από την επιλογή βάσης στον χώρο $\mathcal{E}$. Επομένως αλλαγή βάσης* *στον $\mathcal{E}$ ορίζει και νέο ισομορφισμό μεταξύ των $\mathcal{E}$ και $\mathcal{E}^\star$. Έτσι ο ισομορφισμός δεν είναι «φυσικός» δηλαδή δεν δίνεται από έναν τύπο ο οποίος είναι ανεξάρτητος της επιλογής βάσης.*

Εκτός από την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό γραμμικών απεικονίσεων, σε κάποιες περιπτώσεις, μπορούμε να θεωρήσουμε και μια άλλη πράξη μεταξύ γραμμικών απεικονίσεων. Πραγματικά αν $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ και $g : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, τότε ορίζεται και η σύνθεση $g \circ f : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$, ως εξής: $(g \circ f)(\vec{x}) := g(f(\vec{x}))$. Γι' αυτή την, όχι πάντοτε οριζόμενη πράξη, ισχύει η ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 5.5.5 (α) *Η σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων (όταν αυτή ορίζεται) είναι γραμμική απεικόνιση.*

(β) *Έστω ότι $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ είναι διανυσματικοί χώροι υπεράνω του $\mathbb{K}$, και έστω ότι $h_1, h_2 : \mathcal{H} \to \mathcal{E}$, $f : \mathcal{E} \to F$, και $g_1, g_2 : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ είναι γραμμικές απεικονίσεις:*

$$\mathcal{H} \underset{h_2}{\overset{h_1}{\longrightarrow}} \mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F} \underset{g_2}{\overset{g_1}{\longrightarrow}} \mathcal{G}$$

Τότε ισχύουν τα εξής:

1. $(h_1 + h_2) \circ f = h_1 \circ f + h_2 \circ f$.
2. $f \circ (g_1 + g_2) = f \circ g_1 + f \circ g_2$.
3. $\mathrm{Id}_{\mathcal{F}} \circ f = f = f \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.
4. $g_1 \circ (f \circ h_1) = (g_1 \circ f) \circ h_1$.

(γ) *Αν $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ και $g : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, και $k \in \mathbb{K}$, τότε:*

$$(kg) \circ f = g \circ (kf) = k(g \circ f).$$

Απόδειξη: Η απόδειξη αφήνεται ως Άσκηση 5.5.3 στον αναγνώστη. □

Άσκηση 5.5.3 *Αποδείξτε την Πρόταση 5.5.5.*

Αν στην παραπάνω Πρόταση θέσουμε $\mathcal{E} = \mathcal{H} = \mathcal{F} = \mathcal{G}$, τότε η σύνθεση δύο οιωνδήποτε γραμμικών απεικονίσεων από τον $\mathcal{E}$ στον $\mathcal{E}$ ορίζεται πάντα. Επομένως ο διανυσματικός χώρος $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ έχει επιπρόσθετες ιδιότητες και δομή.

Συμβολισμός 5.5.4 *Αν $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, τότε ο διανυσματικός χώρος $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{E})$ θα συμβολίζεται με $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$, τα δε στοιχεία του* **ενδομορφισμοί** *του $\mathcal{E}$.*

Δηλαδή ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$.

Από τώρα και στο εξής, αν $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ είναι ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$ και $n \geq 1$ είναι ένας φυσικός αριθμός, θα συμβολίζουμε με $f^n : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ τη σύνθεση της γραμμικής απεικόνισης f με τον εαυτό της n φορές. Δηλαδή $f^n(\vec{x}) = f(f(f(\cdots f)\cdots))(\vec{x})$ όπου η f εφαρμόζεται n φορές. Για παράδειγμα $f^3(\vec{x}) = f(f(f(\vec{x})))$. Για λόγους σύμβασης θέτουμε $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.

Σχόλιο 5.5.5 *Από την παραπάνω Πρόταση έπεται ότι για τυχόντες ενδομορφισμούς $f, g, h : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, και τυχόν στοιχείο $k \in \mathbb{K}$, ισχύουν τα εξής:*

1. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
2. $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$ *και* $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$.
3. $k(f \circ g) = (kf) \circ g = f \circ (kg)$.
4. $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} \circ f = f = f \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.

Ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, επί του οποίου έχει ορισθεί μια πράξη $\circ : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $(f, g) \mapsto f \circ g$ (η οποία καλείται πολλαπλασιασμός), έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι παραπάνω ιδιότητες 1. - 4. καλείται $\mathbb{K}$-**άλγεβρα** *ή άλγεβρα υπεράνω του $\mathbb{K}$.*

Επομένως για κάθε διανυσματικό χώρο $\mathcal{E}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, το σύνολο $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$ των ενδομορφισμών του $\mathcal{E}$ (με πολλαπλασιασμό την σύνθεση απεικονίσεων) είναι μια άλγεβρα υπεράνω του $\mathbb{K}$.

Σχόλιο 5.5.6 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω f, g δύο στοιχεία της $\mathbb{K}$-άλγεβρας $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{E})$, δηλαδή $f, g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ είναι δύο γραμμικές απεικονίσεις (ενδομορφισμοί του $\mathcal{E}$). Δεν είναι γενικά αληθές ότι ισχύει: $f \circ g = g \circ f$. Για παράδειγμα έστω $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ και έστω οι γραμμικές απεικονίσεις:*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto f(x, y) = (-y, x)$$
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto g(x, y) = (x, -y)$$

Τότε για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, έχουμε:

$$f(g(x, y)) = f(x, -y) = (y, x) \neq (-y, -x) = g(-y, x) = g(f(x, y))$$

Επομένως γενικά ισχύει:

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Μια $\mathbb{K}$-άλγεβρα $\mathcal{R}$ τα στοιχεία της οποίας ικανοποιούν την σχέση $f \circ g = g \circ f$ καλείται *αντιμεταθετικη* $\mathbb{K}$-άλγεβρα. Για παράδειγμα ο διανυσματικός χώρος των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι μια αντιμεταθετική $\mathbb{R}$-άλγεβρα. Η θεωρία των αλγεβρών είναι πολύ εκτεταμένη και ξεφεύγει από τα πλαίσια αυτών των σημειώσεων, επομένως δεν θα μας απασχολήσει περαιτέρω.

5.6 Βαθμίδα Γραμμικής Απεικόνισης

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε πιο αναλυτικά τις βασικές ιδιότητες της βαθμίδας μιας γραμμικής απεικόνισης. Ιδιαίτερα θα μας απασχολήσει πως μεταβάλλεται η βαθμίδα ως προς διάφορες πράξεις γραμμικών απεικονίσεων, όπως η σύνθεση, η πρόσθεση, και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός. Οι ιδιότητες τις οποίες θα αποδείξουμε στο παρόν εδάφιο θα έχουν σημαντικές εφαρμογές στην θεωρία βαθμίδας πινάκων.

Πριν περάσουμε στις ιδιότητες της βαθμίδας θα δούμε κάποιες ιδιότητες της εικόνας μιας γραμμικής απεικόνισης.

Πρόταση 5.6.1 *Έστω $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ τρεις διανυσματικοί χώρου υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.*

1. *Αν $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, και $k \in \mathbb{K}$, $k \neq 0$, τότε:*
$$\mathrm{Im}(kf) = \mathrm{Im}(f)$$
2. *Αν $f, g : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ είναι δύο γραμμικές απεικονίσεις, τότε:*
$$\mathrm{Im}(f+g) \subseteq \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$$
3. *Αν $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ και $g : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ είναι δύο γραμμικές απεικονίσεις, τότε:*
$$\mathrm{Im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Im}(g)$$
4. *Αν $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε:*
$$\cdots \subseteq \mathrm{Im}(f^{n+1}) \subseteq \mathrm{Im}(f^n) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Im}(f^2) \subseteq \mathrm{Im}(f)$$

Απόδειξη: 1. Αν $\vec{y} \in \mathrm{Im}(f)$, τότε $f(\vec{x}) = \vec{y}$ για κάποιο $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Όμως $\vec{y} = kf(\frac{1}{k}\vec{x})$, διότι $k \neq 0$, και αυτό σημαίνει ότι $\vec{y} \in \mathrm{Im}(kf)$. Άρα $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Im}(kf)$. Αν $\vec{y} \in \mathrm{Im}(kf)$, τότε $\vec{y} = (kf)(\vec{x}) = kf(\vec{x}) = f(k\vec{x}) \in \mathrm{Im}(f)$. Άρα $\mathrm{Im}(kf) \subseteq \mathrm{Im}(f)$, και επομένως $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(kf)$.

2. Έστω $\vec{y} \in \mathrm{Im}(f+g)$. Τότε $\vec{y} = (f+g)(\vec{x})$, για κάποιο $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Τότε $\vec{y} = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. Άρα $\mathrm{Im}(f+g) \subseteq \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.

3. Έστω $\vec{y} \in \mathrm{Im}(g \circ f)$. Τότε $\vec{y} = (g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x}))$ για κάποιο $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $\vec{y} \in \mathrm{Im}(g)$. Επομένως $\mathrm{Im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Im}(g)$.

4. Είναι άμεση εφαρμογή του 3. □

Άσκηση 5.6.1 *Διατυπώστε και αποδείξτε τις ανάλογες ιδιότητες της Πρότασης 5.6.1 για τον πυρήνα γραμμικής απεικόνισης.*

Άσκηση 5.6.2 *Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια βάση του $\mathcal{E}$. Αν $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, να δείξετε ότι η βαθμίδα $\mathbf{r}(f)$ είναι ίση με την βαθμίδα των διανυσμάτων $f(\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_n)$:*

$$\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}\langle f(\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_n)\rangle$$

Λύση: *Υπενθυμίζουμε ότι $\mathbf{r}\langle\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_n\rangle = \dim_{\mathbb{K}}\langle\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_n\rangle$, και άρα για να δείξουμε την ζητούμενη σχέση αρκεί να δείξουμε ότι $\mathrm{Im}(f) = \langle\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_n\rangle$. Προφανώς $\mathrm{Im}(f) \supseteq \langle\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_n\rangle$. Έστω $\vec{z} \in \mathrm{Im}(f)$. Τότε υπάρχει $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε: $f(\vec{x}) = \vec{z}$. Επειδή το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι μια βαση του $\mathcal{E}$, μπορούμε να γράψουμε μοναδικά $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$, όπου $x_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Τότε $\vec{z} = f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e}_1) + \cdots + x_n f(\vec{e}_n) \in \langle\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_n\rangle$. Άρα $\mathrm{Im}(f) \subseteq \langle\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_n\rangle$.*

Βασικες Ιδιοτητες Βαθμιδας

1. Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση.

($\mathbf{a}$) Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{r}(kf) = \mathbf{r}(f), \ \ \forall k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}} \tag{1}$$

Απόδειξη: Από τη Πρόταση 5.6.1 έχουμε $\mathrm{Im}(kf) = \mathrm{Im}(f)$. Παίρνοντας διαστάσεις θα έχουμε $\mathbf{r}(kf) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(kf) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) = \mathbf{r}(f)$.

($\mathbf{b}$) Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{r}(f) \leq \min\{\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}, \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}\}} \tag{2}$$

Απόδειξη: Επειδή $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathcal{F}$, παίρνοντας διαστάσεις έχουμε $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$. Επίσης από την θεμελιώδη εξίσωση διαστάσεων έχουμε $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f)$. Άρα $\mathbf{r}(f) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}$ και επομένως $\mathbf{r}(f) \leq \min\{\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}, \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}\}$.

2. Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $f, g : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις:

$$\mathcal{E} \xrightarrow[g]{f} \mathcal{F}$$

Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{|\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g)| \leq \mathbf{r}(f+g) \leq \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g)} \qquad (3)$$

Απόδειξη: Από τη Πρόταση 5.6.1 έχουμε ότι $\operatorname{Im}(f+g) \subseteq \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$. Παίρνοντας διαστάσεις θα έχουμε: $\mathbf{r}(f+g) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(f+g) \leq \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g))$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ανισότητα και το Θεώρημα 5.4.6 θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(f+g) \leq \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)) &= \\ \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(g) - \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g)) &\leq \\ \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g) \end{aligned}$$

Επειδή $f = f + g + (-g)$, εφαρμόζοντας την παραπάνω ανισότητα για τις απεικονίσεις $(f+g)$ και $(-g)$ καθώς και την ισότητα (1), θα έχουμε:

$$\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}[(f+g) + (-g)] \leq \mathbf{r}(f+g) + \mathbf{r}(-g) = \mathbf{r}(f+g) + \mathbf{r}(g)$$

Επομένως: $\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g) \leq \mathbf{r}(f+g)$. Εναλλάσσοντας τους ρόλους των f και g, θα έχουμε και: $\mathbf{r}(g) - \mathbf{r}(f) \leq \mathbf{r}(f+g)$. Άρα $|\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g)| \leq \mathbf{r}(f+g)$. Συνοψίζοντας θα έχουμε τελικά: $|\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g)| \leq \mathbf{r}(f+g) \leq \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g)$.

3. Έστω $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ τρεις διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ και $g : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις:

$$\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{G}$$

(**a**) Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{r}(g \circ f) \leq \min\{\mathbf{r}(f), \mathbf{r}(g)\}} \qquad (4)$$

Απόδειξη: Από τη Πρόταση 5.6.1 έχουμε ότι: $\operatorname{Im}(g \circ f) \subseteq \operatorname{Im}(g)$. Επομένως παίρνοντας διαστάσεις, θα έχουμε: $\mathbf{r}(g \circ f) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(g \circ f) \leq \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(g) = \mathbf{r}(g)$. Χρησιμοποιώντας αυτή την ανισότητα και τη θεμελιώδη εξίσωση διαστάσεων για την απεικόνιση $g \circ f : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$, θα έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(g \circ f) + \mathbf{r}(g \circ f)$$

Επίσης από τη θεμελιώδη εξίσωση διαστάσεων για την απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, θα έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) + \mathbf{r}(f)$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις θα έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) + \mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(g \circ f) + \mathbf{r}(g \circ f)$$

ή ισοδύναμα

$$\mathbf{r}(g \circ f) - \mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(g \circ f)$$

Όμως $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g \circ f)$. Πράγματι: αν $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$, τότε $f(\vec{x}) = \vec{0}$ και άρα $g(f(\vec{x})) = g(\vec{0}) = \vec{0}$. Έτσι $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$. Τότε όμως $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(g \circ f)$. Επομένως η τελευταία εξίσωση έχει σαν συνέπεια ότι $\mathbf{r}(g \circ f) - \mathbf{r}(f) \leq 0$, δηλαδή $\mathbf{r}(g \circ f) \leq \mathbf{r}(f)$. Συνοψίζοντας θα έχουμε: $\mathbf{r}(g \circ f) \leq \min\{\mathbf{r}(f), \mathbf{r}(g)$.

(**b**) Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{r}(g \circ f) = \mathbf{r}(f) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{\vec{0}\}} \tag{5}$$

(**c**) Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{r}(g \circ f) = \mathbf{r}(g) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(g) = \mathcal{F}} \tag{6}$$

(**d**) Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{r}(g \circ f) = \mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(g) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F} = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(g)} \tag{7}$$

Άσκηση 5.6.3 *Αποδείξτε τις ισοδυναμίες* (5), (6) *και* (7).

Άσκηση 5.6.4 *Έστω $f, g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$. Να δείξετε ότι αν η g είναι ισομορφισμός, τότε:*

$$\mathbf{r}(f \circ g) = \mathbf{r}(g \circ f) = \mathbf{r}(f)$$

Λύση: *Πράγματι χρησιμοποιώντας την σχέση (4) και το ότι η βαθμίδα ενός ισομορφισμού είναι ίση με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$, θα έχουμε:*

$$\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(f \circ g \circ g^{-1}) \leq \mathbf{r}(f \circ g) \leq \mathbf{r}(f)$$

$$\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(g^{-1} \circ g \circ f) \leq \mathbf{r}(g \circ f) \leq \mathbf{r}(f)$$

Επομένως:

$$\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(f \circ g) \quad \textit{και} \quad \mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(g \circ f)$$

5.7 Ασκήσεις

Άσκηση 5.7.1 *Ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικές; Σε κάθε περίπτωση δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.*

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \ f(x, y) = (2x - y, x).$

   $\boxed{\text{Σωστό}}$ Λάθος

2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \ f(x, y, z) = (z, x + y).$

   $\boxed{\text{Σωστό}}$ Λάθος

3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \ f(x, y) = (x^2, y^2).$

   Σωστό $\boxed{\text{Λάθος}}$

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \ f(x) = (2x, -x).$

   $\boxed{\text{Σωστό}}$ Λάθος

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \ f(x) = (1, -1).$

   Σωστό $\boxed{\text{Λάθος}}$

6. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \ f(x, y) = (xy, y, x).$

   Σωστό $\boxed{\text{Λάθος}}$

7. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \ f(x, y, z) = (|x|, 0).$

   Σωστό $\boxed{\text{Λάθος}}$

8. $f : \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}),\ \ f(A) = A^2.$

   Σωστό $\boxed{\text{Λάθος}}$

9. $f : \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}),\ \ f(A) = A + X$, *όπου* X *είναι ένας σταθερός* $n \times n$ *πίνακας.*

   Σωστό $\boxed{\text{Λάθος}}$

10. $f : \mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}_n[t],\ \ f(P(t)) = P(t)P'(t).$

    Σωστό $\boxed{\text{Λάθος}}$

Άσκηση 5.7.2 *Θεωρούμε τις ακόλουθες γραμμικές απεικονίσεις:*

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \ f_1(x, y, z) = (x + y + z, x + y)$$
$$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \ f_2(x, y, z) = (2x + z, x + y)$$
$$f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \ f_3(x, y, z) = (2y, x)$$

1. *Να δείξετε ότι το υποσύνολο* $\mathcal{F} := \{f_1, f_2, f_3\}$ *του διανυσματικού χώρου* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ *των γραμμικών απεικονίσεων* $: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

2. *Να εξετάσετε αν το υποσύνολο* $\mathcal{F}$ *είναι βάση του χώρου* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

Άσκηση 5.7.3 *Έστω* $a_0, a_1, \cdots, a_n$ *διακεκριμένα στοιχεία ενός σώματος* $\mathbb{K}$. *Να δείξετε ότι η απεικόνιση*

$$f : \mathbb{K}_n[t] \to \mathbb{K}^{n+1},\ \ P(t) \ \mapsto\ f(P(t)) := (P(a_0), P(a_1), \cdots, P(a_n))$$

είναι γραμμική. Επίσης να εξεταστεί αν η f *είναι ισομορφισμός.*

Άσκηση 5.7.4 *Να βρεθούν βάσεις της εικόνας και του πυρήνα για κάθε μια από τις γραμμικές απεικονίσεις* $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *της παραπάνω Άσκησης,* $i = 1, 2, 3$.

Άσκηση 5.7.5 *Θεωρούμε τη βάση*

$$\mathcal{B} := \{\vec{e}_1 = (1, 2, 3),\ \vec{e}_2 = (2, 5, 3),\ \vec{e}_3 = (1, 0, 1)\}$$

του $\mathbb{R}^3$ *και τα διανύσματα*

$$\vec{w}_1 = (1, 0),\ \ \vec{w}_2 = (1, 0),\ \ \vec{w}_3 = (1, 1)$$

του $\mathbb{R}^2$. *Να προσδιορισθεί η μοναδική γραμμική απεικόνιση* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *έτσι ώστε:* $f(\vec{e}_i) = \vec{w}_i$, $1 \leq i \leq 3$.

Άσκηση 5.7.6 *Θεωρούμε τη βάση*

$$\mathcal{B} := \{\vec{e}_1 = 1,\ \vec{e}_2 = t,\ \vec{e}_3 = t^2\}$$

του $\mathbb{R}_2[t]$ *και τα διανύσματα*

$$\vec{w}_1 = 1 + t,\ \ \vec{w}_2 = 3 - t^2,\ \ \vec{w}_3 = 4 + 2t - 3t^2$$

του $\mathbb{R}_2[t]$. *Να προσδιορισθεί η μοναδική γραμμική απεικόνιση* $f : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ *έτσι ώστε:* $f(\vec{e}_i) = \vec{w}_i$, $1 \leq i \leq 3$.

Άσκηση 5.7.7 *Έστω* $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *μια γραμμική απεικόνιση, όπου* $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ *είναι διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος* $\mathbb{K}$. *Να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η* f *είναι ισομορφισμός.*

2. *Η f στέλνει μια τυχούσα βάση του $\mathcal{V}$ σε μια βάση του $\mathcal{W}$.*

Άσκηση 5.7.8 *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ η μοναδική γραμμική απεικόνιση η οποία στέλνει τα διανύσματα της κανονικής βάσης $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ στα διανύσματα*

$$\vec{w}_1 = (0,0,\cdots,0,0), \vec{w}_2 = (1,0,\cdots,0,0), \vec{w}_3 = (0,2,\cdots,0,0), \cdots, \vec{w}_n = (0,0,\cdots,n-1,0)$$

Δηλαδή $f(\vec{e}_i) = \vec{w}_i$, $1 \le i \le n$. Να δείξετε ότι $f^n = 0$ και ακολούθως να προσδιορίσετε βάσεις για τον πυρήνα $\operatorname{Ker}(f)$ και την εικόνα $\operatorname{Im}(f)$.

Άσκηση 5.7.9 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Υποθέτουμε ότι $f^n = 0$, και $f^{n-1} \neq 0$ (0 είναι η μηδενική γραμμική απεικόνιση $: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$). Αν $\vec{x} \in \mathcal{E}$, τότε να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η $f^{n-1}(\vec{x}) \neq \vec{0}$.*
2. *Το υποσύνολο διανυσμάτων $\{\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \cdots, f^{n-1}(\vec{x})\}$ του $\mathcal{V}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Άσκηση 5.7.10 *Να βρεθεί η βαθμίδα καθώς και η διάσταση του πυρήνα της γραμμικής απεικόνισης:*

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z,w) := (x - y + z + w, x + 2y - z + w, 3y - 2z)$$

Άσκηση 5.7.11 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Υποθέτουμε ότι $\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(f^2)$. Να δείξετε ότι $\mathcal{E} = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.*

Άσκηση 5.7.12 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(f^2)$. Να δείξετε ότι $\mathcal{E} = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.*

Άσκηση 5.7.13 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Αν ισχύει $f^2 = \alpha f$, να δείξετε ότι $\mathcal{E} = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.*

Άσκηση 5.7.14 *Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3, \vec{\varepsilon}_4\}$ μια βάση του $\mathbb{R}^4$. Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε η μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ για την οποία ισχύει:*

$$f(\vec{\varepsilon}_1) = \vec{\varepsilon}_1 + \lambda\vec{\varepsilon}_4,\quad f(\vec{\varepsilon}_2) = 2\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2,\quad f(\vec{\varepsilon}_3) = 2\vec{\varepsilon}_2 + \vec{\varepsilon}_3,\quad f(\vec{\varepsilon}_4) = 2\vec{\varepsilon}_3 + \vec{\varepsilon}_4$$

να είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 5.7.15 *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και $f : \mathbb{K}_n[t] \to \mathbb{K}_n[t]$ η απεικόνιση η οποία ορίζεται ως εξής: $f(P(t)) = P(t+1)$. Να δείξετε ότι η f είναι γραμμική και ακολούθως να εξετάσετε εαν η f είναι ισομορφισμός.*

Άσκηση 5.7.16 *Να βρεθεί η βαθμίδα καθώς και η διάσταση του πυρήνα της γραμμικής απεικόνισης:*

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \;\; f(x,y,z,w) := (x - z + 2w, -2x + y + 2z, y + 4w)$$

Επιπλέον:

1. *Να δείξετε ότι το διάνυσμα $(1,3,k)$ ανήκει στην εικόνα $\mathrm{Im}(f)$ της f αν και μόνον αν $k = 5$.*

2. *Ποιά συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα $a, b \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το διάνυσμα $(1,a,1,b)$ να ανήκει στον πυρήνα $\mathrm{Ker}(f)$ της f;*

Άσκηση 5.7.17 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Υποθέτουμε ότι $f^2 = 0$. Να δείξετε τα ακόλουθα:*

1. $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.

2. $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) \geq \frac{\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}}{2}$.

3. *Η ανισότητα του 2. είναι ισότητα αν και μόνον αν $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$.*

Άσκηση 5.7.18 *Έστω $f, g : \mathcal{E} \to \mathbb{K}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις (γραμμικές μορφές), όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Ορίζουμε μια νέα απεικόνιση ως εξής:*

$$h : \mathcal{E} \to \mathbb{K}^2, \;\; h(\vec{x}) := (f(\vec{x}), g(\vec{x}))$$

Να δείξετε τα ακόλουθα:

1. *Η απεικόνιση h είναι γραμμική.*

2. $\mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$.

3. $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{K}^2$ *(δηλαδή η h είναι επιμορφισμός) αν και μόνον αν $f \neq 0 \neq g$.*

Άσκηση 5.7.19 *Έστω $f, g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$, και έστω ότι $f + g = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$. Να δείξετε ότι:*

$$\mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g) \geq n$$

Άσκηση 5.7.20 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνη, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $m \geq 1$, έτσι ώστε:*

$$\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(f^m) \oplus \mathrm{Im}(f^m)$$

Κεφάλαιο 6

Δυϊκοι Χωροι και Χωροι Πηλικα

Στο παρόν Κεφάλαιο θα μελετήσουμε εν συντομία δύο σημαντικά θέματα της Γραμμικής Άλγεβρας. Την θεωρία των γραμμικών μορφών και των δυϊκών χώρων, και την θεωρία των χώρων πηλίκων. Η θεωρία των δυϊκών χώρων σε συνάρτηση με την θεωρία βαθμίδας γραμμικών απεικονίσεων θα είναι σημαντική στα επόμενα Κεφάλαια όπου θα μελετήσουμε την θεωρία πινάκων.

6.1 Δυϊκοί Χώροι

Στην παρούσα ενότητα σταθεροποιούμε ένα σώμα $\mathbb{K}$, και συνήθως θα θεωρούμε το $\mathbb{K}$ ως διανυσματικό χώρο υπεράνω του εαυτού του.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$, τότε μια **γραμμική μορφή** επί του $\mathcal{E}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathbb{K}$. Επίσης υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο όλων των γραμμικών μορφών επί του $\mathbb{K}$ συμβολίζεται με

$$\mathcal{E}^\star := \{f : \mathcal{E} \to \mathbb{K} \mid \text{η } f \text{ είναι γραμμική}\}$$

και είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$.

Πρόταση 6.1.1 *Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Τότε το σύνολο*

$$\mathcal{B}^\star := \{\vartheta^1, \vartheta^2, \cdots, \vartheta^n\}$$

όπου $\forall i = 1, 2, \cdots, n$, ϑ^i είναι η μοναδική γραμμική απεικόνιση $\vartheta^i : \mathcal{E} \to \mathbb{K}$, για την οποία ισχύει:

$$\vartheta^i(\vec{e}_j) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{αν} \quad i = j \\ 0, & \text{αν} \quad i \neq j \end{array} \right\} \qquad\qquad 1 \leq j \leq n$$

είναι μια βάση του δυϊκού χώρου $\mathcal{E}$.

Απόδειξη: Επειδή το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι βάση του $\mathcal{E}$, από το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης 5.3.1, για κάθε $i = 1, 2, \cdots, n$, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση, δηλαδή γραμμική μορφή, $\vartheta^i : \mathcal{E} \to \mathbb{K}$ έτσι ώστε να ισχύει $\vartheta^i(\vec{e}_i) = 1$ και $\vartheta^i(\vec{e}_j) = 0$, $\forall j \neq i$. Επομένως αν $\vec{x} \in \mathcal{E}$ και $\vec{x} = \kappa_1\vec{e}_1 + \cdots + \kappa_n\vec{x}_n$ είναι η μοναδική γραφή του $\vec{x}$ ως πρός την βάση $\mathcal{B}$, τότε θα έχουμε $\vartheta^i(\vec{x}) = \kappa_i$, $1 \leq i \leq n$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο των γραμμικών μορφών $\mathcal{B}^\star = \{\vartheta^1, \vartheta^2, \cdots, \vartheta^n\}$ είναι μια βάση του δυϊκού χώρου $\mathcal{E}^\star$. Έστω $\kappa_1\vartheta^1 + \kappa_2\vartheta^2 + \cdots + \kappa_n\vartheta^n = \vec{0}$. Υπολογίζοντας την παραπάνω ισότητα γραμμικών απεικονίσεων στο διάνυσμα $\vec{e}_i \in \mathcal{B}$, και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\vartheta^i(\vec{e}_i) = 1$ και $\vartheta^i(\vec{e}_j) = 0$, $\forall j \neq i$, θα έχουμε $\kappa_i = 0$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$. Επομένως οι γραμμικές μορφές ϑ^i, $1 \leq i \leq n$, είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Έστω τώρα ξ μια τυχούσα γραμμική μορφή. Τότε για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$ το οποίο έχει μοναδική γραφή $\vec{x} = \kappa_1\vec{e}_1 + \cdots + \kappa_n\vec{x}_n$ ως πρός την βάση $\mathcal{B}$, θα έχουμε $\xi(\vec{x}) = \kappa_1\xi(\vec{e}_1) + \cdots + \kappa_n\xi(\vec{e}_n)$. Όμως από τον ορισμό τους, οι γραμμικές μορφές ϑ^i ικανοποιούν τις σχέσεις $\vartheta^i(\vec{x}) = \kappa_i$, $1 \leq i \leq n$. Άρα $\xi(\vec{x}) = \kappa_1\xi(\vec{e}_1) + \cdots + \kappa_n\xi(\vec{e}_n) = \xi(\vec{e}_1)\vartheta^1(\vec{x}) + \cdots + \xi(\vec{e}_n)\vartheta^n(\vec{x}) = (\xi(\vec{e}_1)\vartheta^1 + \cdots + \xi(\vec{e}_n)\vartheta^n)(\vec{x})$. Επομένως επειδή το διάνυσμα $\vec{x}$ είναι τυχόν, θα έχουμε $\xi = \xi(\vec{e}_1)\vartheta^1 + \cdots + \xi(\vec{e}_n)\vartheta^n$, δηλαδή η γραμμική μορφή ξ είναι γραμμικών συνδυασμός των γραμμικών μορφών $\{\vartheta^1, \cdots, \vartheta^n\}$. Συνοψίζοντας θα έχουμε ότι το σύνολο γραμμικών μορφών $\mathcal{B}^\star$ είναι μια βάση του δυϊκού χώρου $\mathcal{E}^\star$. □

Ορισμός 6.1.2 *Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Τότε η βάση $\mathcal{B}^\star = \{\vartheta^1, \vartheta^2, \cdots, \vartheta^n\}$ του δυϊκού χώρου $\mathcal{E}^\star$ η οποία κατασκευάστηκε στην Πρόταση 6.1.1 καλείται η* **δυϊκή βάση** *της $\mathcal{B}$.*

Από την κατασκευή της τα στοιχεία της δυϊκής βάσης $\mathcal{B}^\star$ της $\mathcal{B}$ ορίζονται ως εξής: Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Τότε το $\vec{x}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B}$: $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$. Τότε $\forall i = 1, 2, \cdots, n$, $\vartheta^i(\vec{x}) = x_i$.

Από την Πρόταση 6.1.1, και το Θεώρημα 5.4.3 έπεται άμεσα το ακόλουθο Πόρισμα.

Πόρισμα 6.1.3 *Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$, τότε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}^\star$. Ιδιαίτερα κάθε διανυσματικός χώρος $\mathcal{E}$ πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ είναι ισόμορφος με τον δυϊκό του χώρο $\mathcal{E}^\star$: $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}^\star$.*

Σχόλιο 6.1.1 *Το Πόρισμα 6.1.3 δεν ισχύει αν ο χώρος $\mathcal{E}$ έχει άπειρη διάσταση.*

Επειδή η κατασκευή του δυϊκού χώρου ισχύει για κάθε διανυσματικό χώρο, μπορούμε να θεωρήσουμε και τον δυϊκό χώρο $(\mathcal{E}^\star)^\star$ του δυϊκού χώρου $\mathcal{E}^\star$ του $\mathcal{E}$. Ο διανυσματικός χώρος $(\mathcal{E}^\star)^\star$ θα συμβολίζεται με $\mathcal{E}^{\star\star}$ και θα καλείται ο **διπλά δυϊκός** χώρος του $\mathcal{E}$. Εκ κατασκευής τα στοιχεία του διπλά δυϊκού χώρου $\mathcal{E}^{\star\star}$ είναι γραμμικές μορφές (απεικονίσεις) $\phi : \mathcal{E}^\star \to \mathbb{K}$.

Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 6.1.3 θα έχουμε την ακόλουθη άμεση συνέπεια.

Πόρισμα 6.1.4 *Αν* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$*, τότε* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}^{\star\star}$*. Ιδιαίτερα κάθε διανυσματικός χώρος* $\mathcal{E}$ *πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος* $\mathbb{K}$ *είναι ισόμορφος με τον διπλά δυϊκό του χώρο* $\mathcal{E}^{\star\star}$*:* $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}^{\star\star}$*.*

Ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{E}$ και ο διπλά δυϊκός του $\mathcal{E}^{\star\star}$ συνδέονται μέσω μιας γραμμικής απεικόνισης η οποία ορίζεται με φυσικό τρόπο. Πράγματι, θεωρούμε την απεικόνιση

$$\iota : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\star\star}, \ \vec{x} \mapsto \iota(\vec{x})$$

όπου $\iota(\vec{x})$ είναι η γραμμική μορφή:

$$\iota(\vec{x}) : \mathcal{E}^\star \to \mathbb{K}, \ \xi \mapsto \iota(\vec{x})(\xi) := \xi(\vec{x}).$$

Θεώρημα 6.1.5 *Αν* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$*, τότε η απεικόνιση* $\iota : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\star\star}$ *ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.*

Απόδειξη: Επειδή οι χώροι $\mathcal{E}$ και $\mathcal{E}^{\star\star}$ έχουν την ίδια διάσταση, για να δείξουμε ότι η ι είναι ισομορφισμός, σύμφωνα με την Πρόταση 5.4.7 αρκεί να δείξουμε ότι η ι είναι μονομορφισμός. Δείχνουμε πρώτα ότι η ι είναι γραμμική. Έστω $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{K}$ και $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathcal{E}$. Τότε για κάθε γραμμική μορφή $\xi : \mathcal{E} \to \mathbb{K}$, δηλαδή στοιχείο του διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}^\star$, θα έχουμε $\iota(\kappa_1\vec{x}_1 + \kappa_2\vec{x}_2)(\xi) = \xi(\kappa_1\vec{x}_1 + \kappa_2\vec{x}_2) = \kappa_1\xi(\vec{x}_1) + \kappa_2\xi(\vec{x}_2) = \kappa_1\iota(\vec{x}_1)(\xi) + \kappa_2\iota(\vec{x}_2)(\xi) = [\kappa_1\iota(\vec{x}_1) + \kappa_2\iota(\vec{x}_2)](\xi)$, και επομένως επειδή η γραμμική μορφή ξ είναι τυχούσα, θα έχουμε $\iota(\kappa_1\vec{x}_1 + \kappa_2\vec{x}_2) = \kappa_1\iota(\vec{x}_1) + \kappa_2\iota(\vec{x}_2$, δηλαδή η απεικόνιση ι είναι γραμμική. Έστω τώρα $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(\iota)$, και έστω $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$, όπου $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$. Τότε για κάθε γραμμική μορφή $\xi : \mathcal{E} \to \mathbb{K}$, θα έχουμε $\iota(\vec{x})(\xi) = \vec{0}$. Επομένως για τις γραμμικές μορφές ϑ^i, $1 \leq i \leq n$, όπου $\mathcal{B}^\star := \{\vartheta^1, \cdots, \vartheta^n\}$ είναι η δυϊκή βάση της $\mathcal{B}$, θα έχουμε: $\iota(\vec{x})(\vartheta^i) = 0$, $1 \leq i \leq n$, δηλαδή $\vartheta^i(\vec{x}) = x_i = 0$. Επομένως $\vec{x} = \vec{0}$ και άρα $\mathrm{Ker}(\iota) = \{\vec{0}\}$, δηλαδή η ι είναι μονομορφισμός και συνεπακόλουθα ισομορφισμός. $\square$

Σχόλιο 6.1.2 *Το γεγονός ότι ένας διανυσματικός χώρος $\mathcal{E}$ με πεπερασμένη διάσταση υπεράνω του $\mathbb{K}$ είναι ισόμορφος με τον διπλά δυϊκό του $\mathcal{E}^{\star\star}$ προκύπτει όπως είδαμε και από το Πόρισμα 6.1.4. Όμως ο ισομορφισμός $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}^{\star\star}$ του Πορίσματος 6.1.4 ορίζεται, όπως είναι φανερό από το Πόρισμα 6.1.3, μέσω μιας βάσης του $\mathcal{E}$, και επομένως εξαρτάται από την επιλογή της βάσης. Αντίθετα ο ισομορφισμός $\iota : \mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}^{\star\star}$ του Θεωρήματος 6.1.5 είναι ανεξάρτητος της επιλογής βάσης και επομένως είναι περισσότερο «φυσικός» με μια έννοια η οποία μπορεί να γίνει αυστηρή, αλλά ξεφεύγει από τα όρια των παρόντων σημειώσεων. Ουσιαστικά η ιοσομορφισμός ι ορίζεται με τον ίδιο τύπο για κάθε διανυσματικό χώρο και συμπεριφέρεται ομαλά σε σχέση με τις γραμμικές απεικονίσεις.*

6.1.1 Μηδενιστές

Στην παρούσα υποενότητα θα μελετήσουμε την συμπεριφορά υπόχωρων ως προς τους δυϊκούς χώρους.

Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ και έστω $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$.

Ορισμός 6.1.6 *Ο* **μηδενιστής** *$\mathcal{V}^\circ$ του υπόχωρου $\mathcal{V}$ ορίζεται να είναι το ακόλουθο υποσύνολο του δυϊκού χώρου $\mathcal{E}$:*

$$\mathcal{V}^\circ := \{\xi \in \mathcal{E}^\star \mid \xi(\vec{x}) = 0, \ \forall \vec{x} \in \mathcal{V}\}$$

Πρόταση 6.1.7 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ και έστω $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$. Τότε ο μηδενιστής $\mathcal{V}^\circ$ του $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του δυϊκού χώρου $\mathcal{E}^\star$ του $\mathcal{E}$.*

Επιπλέον αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$, τότε:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}^\circ$$

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε την γραμμική απεικόνιση $\iota : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\star\star}, \ \vec{x} \mapsto \iota(\vec{x})$ που ορίσαμε παραπάνω. Για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{V}$, ορίζεται η γραμμική μορφή $\iota(\vec{x}) : \mathcal{E}^\star \to \mathbb{K}$, $\xi \mapsto \iota(\vec{x})(\xi) = \xi(\vec{x})$. Προφανώς τότε θα έχουμε:

$$\mathcal{V}^\circ = \bigcap_{\vec{x} \in \mathcal{V}} \mathrm{Ker}(\iota(\vec{x}))$$

Επειδή ο πυρήνας μιας γραμμικής απεικόνισης είναι υπόχωρος και η τομή υπόχωρων είναι υπόχωρος, έπεται από την παραπάνω περιγραφή ότι ο μηδενιστής $\mathcal{V}^\circ$ του $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}^\star$.

Έστω ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = r$. Επιλέγουμε μια τυχούσα βάση $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_r\}$ του $\mathcal{V}$ και την συμπληρώνουμε σε μια βάση

$$\mathcal{B}_{\mathcal{E}} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_r, \vec{e}_{r+1}, \cdots, \vec{e}_n\}$$

του $\mathcal{E}$. Θεωρούμε επίσης την επαγόμενη δυϊκή βάση

$$\mathcal{B}^\star_{\mathcal{E}} = \{\vartheta^1, \cdots, \vartheta^r, \vartheta^{r+1}, \cdots, \vartheta^n\}$$

του $\mathcal{E}^\star$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{C} := \{\vartheta^{r+1}, \cdots, \vartheta^n\}$ είναι μια βάση του υπόχωρου $\mathcal{V}^\circ$. Έστω $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_r\vec{e}_r$ ένα διάνυσμα του $\mathcal{V}$. Θεωρώντας το $\vec{x}$ σαν δθιάνυσμα του $\mathcal{E}$, αυτό θα γράφεται $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_r\vec{e}_r + 0\vec{e}_{r+1} + \cdots + 0\vec{e}_n$ σαν γραμμικός συνδυασμός της βάσης $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ του $\mathcal{E}$. Τότε για κάθε $i = r+1, \cdots, n$, θα έχουμε: $\vartheta^i(\vec{x}) = 0$. Άρα οι γραμμικές μορφές ϑ^i, $r+1 \leq i \leq n$, μηδενίζουν όλα τα διανύσματα του υπόχωρου $\mathcal{V}$ και επομένως ανήκουν στον υπόχωρο $\mathcal{V}^\circ$. Επειδή το σύνολο γραμμικών μορφών $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}^\star$ και $\mathcal{V}^\circ \subseteq \mathcal{E}^\star$, κάθε γραμμική μορφή $\xi \in \mathcal{V}^\circ$ θα γράφεται μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός της βάσης $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$: $\xi = \lambda_1\vartheta^1 + \cdots + \lambda_r\vartheta^r + \lambda_{r+1}\vartheta^{r+1} + \cdots + \lambda_n\vartheta^n$, όπου όπως είδαμε $\lambda_j = \xi(\vec{e}_j)$, $1 \leq j \leq n$. Επειδή όμως τα διανύσματα $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_r$ ανήκουν στον υπόχωρο $\mathcal{V}$, θα έχουμε $\lambda_i = \xi(\vec{e}_i) = 0$, $\forall i = 1, 2, \cdots, r$. Άρα $\xi = \lambda_{r+1}\vartheta^{r+1} + \cdots + \lambda_n\vartheta^n$, και επομένως το σύνολο γραμμικών μορφών $\mathcal{C}$ παράγει τον υπόχωρο $\mathcal{V}^\circ$. Από την άλλη πλευρά το σύνολο $\mathcal{C}$ είναι γραμμμικά ανεξάρτητο ως υποσύνολο του γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$. Άρα το $\mathcal{C}$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}^\circ$ και επομένως $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}^\circ = n - r = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} - \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$. Συνοψίζονατς θα έχουμε την ζητούμενη σχέση: $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}^\circ$. □

Πρόταση 6.1.8 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ και έστω $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$. Τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός:*

$$\phi : \mathcal{V} \xrightarrow{\cong} \mathcal{V}^{\circ\circ}$$

Απόδειξη: Από την Πρόταση 6.1.7 θα έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}^\circ$$

Αντικαθιστώντας τους διανυσματικούς χώρους $\mathcal{E}$ και $\mathcal{V}^\circ \subseteq \mathcal{E}^\star$ με τους διανυσματικούς χώρους $\mathcal{E}^\star$ και $\mathcal{V}^{\circ\circ} \subseteq \mathcal{E}^{\star\star}$, από την ίδια Πρόταση θα έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}^\star = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}^\circ + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}^{\circ\circ}$$

Επειδή από το Πόρισμα 6.1.4 έχουμε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}^\star$, έπεται ότι: $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}^\circ = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}^\circ + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}^{\circ\circ}$, και άρα $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}^{\circ\circ}$.

Τέλος η γραμμική απεικόνιση $\iota : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\star\star}$, $\vec{x} \mapsto \iota(\vec{x})$, περιορίζεται σε μια γραμμική απεικόνιση $\iota_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^{\circ\circ}$. Πράγματικά: για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{V}$ και κάθε γραμμική μορφή $\xi \in \mathcal{V}^{\circ}$, θα έχουμε: $\iota(\vec{x})(\xi) = \xi(\vec{x}) = \vec{0}$. Αυτό σημαίνει ότι $\iota(\vec{x}) \in \mathcal{V}^{\circ\circ} = \{\zeta \in \mathcal{E}^{\star\star} \mid \zeta(\xi) = \vec{0},\ \forall \xi \in \mathcal{V}^{\circ}\}$. Επειδή η $\iota_{\mathcal{V}} = \iota|_{\mathcal{V}}$ είναι ο περιορισμός της ι στον υπόχωρο $\mathcal{V}$, και η ι είναι μονομορφισμός, έπεται ότι η $\iota_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^{\circ\circ}$ θα είναι επίσης μονομορφισμός. Επειδή όμως όπως είδαμε ισχύει $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}^{\circ\circ}$, από τα κριτήρια ισομορφισμών, βλέπε Πρόταση 5.4.7, θα έχουμε ότι η $\iota_{\mathcal{V}}$ είναι ισομορφισμός. □

6.1.2 Η Δυϊκή μιας Γραμμικής Απεικόνισης

Στην παρούσα υπο - ενότητα θα μελετήσουμε την συμπεριφορά των γραμμικών απεικονίσεων σε σχέση με τους δυϊκούς χώρους.

Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Είναι φυσικό να θέσουμε το ερώτημα αν οι δυϊκοί χώροι $\mathcal{E}^{\star}$ και $\mathcal{F}^{\star}$ συνδέονται μέσω μιας γραμμικής απεικόνισης (η οποία φυσικά περιμένουμε να εξαρτάται από την f με κάποιον τρόπο). Αυτό πράγματι συμβαίνει αν και η φορά της γραμμικής απεικόνισης η οποία τους συνδέει είναι αντίθετη με την φορά της f.

Ορίζουμε μια απεικόνιση

$$^{t}f : \mathcal{F}^{\star} \;\longrightarrow\; \mathcal{E}^{\star},\ \xi \;\mapsto\; {}^{t}f(\xi) = f \circ \xi$$

Περισσότερο παραστατικά η απεικόνιση ^{t}f ορίζεται ως εξής:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "{}^{t}f(\xi)=\xi\circ f"'] & \mathcal{F} \arrow[d, "\xi"] \\
 & \mathbb{K}
\end{tikzcd}$$

Δηλαδή η απεικόνιση ^{t}f στέλνει μια γραμμική μορφή ξ στην σύνθεση της με την f. Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $^{t}f(\xi) = \xi \circ f$ είναι μια γραμμική μορφή διότι είναι γραμμική απεικόνιση ως σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων.

Ορισμός 6.1.9 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$. Η απεικόνιση $^{t}f : \mathcal{F}^{\star} \to \mathcal{E}^{\star}$ καλείται η* **δυϊκή** *ή* **ανάστροφη απεικόνιση** *της f.*

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να ορίσουμε και την **διπλά δυϊκή** απεικόνιση $^{t}(^{t}f) : \mathcal{E}^{\star\star} \to \mathcal{F}^{\star\star}$ της f ως την δυϊκή απεικόνιση της $^{t}f : \mathcal{F}^{\star} \to \mathcal{E}^{\star}$. Χάριν απλότητας θα συμβολίζουμε $^{t}(^{t}f) := {}^{tt}f : \mathcal{E}^{\star\star} \to \mathcal{F}^{\star\star}$.

Θεώρημα 6.1.10 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$. Τότε η δυϊκή απεικόνιση ${}^t f : \mathcal{F}^\star \to \mathcal{E}^\star$ είναι γραμμική.*

Επιπλέον αν $\iota_\mathcal{E} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\star\star}$ και $\iota_\mathcal{F} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^{\star\star}$ είναι οι γραμμικές απεικονίσεις του Θεωρήματος 6.1.5 για τους διανυσματικούς χώρους $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$, τότε οι συνθέσεις $\iota_\mathcal{F} \circ f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}^{\star\star}$ και ${}^{tt}f \circ \iota_\mathcal{E} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}^{\star\star}$ ταυτίζονται:

$$ {}^{tt}f \circ \iota_\mathcal{E} = \iota_\mathcal{F} \circ f \tag{†} $$

Δηλαδή για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$, ισχύει: ${}^{tt}f(\iota_\mathcal{E}(\vec{x})) = \iota_\mathcal{F}(f(\vec{x}))$.

Απόδειξη: Έστω $\xi, \zeta \in \mathcal{F}^\star$ δύο γραμμικές μορφές υπεράνω του $\mathcal{F}$ και έστω $\kappa, \lambda \in \mathbb{K}$. Τότε από την Πρόταση 5.5.5 έχουμε: ${}^t f(\kappa\xi + \lambda\zeta) = (\kappa\xi + \lambda\zeta) \circ f = (\kappa\xi) \circ f + (\lambda\zeta) \circ f = \kappa(\xi \circ f) + \lambda(\zeta \circ f) = \kappa {}^t f(\xi) + \lambda {}^t f(\zeta)$. Επομένως η ${}^t f$ είναι γραμμική. Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$· τότε, εξ' ορισμού, για κάθε γραμμική μορφή $\xi \in \mathcal{F}^{\star\star}$ επί του $\mathcal{F}^\star$ θα έχουμε:

$$ \begin{aligned} {}^{tt}f[\iota_\mathcal{E}(\vec{x})](\xi) = [\iota_\mathcal{E}(\vec{x}) \circ {}^t f](\xi) = \iota_\mathcal{E}(\vec{x})({}^t f(\xi)) = \iota_\mathcal{E}(\xi \circ f) = (\xi \circ f)(\vec{x}) \\ = \xi(f(\vec{x})) = \iota_\mathcal{F}(f(\vec{x}))(\xi) \end{aligned} $$

Επομένως ${}^{tt}f[\iota_\mathcal{E}(\vec{x})] = \iota_\mathcal{F}(f(\vec{x}))$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$, και άρα ${}^{tt}f \circ \iota_\mathcal{E} = \iota_\mathcal{F} \circ f$. □

Σχόλιο 6.1.3 *Η σχέση (†) στο Θεώρημα 6.1.10 μπορεί να κατανοηθεί περισσότερο παραστατικά με το παρακάτω διάγραμμα γραμμικών απεικονίσεων:*

$$ \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\iota_\mathcal{E}} & \mathcal{E}^{\star\star} \\ \downarrow f & & \downarrow {}^{tt}f \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\iota_\mathcal{F}} & \mathcal{F}^{\star\star} \end{array} \tag{††} $$

Τότε η σχέση (†) είναι ισοδύναμη με την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος (††). Δηλαδή οι δύο δυνατοί τρόποι να πάμε μέσω γραμμικών απεικονίσεων από τον διανυσματικό χώρο $\mathcal{E}$ στον διανυσματικό χώρο $\mathcal{F}^{\star\star}$ συμπίπτουν.

Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση και έστω ${}^t f : \mathcal{F}^\star \to \mathcal{E}^\star$ η δυϊκή της. Η επόμενη πρόταση μας δίνει έναν τρόπο υπολογισμού του πυρήνα της γραμμικής απεικόνισης ${}^t f$.

Λήμμα 6.1.11 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση και έστω ${}^t f : \mathcal{F}^\star \to \mathcal{E}^\star$ η δυϊκή της. Τότε ισχύει η ακόλουθη σχέση:*

$$ \mathrm{Ker}({}^t f) = \mathrm{Im}(f)^\circ \subseteq \mathcal{F}^\star $$

Απόδειξη: Έστω $\xi \in \mathrm{Ker}({}^t f)$, δηλαδή $\xi : \mathcal{F}^\star \to \mathbb{K}$ είναι μια γραμμική μορφή επί του $\mathcal{F}$ έτσι ώστε ${}^t f(\xi) = \xi \circ f = 0$. Τότε για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$ θα έχουμε $(\xi \circ f)(\vec{x}) = \xi(f(\vec{x})) = 0$, και αυτό σημαίνει ότι η γραμμική μορφή ξ μηδενίζει κάθε διάνυσμα το οποίο ανήκει στην εικόνα της f. Επομένως $\xi \in \mathrm{Im}(f)^\circ$, και άρα $\mathrm{Ker}({}^t f) \subseteq \mathrm{Im}(f)^\circ$. Αντίστροφα αν $\xi \in \mathrm{Im}(f)^\circ$, τότε για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$, θα έχουμε $\xi(f(\vec{x})) = 0$ ή ισοδύναμα $(\xi \circ f)(\vec{x}) = 0$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$. Τότε όμως $\xi \circ f = 0$ ή ισοδύναμα ${}^t f(\xi) = 0$, δηλαδή $\xi \in \mathrm{Ker}({}^t f)$ και άρα $\mathrm{Ker}({}^t f) \supseteq \mathrm{Im}(f)^\circ$. Συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{Ker}({}^t f) = \mathrm{Im}(f)^\circ$. □

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα το οποίο θα το χρησιμοποιήσουμε στην θεωρία πινάκων.

Θεώρημα 6.1.12 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$, και έστω ${}^t f : \mathcal{F}^\star \to \mathcal{E}^\star$ η δυϊκή απεικόνιση της f. Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} < \infty$, τότε:*

$$\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}({}^t f)$$

Απόδειξη: Θεωρούμε την Θεμελιώδη Εξίσωση Διαστάσεων για την γραμμική απεικόνιση ${}^t f : \mathcal{F}^\star \to \mathcal{E}^\star$:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}^\star = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}({}^t f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}({}^t f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}({}^t f) + \mathbf{r}({}^t f)$$

Από το Λήμμα 6.1.11 έχουμε $\mathrm{Ker}({}^t f) = \mathrm{Im}(f)^\circ$ και άρα $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}({}^t f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f)^\circ$. Επομένως, επειδή από το Πόρισμα 6.1.3 έχουμε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}^\star$, από την παραπάνω εξίσωση έπεται ότι:

$$\mathbf{r}({}^t f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}^\star - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}({}^t f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f)^\circ$$

Τέλος από την Πρόταση 6.1.7 έχουμε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f)^\circ$, και άρα:

$$\mathbf{r}({}^t f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} - (\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f)) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f)) = \mathbf{r}(f)$$

□

6.2 Χώροι Πηλίκα

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε μια σημαντική κατασκευή στην θεωρία διανυσματικών χώρων: την κατασκευή του διανυσματικού χώρου πηλίκο $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$ ως προς έναν υπόχωρο του $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$. Ένα από ερωτήματα τα οποία απετέλεσαν κίνητρο για μελέτη της κατασκευής του χώρου πηλίκο ήταν και το εξής:

«Δοθέντος διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$ και ενός υπόχωρου $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$, υπάρχει διανυσματικός χώρος $\mathcal{F}$ και γραμμική απεικόνιση $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ έτσι ώστε $\mathrm{Ker}(\pi) = \mathcal{V}$;»

Θα δούμε ότι η απάντηση είναι καταφατική και επιπλέον ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{F}$ και η γραμμική απεικόνιση είναι μοναδικές.

Από τώρα και στο εξής σταθεροποιούμε έναν διανυσματικό χώρο $\mathcal{E}$ υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, και έναν υπόχωρο $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$.

Ορισμός 6.2.1 *Ένα **σύμπλοκο** του υπόχωρου $\mathcal{V}$ επί του χώρου $\mathcal{E}$ είναι ένα σύνολο της μορφής:*

$$\vec{x} + \mathcal{V} := \{\vec{x} + \vec{v} \mid \vec{v} \in \mathcal{V}\} \subseteq \mathcal{E}$$

όπου $\vec{x} \in \mathcal{E}$ είναι ένα διάνυσμα του $\mathcal{E}$.

Παρατήρηση 6.2.2 *Ένα σύμπλοκο της μορφής $\vec{x} + \mathcal{V}$, όπου $\vec{x} \in \mathcal{E}$, συνήθως δεν είναι υπόχωρος. Αυτό το οποίο ισχύει είναι ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το σύμπλοκο $\vec{x} + \mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$.*

2. *$\vec{x} \in \mathcal{V}$ (και τότε $\vec{x} + \mathcal{V} = \mathcal{V}$).*

Πράγματικα: αν το σύμπλοκο $\vec{x} + \mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$, τότε $\vec{0} \in \vec{x} + \mathcal{V}$ και άρα υπάρχει $\vec{y} \in \mathcal{V}$ έτσι ώστε: $\vec{0} = \vec{x} + \vec{y}$. Τότε όμως, επειδή ο $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος, θα έχουμε: $\vec{x} = -\vec{y} \in \mathcal{V}$. Αντίστροφα αν $\vec{x} \in \mathcal{V}$, τότε προφανώς $\vec{x} + \mathcal{V} = \mathcal{V}$ και άρα το σύμπλοκο $\vec{x} + \mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$.

Το παρακάτω λήμματα περιγράφουν κάποιες βασικές ιδιότητες των συμπλόκων.

Λήμμα 6.2.3 *Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *$\vec{x} + \mathcal{V} = \vec{y} + \mathcal{V}$.*

2. *$\vec{x} \in \vec{y} + \mathcal{V}$.*

3. *$\vec{x} - \vec{y} \in \mathcal{V}$.*

Απόδειξη: 1. $\Rightarrow$ 2. Θα έχουμε: $\vec{x} = \vec{x} + \vec{0} \in \vec{x} + \mathcal{V} = \vec{y} + \mathcal{V}$.

2. $\Rightarrow$ 3. Θα έχουμε: $\vec{x} \in \vec{y} + \mathcal{V} \;\Rightarrow\; \exists \vec{w} \in \mathcal{V} : \vec{x} = \vec{y} + \vec{w}$. Επομένως $\vec{x} - \vec{y} = \vec{w} \in \mathcal{V}$.

3. $\Rightarrow$ 1. Θα έχουμε: $\vec{x} - \vec{y} \in \mathcal{V} \;\Rightarrow\; \exists \vec{w} \in \mathcal{V}$: $\vec{x} - \vec{y} = \vec{w} \in \mathcal{V}$, και άρα $\vec{x} = \vec{y} + \vec{w}$. Τότε όμως: $\vec{x} + \mathcal{V} = \vec{y} + \vec{w} + \mathcal{V}$ και άρα $\vec{x} + \mathcal{V} = \vec{y} + \mathcal{V}$, διότι σύμφωνα με την παραπανω Παρατήρηση 6.2.2, θα έχουμε $\vec{w} + \mathcal{W} = \mathcal{W}$ διότι $\vec{w} \in \mathcal{V}$. $\square$

Λήμμα 6.2.4 *Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$. Τότε τα σύμπλοκα $\vec{x} + \mathcal{V}$ και $\vec{y} + \mathcal{V}$ είτε θα ταυτίζονται ή θα είναι ξένα. Δηλαδή:*

είτε: $\vec{x} + \mathcal{V} = \vec{y} + \mathcal{V}$.

ή: $(\vec{x} + \mathcal{V}) \cap (\vec{y} + \mathcal{V}) = \emptyset$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $(\vec{x} + \mathcal{V}) \cap (\vec{y} + \mathcal{V}) \neq \emptyset$. Τότε υπάρχει $\vec{z} \in (\vec{x} + \mathcal{V}) \cap (\vec{y} + \mathcal{V})$ και επομένως από το παραπάνω Λήμμα 6.2.3 θα έχουμε:

1. $\vec{z} \in \vec{x} + \mathcal{V} \;\Rightarrow\; \vec{z} + \mathcal{V} = \vec{x} + \mathcal{V}$.

2. $\vec{z} \in \vec{y} + \mathcal{V} \;\Rightarrow\; \vec{z} + \mathcal{V} = \vec{y} + \mathcal{V}$.

Άρα $\vec{x} + \mathcal{V} = \vec{y} + \mathcal{V}$. □

Συμβολισμός 6.2.1 *Από τώρα και στο εξής ένα σύμπλοκο της μορφής $\vec{x} + \mathcal{V}$, όπου $\vec{x} \in \mathcal{E}$, θα συμβολίζεται ως εξής:*

$$[\vec{x}] := \vec{x} + \mathcal{V} = \{\vec{x} + \vec{v} \mid \vec{v} \in \mathcal{V}\}$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπανω συμβολισμό και τα Λήμματα 6.2.3 και 6.2.4, θα έχουμε ως άμεση συνέπεια το ακόλουθο

Πόρισμα 6.2.5 *Το σύνολο όλων των συμπλόκων του υπόχωρου $\mathcal{V}$ επί του χώρου $\mathcal{E}$ ορίζει μια* **διαμέριση** *του συνόλου $\mathcal{E}$, δηλαδή ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. $\mathcal{E} = \bigcup_{\vec{x} \in \mathcal{E}} [\vec{x}]$.

2. *Αν $[\vec{x}] \neq [\vec{y}]$, τότε: $[\vec{x}] \cap [\vec{y}] = \emptyset$.*

Ορισμός 6.2.6 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$. Ο* **χώρος πηλίκο** *$\mathcal{E}/\mathcal{V}$ του χώρου $\mathcal{E}$ ως προς τον υπόχωρο $\mathcal{V}$ ορίζεται να είναι το σύνολο όλων των συμπλόκων του $\mathcal{V}$ επί του $\mathcal{E}$:*

$$\mathcal{E}/\mathcal{V} := \{[\vec{x}] \subseteq \mathcal{E} \mid \vec{x} \in \mathcal{E}\}$$

Βασικός σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι ο χώρος πηλίκο $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$, καθώς και να αναλύσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες του. Πρίν περάσουμε όμως σ' αυτήν την ανάλυση θα δούμε μια διαφορετική, αλλά ισοδύναμη, προσέγγιση στον ορισμό του χώρου πηλίκο.

Παρατήρηση 6.2.7 *Διατηρώντας τις παραπάνω υποθέσεις και συμβολισμούς, ορίζουμε στο σύνολο $\mathcal{E}$ μια σχέση $\mathcal{R}_{\mathcal{V}}$ ως εξής:*

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}: \ \ \vec{x} \equiv \vec{y}(\mathcal{R}_{\mathcal{V}}) \iff \vec{x} - \vec{y} \in \mathcal{V}$$

Ισχυρισμός: *Η σχέση $\mathcal{R}_{\mathcal{V}}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathcal{E}$ και οι κλάσεις ισοδυναμίας της $\mathcal{R}_{\mathcal{V}}$ συμπίπτουν με τα σύμπλοκα του υπόχωρου $\mathcal{V}$ επί του χώρου $\mathcal{E}$.*

Πραγματικά χρησιμοποιώντας τον ορισμό της σχέσης $\mathcal{R}_{\mathcal{V}}$ και το γεγονός ότι ο $\mathcal{V}$ ειναι υπόχωρος, θα έχουμε:

Ανακλαστική Ιδιότητα: $\vec{x} \equiv \vec{x}(\mathcal{R}_{\mathcal{V}})$ *διότι* $\vec{x} - \vec{x} = \vec{0} \in \mathcal{V}$.

Συμμετρική Ιδιότητα: *Άν* $\vec{x} \equiv \vec{y}(\mathcal{R}_{\mathcal{V}})$, *τότε* $\vec{x} - \vec{y} \in \mathcal{V} \Rightarrow \ \vec{y} - \vec{x} \in \mathcal{V}$ *και άρα* $\vec{y} \equiv \vec{x}(\mathcal{R}_{\mathcal{V}})$.

Μεταβατική Ιδιότητα: *Άν* $\vec{x} \equiv \vec{y}(\mathcal{R}_{\mathcal{V}})$ *και* $\vec{y} \equiv \vec{z}(\mathcal{R}_{\mathcal{V}})$, *τότε* $\vec{x} - \vec{y} \in \mathcal{V}$ *και* $\vec{y} - \vec{z} \in \mathcal{V}$. *Τοτε όμως* $(\vec{x} - \vec{y}) + (\vec{y} - \vec{z}) = \vec{x} - \vec{z} \in \mathcal{V}$ *και επομένως:* $\vec{x} \equiv \vec{z}(\mathcal{R}_{\mathcal{V}})$.

Ορίζουμε πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού στον χώρο πηλίκο $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ ως εξής:

Πρόσθεση: Αν $[\vec{x}], [\vec{y}] \in \mathcal{E}/\mathcal{V}$, τότε ορίζουμε το άθροισμα $[\vec{x}] + [\vec{y}]$ των $[\vec{x}]$ και $[\vec{y}]$ να είναι το σύμπλοκο:

$$[\vec{x}] + [\vec{y}] := [\vec{x} + \vec{y}]$$

Η παραπάνω πράξη είναι καλά ορισμένη διότι αν επίσης έχουμε $[\vec{x}] = [\vec{x}']$ και $[\vec{y}] = [\vec{y}']$, τότε $\vec{x} + \mathcal{V} = \vec{x}' + \mathcal{V}$ και $\vec{y} + \mathcal{V} = \vec{y}' + \mathcal{V}$. Επομένως $\vec{x} - \vec{x}' \in \mathcal{V}$ και $\vec{y} - \vec{y}' \in \mathcal{V}$ και άρα $(\vec{x} + \vec{y}) - (\vec{x}' + \vec{y}') \in \mathcal{V}$ το οποιο σημαίνει ότι $(\vec{x} + \vec{y}) + \mathcal{V} = (\vec{x}' + \vec{y}') + \mathcal{V}$, δηλαδή $[\vec{x} + \vec{y}] = [\vec{x}' + \vec{y}']$.

Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός: Αν $[\vec{x}] \in \mathcal{E}/\mathcal{V}$ και $k \in \mathbb{K}$, τότε ορίζουμε τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό $k[\vec{x}]$ του συμπλόκου $[\vec{x}]$ με τον αριθμό k να είναι το σύμπλοκο:

$$k[\vec{x}] := [k\vec{x}]$$

Η παραπάνω πράξη είναι καλά ορισμένη διότι αν επίσης έχουμε $[\vec{x}] = [\vec{x}']$, τότε $\vec{x} + \mathcal{V} = \vec{x}' + \mathcal{V}$ και άρα $\vec{x} - \vec{x}' \in \mathcal{V}$. Επομένως $k(\vec{x} - \vec{x}') \in \mathcal{V} \ \Rightarrow \ k\vec{x} - \lambda\vec{x}' \in \mathcal{V}$ το οποίο σημαίνει ότι $(k\vec{x}) + \mathcal{V} = (k\vec{x}') + \mathcal{V}$ δηλαδή: $[k\vec{x}] = [k\vec{x}']$.

Θεώρημα 6.2.8 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ και έστω $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$. Τότε το σύνολο $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ των συμπλόκων του $\mathcal{V}$ επί του $\mathcal{E}$, εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού, είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι εύκολη και αφήνεται ώς ΑΣΚΗΣΗ στον αναγνώστη. Σημειώνουμε μόνο τα εξής: Το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{V}}$ του $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ είναι το σύμπλοκο $\mathcal{V}$, δηλαδή: $\vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{V}} = [\vec{0}] = \vec{0} + \mathcal{V} = \mathcal{V}$. Επίσης αν $[\vec{x}] \in \mathcal{E}/\mathcal{V}$, τότε το αντίθετο του $[\vec{x}]$ είναι το σύμπλοκο $[-\vec{x}]$. □

Θα δούμε τώρα ότι ο χώρος $\mathcal{E}$ και ο χώρος πηλίκο $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ ως προς έναν υπόχωρο $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$ συνδέονται μέσω μιας γραμμικής απεικόνισης η οποία έχει σημαντικές ιδιότητες.

Ορίζουμε μια απεικόνιση ως εξής:

$$\pi_{\mathcal{V}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{V}, \ \ \vec{x} \mapsto \pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = [\vec{x}]$$

Ορισμός 6.2.9 *Η απεικόνιση $\pi_{\mathcal{V}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{V}$ καλείται η* **κανονική προβολή** *του χώρου $\mathcal{E}$ στον χώρο πηλίκο $\mathcal{E}/\mathcal{V}$. Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης γράφουμε απλά π αντί για $\pi_{\mathcal{V}}$.*

Θεώρημα 6.2.10 *1. Η απεικόνιση $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{V}$ είναι ένας επιμορφισμός με πυρήνα τον υπόχωρο $\mathcal{V}$: $\mathrm{Ker}(\pi) = \mathcal{V}$.*

2. Αν ο χώρος $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε και ο χώρος $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ έχει πεπερασμένη διάσταση και επιπλέον:

$$\boxed{\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}/\mathcal{V} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} - \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}}$$

Απόδειξη: 1. Προφανώς η απεικόνιση π προφανώς είναι καλά ορισμένη. Επίσης από την κατασκευή της η π είναι απεικόνιση επί. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι η π είναι γραμμική. Έστω $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathcal{E}$ και $k \in \mathbb{K}$. Τότε απο τον ορισμό της πρόσθεσης θα έχουμε: $\pi(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = [\vec{x}_1 + \vec{x}_2] = [\vec{x}_1] + [\vec{x}_2] = \pi(\vec{x}_1) + \pi(\vec{x}_2)$. Επίσης από τον ορισμό του βαθμωτού πολλαπλασιασμού θα έχουμε: $\pi(k\vec{x}_1) = [k\vec{x}_1] = k[\vec{x}_1] = k\pi(\vec{x}_1)$. Συμπεραίνουμε ότι η π είναι γραμμική και άρα επιμορφισμός διότι είναι επί.

2. Έστω $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$ και έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια βάση του $\mathcal{E}$. Έστω $[\vec{x}] \in \mathcal{E}/\mathcal{V}$ ένα τυχόν διάνυσμα του $\mathcal{E}/\mathcal{V}$. Επειδή $\vec{x} = k_1\vec{e}_1 + \cdots + k_n\vec{e}_n$, για κάποια μοναδικά $k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{K}$, θα έχουμε: $[\vec{x}] = [k_1\vec{e}_1 + \cdots + k_n\vec{e}_n] = k_1[\vec{e}_1] + \cdots + k_n[\vec{e}_n]$. Συμεραίνουμε ότι το σύνολο $\mathcal{C} = \{[\vec{e}_1], \cdots, [\vec{e}_n]\}$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων του διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ και άρα από το Πόρισμα 4.3.2 έπεται ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}/\mathcal{V} < \infty$. Επομένως μπορούμε να

εφαρμόσουμε την Θεμελιώδη Εξίσωση Διαστάσεων, βλέπε Θεώρημα 5.4.2, για την γραμμική απεικόνιση $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{V}$:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(\pi) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(\pi) \tag{1}$$

Επειδή η π είναι επιμορφισμός θα έχουμε $\mathrm{Im}(\pi) = \mathcal{E}/\mathcal{V}$ και άρα: $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(\pi) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}/\mathcal{V}$, δηλαδή

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(\pi) + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}/\mathcal{V} \tag{2}$$

Μένει να προσδιορίσουμε τον πυρήνα της π. Θα έχουμε

$$\mathrm{Ker}(\pi) = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \pi(\vec{x}) = [\vec{x}] = [\vec{0}] = \mathcal{V}\} = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \vec{x} \in \mathcal{V}\} = \mathcal{V}$$

Επομένως θα έχουμε $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(\pi) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$, και άρα από την σχέση (2) θα έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}/\mathcal{V} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} - \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$$

□

Πόρισμα 6.2.11 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ και έστω $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$. Τότε η απεικόνιση συνόλων*

$$\Pi : \big\{\text{υπόχωροι } \mathcal{W} \text{ του } \mathcal{E} \text{ έτσι ώστε } \mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}\big\} \longrightarrow \big\{\text{υπόχωροι } \mathcal{G} \text{ του } \mathcal{E}/\mathcal{V}\big\}$$

η οποία ορίζεται ως $\Pi(\mathcal{W}) := \pi(\mathcal{W}) = \mathcal{V}/\mathcal{W}$ είναι 1-1 και επί. Η αντίστροφη της Π είναι η απεικόνιση $\Pi^{-1}(\mathcal{G}) := \pi^{-1}(\mathcal{G})$.

Ιδιαίτερα κάθε υπόχωρος του $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ είναι της μορφής $\mathcal{W}/\mathcal{V}$, όπου $\mathcal{W}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$ με $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι άμεση απόρροια της Πρότασης 5.2.5, διότι η απεικόνιση $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{V}$ είναι επιμορφισμός. □

Άσκηση 6.2.2 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.*

1. *Δείξτε ότι: $\mathcal{E}/\{\vec{0}\} \cong \mathcal{E}$.*

2. *Δείξτε ότι: $\mathcal{E}/\mathcal{E} \cong \{\vec{0}\}$.*

Θα κλείσουμε την παρούσα ενότητα με κάποιες σημαντικές ιδιότητες γραμμικών απεικονίσεων οι οποίες σχετίζονται με την θεωρία των χώρων πηλίκο.

Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε όπως έχουμε δει η εικόνα $\mathrm{Im}(f)$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{F}$. Συμβολίζουμε με $\mu : \mathrm{Im}(f) \rightarrowtail \mathcal{F}$ την κανονική έγκλειση συνόλων $\mu(\vec{y}) = \vec{y}$, $\forall \vec{y} \in \mathrm{Im}(f)$ η οποία είναι προφανώς ένας μονομορφισμός. Επιπρόσθετα ορίζεται και η γραμμική απεικόνιση $\varepsilon : \mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(f)$, όπου $\varepsilon(\vec{x}) = f(\vec{x})$.[1] Προφανώς η ε είναι ένας επιμορφισμός και η γραμμική απεικόνιση f είναι σύνθεση των ε και μ, δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα γραμμικών απεικονίσεων είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathrm{Im}(f) \arrow[dl, "\mu"] \\ & \mathcal{F} & \end{tikzcd} \qquad f = \mu \circ \varepsilon$$

Η παραπάνω ανάλυση της γραμμικής απεικόνισης f ως σύνθεση ενός μονομορφισμού και ενός επιμορφισμού, καλείται **κανονική ανάλυση** της f.

Από την άλλη πλευρά γνωρίζουμε ότι ο πυρήνας $\mathrm{Ker}(f)$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$, και επομένως ορίζεται ο χώρος πηλίκο $\mathcal{E}/\mathrm{Ker}(f)$. Θα δούμε τώρα μια σημαντική ιδιότητα του χώρου $\mathcal{E}/\mathrm{Ker}(f)$.

Πρόταση 6.2.12 *Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$ ο οποίος περιέχεται στον πυρήνα της f: $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f^* : \mathcal{E}/\mathcal{V} \to \mathcal{F}$ έτσι ώστε $f = f^* \circ \pi_{\mathcal{V}}$, όπου $\pi_{\mathcal{V}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{V}$ είναι η κανονική προβολή. Με άλλα λόγια το ακόλουθο διάγραμμα γραμμικών απεικονίσεων είναι αντιμεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[rr, "\pi_{\mathcal{V}}"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathcal{E}/\mathcal{V} \arrow[dl, "\exists!\, f^*"] \\ & \mathcal{F} & \end{tikzcd} \qquad f = f^* \circ \pi_{\mathcal{V}}$$

Ιδιαίτερα μπορούμε να διαλέξουμε $\mathcal{V} = \mathrm{Ker}(f)$.

Απόδειξη: Ορίζουμε μια απεικόνιση ως εξής:

$$f^* : \mathcal{E}/\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{F}, \; f^*([\vec{x}]) := f(\vec{x})$$

1. Δείχνουμε ότι η f^* είναι καλά ορισμένη. Αν $[\vec{x}_1] = [\vec{x}_2]$, τότε $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in \mathcal{V}$. Επειδή $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, έπεται ότι $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in \mathrm{Ker}(f)$ και άρα $f(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \vec{0}$, ή ισοδύναμα $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2)$. Τότε όμως εξ' ορισμού $f^*([\vec{x}_1]) = f^*([\vec{x}_2])$ και άρα η f^* είναι καλά ορισμένη.

2. Δείχνουμε ότι η f^* είναι γραμμική και ικανοποιεί την ζητούμενη σχέση $f = f^* \circ \pi_{\mathcal{V}}$. Έστω $[\vec{x}_1], [\vec{x}_2] \in \mathcal{E}/\mathcal{V}$ και έστω $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$. Τότε από τον

[1] Οι απεικονίσεις $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ και $\varepsilon : \mathcal{E} \to \mathrm{Im}(f)$ αν και έχουν τον ίδιο τύπο ορισμού, είναι διαφορετικές διότι γενικά $\mathcal{F} \neq \mathrm{Im}(f)$.

ορισμό της f και την γραμμικότητα της f, θα έχουμε: $f^*(k_1[\vec{x}_1] + k_2[\vec{x}_2]) = f^*([k_1\vec{x}_1] + [k_2\vec{x}_2]) = f^*([k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2]) = f([k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2]) = k_1 f(\vec{x}_1) + k_2 f(\vec{x}_{2]}) = k_1 f^*([\vec{x}_1]) + k_2 f^*([\vec{x}_2])$. Συμπεραίνουμε ότι η f^* είναι γραμμική. Επίσης για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{E}$ θα έχουμε $(f^* \circ \pi_{\mathcal{V}})(\vec{x}) = f^*(\pi_{\mathcal{V}}(\vec{x})) = f^*([\vec{x}]) = f(\vec{x})$. Επομένως $f = f^* \circ \pi_{\mathcal{V}}$.

3. Τέλος δείχνουμε ότι η f^* είναι η μοναδική γραμμική απεικόνιση $\mathcal{E}/\mathcal{V} \to \mathcal{F}$ έτσι ώστε $f = f^* \circ \pi_{\mathcal{V}}$. Αν $g : \mathcal{E}/\mathcal{V} \to \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε να ισχύει $f = g \circ \pi_{\mathcal{V}}$, τότε για κάθε διάνυσμα $[\vec{x}] \in \mathcal{E}/\mathcal{V}$, χρησιμοποιώντας ότι $\pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = [\vec{x}]$ θα έχουμε $g([\vec{x}]) = g(\pi_{\mathcal{V}}(\vec{x})) = (g \circ \pi_{\mathcal{V}})(\vec{x}) = f(\vec{x}) = f^*([\vec{x}])$. Επειδή αυτή η σχέση ισχύει για κάθε $[\vec{x}] \in \mathcal{E}/\mathcal{V}$, έπεται ότι $g = f^*$ και άρα η f^* είναι μοναδική. □

Άσκηση 6.2.3 *Να εξετασθεί αν ισχύει το αντίστροφο της Πρότασης 6.2.12. Δηλαδή αν $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$, και $f^* : \mathcal{E}/\mathcal{V} \to \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε $f = f^* \circ \pi_{\mathcal{V}}$, να εξετασθεί αν ισχύει ότι $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.*

Το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα είναι γνωστό ως ΠΡΩΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΣΟΜΟΡΦΙΣΜΟΥ για διανυσματικούς χώρους.

Θεώρημα 6.2.13 *Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση.*

1. *Η f επάγει έναν ισομορφισμό $f^\dagger$ του χώρου πηλίκο $\mathcal{E}/\mathrm{Ker}(f)$ με τον υπόχωρο $\mathrm{Im}(f)$ του $\mathcal{F}$:*

$$f^\dagger : \mathcal{E}/\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Im}(f), \ [\vec{x}] \mapsto f^\dagger([\vec{x}]) := f(\vec{x})$$

2. *Η γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ γράφεται ως σύνθεση $\mu \circ f^\dagger \circ \pi_{\mathrm{Ker}(f)}$ του επιμορφισμού $\pi_{\mathrm{Ker}(f)} : \mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{E}/\mathrm{Ker}(f)$, του ισομορφισμού $f^\dagger : \mathcal{E}/\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Im}(f)$, και του μονομορφισμού $\mu : \mathrm{Im}(f) \rightarrowtail \mathcal{F}$. Δηλαδή $f = \mu \circ f^\dagger \circ \pi_{\mathrm{Ker}(f)}$ είναι η σύνθεση:*

$$\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F} = \mathcal{E} \xrightarrow{\pi_{\mathrm{Ker}(f)}} \mathcal{E}/\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{f^\dagger} \mathrm{Im}(f) \xrightarrow{\mu} \mathcal{F}$$

Απόδειξη: 1. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $f^* : \mathcal{E}/\mathrm{Ker}(f) \to \mathcal{F}$ της Πρότασης 6.2.12, όπου $f^*([\vec{x}]) = f(\vec{x})$, και έστω

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}/\mathrm{Ker}(f) \arrow[rr, "f^\dagger"] \arrow[dr, "f^*"'] & & \mathrm{Im}(f) \arrow[dl, "\mu"] \\
& \mathcal{F} &
\end{tikzcd} \qquad f^* = \mu \circ f^\dagger$$

η κανονική ανάλυση της f^*. Θα δείξουμε ότι η $f^\dagger$ είναι ισομορφισμός. Εκ' κατασκευής η $f^\dagger$, δίνεται από τον τύπο $f^\dagger([\vec{x}]) = f(\vec{x})$, είναι επιμορφισμός και ισχύει $f^* = \mu \circ f^\dagger$, βλέπε την συζήτηση πρίν από την Πρόταση 6.2.12. Επομένως αρκεί να δείξουμε η $f^\dagger$ είναι μονομορφισμός. Έστω $[\vec{x}] \in \operatorname{Ker}(f^\dagger)$. Τότε $f^\dagger([\vec{x}]) = 0$ και επομένως $f(\vec{x}) = \vec{0}$, δηλαδή $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f)$. Αυτό βέβαια σημαίνει ότι $[\vec{x}] = [\operatorname{Ker}(f)] = \vec{0}_{\mathcal{E}/\operatorname{Ker}(f)}$, δηλαδή το διάνυσμα $[\vec{x}]$ είναι το μηδενικό διάνυσμα του χώρου $\mathcal{E}/\operatorname{Ker}(f)$. Αντίστροφα αν $[\vec{x}] = [\operatorname{Ker}(f)] = \vec{0}_{\mathcal{E}/\operatorname{Ker}(f)}$, δηλαδή $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f)$, τότε $f^\dagger([\vec{x}]) = f(\vec{x}) = \vec{0}$. Συμπεραίνουμε ότι $\operatorname{Ker}(f^\dagger) = \{[\operatorname{Ker}(f)]\} = \{\vec{0}_{\mathcal{E}/\operatorname{Ker}(f)}\}$ και άρα η $f^\dagger$ είναι μονομορφισμός. Επομένως η $f^\dagger$ είναι ισομορφισμός.

2. Έχουμε ήδη δείξει ότι η απεικόνιση $\mu : \operatorname{Im}(f) \to \mathcal{F}$ είναι μονομορφισμός, η απεικόνιση $f^\dagger : \mathcal{E}/\operatorname{Ker}(f) \to \operatorname{Im}(f)$ είναι ισομορφισμός, και η απεικόνιση $\pi_{\operatorname{Ker}(f)} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\operatorname{Ker}(f)$ είναι επιμορφισμός. Επιπλέον για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$, θα έχουμε: $(\mu \circ f^\dagger \circ \pi_{\operatorname{Ker}(f)})(\vec{x}))) = \mu(f^\dagger(\pi_{\operatorname{Ker}(f)}(\vec{x})) = \mu(f^\dagger([\vec{x}]) = \mu(f(\vec{x})) = f(\vec{x})$. Επειδή οι απεικονίσεις f, $\mu \circ f^\dagger \circ \pi_{\operatorname{Ker}(f)} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ παίρνουν τις ίδιες τιμές, έπεται ότι $f = \mu \circ f^\dagger \circ \pi_{\operatorname{Ker}(f)}$. □

Το ακόλουθο είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 6.2.13.

Πόρισμα 6.2.14 *Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν η f είναι επιμορφισμός, τότε η f ορίζει έναν ισομορφισμό:*

$$\widetilde{f} : \mathcal{E}/\operatorname{Ker}(f) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}, \quad [\vec{x}] \longmapsto \widetilde{f}([\vec{x}]) := f(\vec{x})$$

Πρόταση 6.2.15 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ δύο υπόχωροι του $\mathcal{E}$.*

1. *Η απεικόνιση*

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}/\mathcal{V} \times \mathcal{E}/\mathcal{W}, \ \vec{x} \longmapsto f(\vec{x}) := \big(\pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}), \pi_{\mathcal{W}}(\vec{x})\big)$$

είναι μια γραμμική απεικόνιση με πυρήνα τον υπόχωρο $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$:

$$\operatorname{Ker}(f) = \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$$

2. *Αν $\mathcal{V} + \mathcal{W} = \mathcal{E}$, τότε η απεικόνιση f είναι επιμορφισμός και επάγει έναν ισομορφισμό:*

$$\widetilde{f} : \mathcal{E}/\mathcal{V} \cap \mathcal{W} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}/\mathcal{V} \times \mathcal{E}/\mathcal{W}, \ \vec{x} \longmapsto f([\vec{x}]) := \big(\pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}), \pi_{\mathcal{W}}(\vec{x})\big)$$

3. *Αν $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W} = \mathcal{E}$, τότε η απεικόνιση f είναι ισομορφισμός:*

$$f : \mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}/\mathcal{V} \times \mathcal{E}/\mathcal{W}, \ \vec{x} \longmapsto f(\vec{x}) := (\pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}), \pi_{\mathcal{W}}(\vec{x}))$$

Απόδειξη: 1. Η απόδειξη ότι η f είναι γραμμική είναι άμεση απόρροια των ορισμών και αφήνεται ως Άσκηση στον αναγνώστη. Δείχνουμε ότι $\mathrm{Ker}(f) = \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. Αν $\vec{x} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$, τότε επειδή από το Θεώρημα 6.2.10 έπεται ότι $\mathrm{Ker}(\pi_{\mathcal{V}}) = \mathcal{V}$ και $\mathrm{Ker}(\pi_{\mathcal{W}}) = \mathcal{W}$, θα έχουμε $\pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{V}}$ και $\pi_{\mathcal{W}}(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{W}}$. Επομένως $f(\vec{x}) = (\vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{V}}, \vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{W}})$ το οποίο, όπως έχουμε δει στο Κεφάλαιο 1, είναι το μηδενικό διάνυσμα του διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}/\mathcal{V} \times \mathcal{E}/\mathcal{W}$. Άρα $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. Αντίστροφα αν $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$, τότε $(\pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}), \pi_{\mathcal{W}}(\vec{x})) = (\vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{V}}, \vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{W}})$ και άρα: $\pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{V}}$ και $\pi_{\mathcal{W}}(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{W}}$. Οι τελευταίες σχέσεις είναι φυσικά ισοδύναμες με τις ακόλουθες σχέσεις $\vec{x} \in \mathcal{V}$ και $\vec{x} \in \mathcal{W}$. Άρα $\vec{x} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ και επομένως $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. Συνοψίζοντας θα έχουμε την ζητούμενη σχέση: $\mathrm{Ker}(f) = \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$.

2. Σύμφωνα με το Πόρισμα 6.2.14 αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι επιμορφισμός. Έστω $([\vec{y}], [\vec{z}]) \in \mathcal{E}/\mathcal{V} \times \mathcal{E}/\mathcal{W}$. Τότε $\vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{E}$ και άρα από την υπόθεση $\mathcal{E} = \mathcal{V} + \mathcal{W}$, θα έχουμε: $\vec{y} = \vec{v}_1 + \vec{w}_1$ και $\vec{z} = \vec{v}_2 + \vec{w}_2$, όπου $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{V}$ και $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \mathcal{W}$. Τότε στον χώρο $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ θα έχουμε $[\vec{y}] = [\vec{v}_1 + \vec{w}_1] = [\vec{v}_1] + [\vec{w}_1] = [\vec{w}_1]$ διότι $[\vec{v}_1] = \vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{V}}$ καθώς $\vec{v}_1 \in \mathcal{V}$. Παρόμοια στον χώρο $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ θα έχουμε $[\vec{z}] = [\vec{v}_2 + \vec{w}_2] = [\vec{v}_2] + [\vec{w}_2] = [\vec{v}_2]$ διότι $[\vec{w}_2] = \vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{W}}$ καθώς $\vec{w}_2 \in \mathcal{W}$. Επομένως $([\vec{y}], [\vec{z}]) = ([\vec{w}_1], [\vec{v}_2])$. Θέτοντας $\vec{x} = \vec{w}_1 + \vec{v}_2$, θα έχουμε εκ' κατασκευής $f(\vec{x}) = ([\vec{x}], [\vec{x}]) = ([\vec{w}_1 + \vec{v}_2], [\vec{w}_1 + \vec{v}_2]) = ([\vec{w}_1] + [\vec{v}_2], [\vec{w}_1] + [\vec{v}_2])$. Όμως $[\vec{w}_1 + \vec{v}_2] = [\vec{w}_1] + [\vec{v}_2] = [\vec{w}_1]$ στον χώρο $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ διότι $[\vec{v}_2] = \vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{V}}$ καθώς $\vec{v}_2 \in \mathcal{V}$. Παρόμοια $[\vec{w}_1] + [\vec{v}_2] = [\vec{w}_1] + [\vec{v}_2] = [\vec{v}_2]$ στον χώρο $\mathcal{E}/\mathcal{W}$ διότι $[\vec{w}_1] = \vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{W}}$ καθώς $\vec{w}_1 \in \mathcal{W}$. Επομένως $f(\vec{x}) = ([\vec{x}], [\vec{x}]) = ([\vec{w}_1], [\vec{v}_2]) = ([\vec{y}], [\vec{z}])$ και άρα η f είναι επιμορφισμός.

3. Αν $\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, τότε $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\vec{0}\}$ και $\mathcal{E} = \mathcal{V} + \mathcal{W}$. Επομένως σύμφωνα με το 2. και το γεγονός ότι $\mathcal{E}/\{\vec{0}\} \cong \mathcal{E}$, θα έχουμε ότι η f είναι ισομορφισμός. □

Άσκηση 6.2.4 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ δύο υπόχωροι του $\mathcal{E}$. Να δείξετε ότι αν $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W} = \mathcal{E}$, τότε:*

$$\mathcal{E}/\mathcal{V} \ \cong \ \mathcal{W} \quad \text{και} \quad \mathcal{E}/\mathcal{W} \ \cong \ \mathcal{V}$$

Υπόδειξη: *Δείξτε ότι οι απεικόνισεις*

$$f : \mathcal{E}/\mathcal{V} \to \mathcal{W}, \ [\vec{x}] \ \mapsto \ f([\vec{x}]) = \vec{x} \quad \text{και} \quad g : \mathcal{E}/\mathcal{W} \to \mathcal{V}, \ [\vec{x}] \ \mapsto \ g([\vec{x}]) = \vec{x}$$

είναι καλά ορισμένες και επιπλέον είναι ισομορφισμοί.

Κλείνουμε το παρόν Κεφάλαιο με το ακόλουθο αποτέλεσμα, γνωστό ως Τρίτο Θεώρημα Ισομορφισμού για διανυσματικούς χώρους.

Θεώρημα 6.2.16 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ δύο υπόχωροι του $\mathcal{E}$, έτσι ώστε: $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$. Τότε ο χώρος πηλίκο $\mathcal{W}/\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του χώρου πηλίκο $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ και υπάρχει ένας ισομορφισμός:*

$$\mathcal{E}/\mathcal{V}/\mathcal{W}/\mathcal{V} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}/\mathcal{W}$$

Απόδειξη: Είναι εύκολο να δειχθεί (δείξτε το σαν Ασκηση) ότι ο χώρος πηλίκο $\mathcal{W}/\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}/\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του χώρου πηλίκο $\mathcal{E}/\mathcal{V}$. Θεωρούμε την κανονική προβολή

$$\pi_{\mathcal{W}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}/\mathcal{W}, \ \vec{x} \longmapsto f(\vec{x}) = [\vec{x}]$$

η οποία γνωρίζουμε ότι είναι επιμορφισμός με πυρήνα $\mathrm{Ker}(\pi_{\mathcal{W}}) = \mathcal{W}$. Επειδή $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$, από την Πρόταση 6.2.12, έπεται ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\pi^*_{\mathcal{V}} : \mathcal{E}/\mathcal{V} \to \mathcal{E}/\mathcal{W}$ έτσι ώστε: $\pi^*_{\mathcal{V}} \circ \pi_{\mathcal{V}} = \pi_{\mathcal{W}}$. Επειδή η $\pi_{\mathcal{W}}$ είναι επιμορφισμός, έπεται άμεσα ότι και η $\pi^*_{\mathcal{V}}$ είναι επιμορφισμός. Από την Πρόταση 6.2.12 η απεικόνιση $\pi^*_{\mathcal{V}}$ ορίζεται ως εξής: $\pi^*_{\mathcal{V}}([\vec{x}]) = \pi_{\mathcal{W}}(\vec{x}) = [\vec{x}]$, δηλαδή η $\pi^*_{\mathcal{V}}$ στέλνει σύμπλοκα του $\mathcal{E}$ ως προς τον υπόχωρο $\mathcal{V}$ σε σύμπλοκα του $\mathcal{E}$ ως προς τον υπόχωρο $\mathcal{W}$. Σύμφωνα με το Πόρισμα 6.2.14 αρκεί να δείξουμε ότι $\mathrm{Ker}(\pi^*_{\mathcal{V}}) = \mathcal{W}/\mathcal{V}$. Έστω $[\vec{x}] \in \mathcal{W}/\mathcal{V}$, δηλαδή $[\vec{x}] \in \mathcal{E}/\mathcal{V}$ με $\vec{x} \in \mathcal{W}$. Τότε $\pi^*_{\mathcal{V}}([\vec{x}]) = [\vec{x}] = \vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{W}}$ διότι $\vec{x} \in \mathcal{W}$. Άρα $\mathcal{W}/\mathcal{V} \subseteq \mathrm{Ker}(\pi^*_{\mathcal{V}})$. Αντίστροφα αν $[\vec{x}] \in \mathrm{Ker}(\pi^*_{\mathcal{V}})$, τότε $\pi^*_{\mathcal{V}}([\vec{x}]) = [\vec{x}] = \vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{W}}$ και αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν $\vec{x} \in \mathcal{W}$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $[\vec{x}] \in \mathcal{W}/\mathcal{V}$ και επομένως $\mathrm{Ker}(\pi^*_{\mathcal{V}}) \subseteq \mathcal{W}/\mathcal{V}$. Έτσι τελικά θα έχουμε $\mathrm{Ker}(\pi^*_{\mathcal{V}}) = \mathcal{W}/\mathcal{V}$ και το Πόρισμα 6.2.14 ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Η ακόλουθη Άσκηση περιγράφει ένα αποτέλεσμα το οποίο είναι γνωστό ως Δευτερο Θεώρημα Ισομορφισμού για διανυσματικούς χώρους.

Άσκηση 6.2.5 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ δύο υπόχωροι του $\mathcal{E}$. Τότε ο $\mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V} + \mathcal{W}$, ο $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V}$ και υπάρχει ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων:*

$$\mathcal{V} + \mathcal{W}/\mathcal{W} \xrightarrow{\cong} \mathcal{V}/\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$$

6.3 Ασκήσεις

Άσκηση 6.3.1 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$.*

1.

2.

Κεφάλαιο 7

Πινακες και Γραμμικες Απεικονισεις

Στα προηγούμενα Κεφάλαια έχουμε ορίσει την έννοια του πίνακα, η οποία οργανώνει με εποπτικό τρόπο αρκετές πληροφορίες, και έχουμε αναπτύξει την θεωρία των γραμμικών απεικονίσεων. Στο παρόν Κεφάλαιο θα μελετήσουμε την σχέση μεταξύ γραμμικών απεικονίσεων μεταξύ διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ και πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{K}$. Θα δούμε ιδιαίτερα ότι σ' αυτό το πλαίσιο η θεωρία πινάκων και γραμμικών απεικονίσεων είναι ουσιαστικά ισοδύναμη. Η χρήση των γραμμικών απεικονίσεων είναι περισσότερο κατάλληλη για εξαγωγή θεωρητικών αποτελεσμάτων, και η χρήση πινάκων είναι περισσότερο κατάλληλη για υπολογισμούς και προσφέρει ικανοποιητικότερη εποπτεία.

7.1 Βασικές Ιδιότητες Πινάκων

Στην παρούσα ενότητα, αφού υπενθυμίσουμε την έννοια ενός πίνακα, θα μελετήσουμε βασικές ιδιότητες πινάκων.

Από τώρα και στο εξής σταθεροποιούμε ένα σώμα $\mathbb{K}$.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $m, n \in \mathbb{N}$ είναι δύο φυσικοί αριθμοί, τότε ένας $m \times n$ πίνακας A με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$, είναι μια διάταξη $m \cdot n$ αριθμών από το σώμα $\mathbb{K}$ της μορφής:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Στήλες Για κάθε $j = 1, 2, \cdots, n$, η j-**στήλη** του πίνακα A είναι η ακόλουθη διάταξη m αριθμών:

$$A^j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Έτσι ο $m \times n$ πίνακας A αποτελείται από n στήλες $A^1, A^2, \cdots, A^n$ κάθε μία από τις οποίες αποτελείται απο m αριθμούς.

Γραμμές Για κάθε $i = 1, 2, \cdots, m$, η j-**γραμμή** του πίνακα A είναι η ακόλουθη διάταξη m αριθμών:

$$A_i := \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

Έτσι ο $m \times n$ πίνακας A αποτελείται από m γραμμες $A_1, A_2, \cdots, A_m$ κάθε μία από τις οποίες αποτελείται απο n αριθμούς.

Παρατηρούμε ότι το στοιχείο a_{ij} του πίνακα A βρίσκεται στην "τομή" της i-γραμμής με την j-στήλη. Έτσι ορίζουμε το στοιχείο a_{ij} να είναι το στοιχείο του πίνακα στην ij-**θέση**.

Συμβολισμός 7.1.1 *Χάριν συντομίας ένας $m \times n$ πίνακας A όπως παραπάνω θα συμβολίζεται ως εξής: $A = (a_{ij})$.*

Συμβολίζουμε με $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ το σύνολο των $m \times n$-πινάκων με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) = \big\{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{K},\ \forall i = 1, 2, \cdots m,\ \forall j = 1, 2, \cdots, n\big\}$$

Υπενθυμίζουμε ότι στο σύνολο $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ έχουμε ορίσει τις ακόλουθες πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού:

1. Πρόσθεση: Αν $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, τότε $A+B$ είναι ο $m\times n$-πίνακας $(a_{ij}+b_{ij})$. Σχηματικά:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{ij} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{2j}+b_{2j} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{ij}+b_{ij} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mj}+b_{mj} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός: Αν $A=(a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, και $k \in \mathbb{K}$, τότε $k\cdot A$ είναι ο $m\times n$-πίνακας (ka_{ij}). Σχηματικά:

$$k\cdot A = k\cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{ij} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mj} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Πρόταση 7.1.1 *Το σύνολο $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ των $m\times n$-πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$ εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού, είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$. Το μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ είναι ο $m\times n$-πίνακας $\mathbf{0}$ όλα τα στοιχεία του οποίου είναι ίσα με 0:*

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Το αντίθετο διάνυσμα του $m \times n$-πίνακα $A = (a_{ij})$ είναι ο $m \times n$-πίνακας $-A = (-a_{ij})$:

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1j} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2j} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{ij} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mj} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Απόδειξη: Βλέπε το Πόρισμα **;;**. □

Θεωρούμε τους $m \cdot n$ το πλήθος πίνακες E_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, όπου ο πίνακας E_{ij} έχει στην (i, j)-θέση 1 και παντού αλλού 0. Δηλαδή:

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

όπου το 1 εμφανίζεται στην τομή της j-στήλης με την i-γραμμή.

Πρόταση 7.1.2 *Το σύνολο των $m \times n$ πινάκων*

$$\mathcal{B} := \{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, \ \ 1 \leq j \leq n\}$$

είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Επομένως

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) = m \cdot n$$

Απόδειξη:

□

Οι ακόλουθες ειδικές περιπτώσεις πινάκων θα είναι πολύ σημαντικές για τα επόμενα:

Ορισμός 7.1.3 *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και έστω $n, m \geq 1$.*

1. Ο **χώρος στηλών** *με m στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$ ορίζεται να είναι το σύνολο $\mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$ και συμβολίζεται με $\Sigma_m(\mathbb{K})$:*

$$\Sigma_m(\mathbb{K}) := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{K},\ 1 \leq i \leq m\}$$

2. Ο **χώρος γραμμών** *με n στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$ ορίζεται να είναι το σύνολο $\mathbb{M}_{1\times n}(\mathbb{K})$ και συμβολίζεται με $\Gamma_n(\mathbb{K})$:*

$$\Gamma_n(\mathbb{K}) := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_j & \cdots & x_n \end{pmatrix} \mid x_j \in \mathbb{K},\ 1 \leq j \leq n\}$$

Η επόμενη παρατήρηση προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς:

Παρατήρηση 7.1.4 *1. Ο χώρος στηλών $\Sigma_m(\mathbb{K})$είναι ισόμορφος με τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}^m$ μέσω του ισομορφισμού*

$$f : \mathbb{K}^m \to \Sigma_m(\mathbb{K}),\ \vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_j & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

2. Ο χώρος γραμμών $\Gamma_n(\mathbb{K})$ είναι ισόμορφος με τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}^n$ μέσω του ισομορφισμού

$$g : \mathbb{K}^n \to \Gamma_n(\mathbb{K}),\ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_j & \cdots & x_n \end{pmatrix} \overset{g}{\mapsto} (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Διαμέσου των ισομορφισμών f και g συνήθως ταυτίζουμε τους διανυσματικούς χώρους $\Sigma_m(\mathbb{K})$ και $\Gamma_n(\mathbb{K})$ με τους διανυσματικούς χώρους $\mathbb{K}^m$ και $\mathbb{K}^n$ αντίστοιχα.

Θα δούμε τώρα ότι σε μερικές περιπτώσεις μπορούμε να ορίσουμε μια άλλη σημαντική πράξη μεταξύ πινάκων η οποία καλείται πολλαπλασιασμός ή γινόμενο πινάκων.

Πολλαπλασιασμός Πινάκων: Έστω $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ και $B \in \mathbb{M}_{n\times r}(\mathbb{K})$. Τότε ορίζουμε το **γινόμενο** του $m \times n$ πίνακα A με τον $n \times r$ πίνακα B να είναι ο $m \times r$ πίνακας $A \cdot B$ του οποίοι το στοιχείο στην (i, j)-θέση είναι:

$$c_{ij} := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Ένας εύκολος τρόπος απομνημόνευσης του γινομένου πινάκων είναι ο εξής. Το στοιχείο c_{ij} στην (i,j)-θέση, όπου $1 \leq i \leq m$ και $1 \leq j \leq r$, του πίνακα $A \cdot B$ προκύπτει από τον ακόλουθο «πολλαπλασιασμό» της i-γραμμής A_i του πίνακα A με την j-στήλη B^j του πίνακα B:

$$c_{ij} := A_i \cdot B^j = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{ij} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Παρατήρηση 7.1.5 *Το γινόμενο $A \cdot B$ δύο πινάκων ορίζεται αν-ν ο αριθμός των στηλών του A είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του B. Έτσι αν $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ και $B \in \mathbb{M}_{k\times r}(\mathbb{K})$, τότε το γινόμενο $A \cdot B$ ορίζεται αν-ν $n = k$. Παρόμοια το γινόμενο $B\cdot A$ ορίζεται αν-ν $r = m$. Επομένως τα γινόμενα πινάκων $A \cdot B$ και $B \cdot A$ ορίζονται αν-ν $m = n = r = k$, δηλαδη αν-ν οι πίνακες A και B είναι τετραγωνικοί ίδιας τάξης.*

Υπενθυμίζουμε ότι το σύμβολο του Kronecker δ_{ij} ορίζεται ως εξής:

$$\delta_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1: & \text{αν } i = j \\ 0: & \text{αν } i \neq j \end{array} \right\}$$

Παράδειγμα 7.1.2 *Για κάθε $i, j = 1, 2, \cdots, n$, θεωρούμε τους τετραγωνικούς πίνακες $E_{ij} = (\delta_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Τότε:*

$$\boxed{E_{ij} \cdot E_{kr} = \delta_{jk} E_{ir}}$$

Πρόχειρη Δοκιμασία

Παράδειγμα 7.1.3

Παρατήρηση 7.1.6 *Αν A και B είναι δύο πίνακες έτσι ώστε τα γινόμενα $A \cdot B$ και $B \cdot A$ ορίζονται, τότε* **δεν** *είναι απαραίτητο να ισχύει ότι: $A \cdot B = B \cdot A$. Για παράδειγμα έστω οι 2×2 πίνακες πραγμαικών αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Τότε:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot A$$

Η ακόλουθη πρόταση περιγράφει τις· βασικές ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πινάκων και πως αυτή συμπεριφέρεται ως προς την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό πινάκων.

Πρόταση 7.1.7 *Έστω A, B και C τρείς πίνακες με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$, και $k \in \mathbb{K}$.*

1. Αν τα γινόμενα πινάκων $A \cdot B$ και $B \cdot C$ ορίζονται, τότε ορίζονται και τα γινόμενα πινάκων $A \cdot (B \cdot C)$ και $(A \cdot B) \cdot C$ και μάλιστα:

$$\boxed{A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C}$$

2. Αν τα γινόμενα πινάκων $A \cdot B$ και $A \cdot C$ ορίζονται, τότε ορίζεται και το γινόμενο πινάκων $A \cdot (B + C)$ και μάλιστα:

$$\boxed{A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C}$$

3. Αν τα γινόμενα πινάκων $A \cdot C$ και $B \cdot C$ ορίζονται, τότε ορίζεται και το γινόμενο πινάκων $(A + B) \cdot C$ και μάλιστα:

$$\boxed{(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C}$$

4. Αν το γινόμενο πινάκων $A \cdot B$ ορίζεται, τότε ορίζονται και τα γινόμενα πινάκων $(kA) \cdot B$, και $A \cdot (kB)$ και μάλιστα:

$$\boxed{k(A \cdot B) = (kA) \cdot B = A \cdot (kB)}$$

Απόδειξη: □

Υπενθυμίζουμε ότι, $\forall n \geq 1$, ο **μοναδιαίος** $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{K}$ είναι ο πίνακας:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Η επόμενη πρόταση περιγράφει σημαντικές ιδιότητες του μοναδιαίου πίνακα.

Πρόταση 7.1.8 *Έστω $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ και και $B \in \mathbb{M}_{n\times k}(\mathbb{K})$, δύο πίνακες Τότε:*

$$\boxed{A \cdot I_n = A \quad \text{και} \quad I_n \cdot B = B}$$

Ιδιαίτερα $C \cdot I_n = C = I_n \cdot C$, για κάθε τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα $C \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Απόδειξη: □

Ορισμός 7.1.9 *Ένας πίνακας $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ καλείται* **αντιστρέψιμος** *αν υπάρχει πίνακας $B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, έτσι ώστε να ισχύει:*

$$A \cdot B = I_n = B \cdot A$$

Τότε ο πίνακας B καλείται **αντίστροφος** *του A και συμβολίζεται με A^{-1}.*

Πρόταση 7.1.10 *1. Έστω $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Τότε ο αντίστροφος του είναι μοναδικός και είναι επίσης αντιστρέψιμος με αντίστροφο τον πίνακα A:*

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

2. Έστω $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ δύο αντιστρέψιμοι πίνακες. Τότε ο πίνακας $A \cdot B$ είναι αντιστρέψιμος και ισχυει:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Απόδειξη: □

Πρόχειρη Δοκιμασία

Έστω $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$. Να δείξετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος αν-ν $ad - bc \neq 0$. Αν αυτό ισχύει να δείξετε ότι:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

Συμβολισμός 7.1.4 *Έστω $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας. Τότε ορίζεται το γινόμενο $A \cdot A$, και επομένως, σύφωνα με την Πρόταση 7.1.7, ορίζονται και το γινόμενο $A \cdot A \cdot A \cdot \cdots \cdot A$ (k φορές, $\forall k \geq 1$), ο οποίος συμβολίζεται με A^k. Προφανώς θα έχουμε $A^k \cdot A^r = A^{k+r}$.*

Πρόχειρη Δοκιμασία

Να δείξετε ότι αν $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, τότε:

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Πρόχειρη Δοκιμασία

Να δείξετε ότι αν A είναι ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας, τότε για κάθε $k \geq 1$ ο πίνακας A^k είναι αντιστρέψιμος. Ποιός είναι ο αντίστροφος του A^k;

Θα δούμε τώρα μια κατασκευή η οποία, δοθέντος ενός $m \times n$ πίνακα, μας ορίζει έναν $n \times m$ πίνακα.

Ορισμός 7.1.11 *Έστω*

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$. Ο **ανάστροφος** *του A ορίζεται να είναι ο $n \times m$ πίνακας ${}^tA$ του οποίου οι γραμμές είναι οι στήλες του πίνακα A και οι στήλες του είναι οι γραμμές του πίνακα A:*

$${}^tA := (a_{ji}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{i2} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1j} & a_{j2} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{mj} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{n2} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$$

Η επόμενη πρόταση περιγράφει τις κυριότερες ιδιότητες της μετάβασης από έναν πίνακα στον ανάστροφο του.

Πρόταση 7.1.12 *Έστω $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ δύο $m \times n$ πίνακες και $C = (c_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times r}(\mathbb{K})$ ένας $n \times r$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Τότε για κάθε στοιχείο $k \in mbK$, ισχύουν τα εξής:*

1. ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$.

2. ${}^t(kA) = k\ {}^tA$.

3. ${}^t(A \cdot C) = {}^t = {}^tC \cdot {}^tA$.

4. ${}^t({}^tA) = A$.

5. *Αν* $D = (d_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *είναι ένας αντιστρέψιμος* $n \times n$ *πίνακας, τότε και ο ανάστροφος του* ${}^tD$ *είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:*

$$({}^tD)^{-1} = {}^t(D^{-1})$$

Απόδειξη:

□

Η παραπάνω πρόταση έχει την ακόλουθη άμεση συνέπεια:

Πόρισμα 7.1.13 *Η απεικόνιση*

$$\phi : \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{K}),\ A \longmapsto \phi(A) = {}^tA$$

είναι ένας ισομορφισμός με αντίστροφη την απεικόνιση

$$\psi : \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ A \longmapsto \phi(A) = {}^tA$$

Επιπλέον αν $m = n$ *(οπότε οι εμπλεκόμενοι πίνακες είναι τετραγωνικοί και* $\phi = \psi$*), τότε η απεικόνιση* ϕ *στέλνει αντιστρέψιμους πίνακες σε αντιστρέψιμους πίνακες και ισχύει:* $\phi^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})}$.

7.2 Ο Πίνακας μιας Γραμμικής Απεικόνισης

Στην παρούσα ενότητα θα αντιστοιχίσουμε σε κάθε γραμμική απεικόνιση μεταξύ διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης έναν πίνακα ο οποίος εμπεριέχει όλες τις ιδιότητες της γραμμικής απεικόνισης. Επιπρόσθετα θα δείξουμε ότι αυτή η αντιστοιχία είναι 1-1 και επί.

Από τώρα και στο εξής θεωρούμε δύο διανυσματικούς χώρους $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και μια γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$$

Επιπρόσθετα υποθέτουμε ότι:

1. $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$ και έστω $\mathcal{B}_{\mathcal{E}} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια βάση του $\mathcal{E}$.

2. $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = m$ και έστω $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_m\}$ μια βάση του $\mathcal{F}$.

Θεωρούμε τις εικόνες $f(\vec{e}_i)$, $1 \leq i \leq n$, των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ διαμέσου της απεικόνισης f. Επειδή τα διανύσματα $f(\vec{e}_i)$, $1 \leq i \leq n$ ανήκουν στον διανυσματικό χώρο $\mathcal{F}$ και το σύνολο $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_m\}$ μια βάση του $\mathcal{F}$, έπεται ότι κάθε ένα από τα $f(\vec{e}_i)$ θα γράφεται μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$. Επομένως θα έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned}
f(\vec{e}_1) &= a_{11}\vec{\epsilon}_1 + a_{21}\vec{\epsilon}_2 + \cdots + a_{i1}\vec{\epsilon}_i + \cdots + a_{m1}\vec{\epsilon}_m \\
f(\vec{e}_2) &= a_{12}\vec{\epsilon}_1 + a_{22}\vec{\epsilon}_2 + \cdots + a_{i2}\vec{\epsilon}_i + \cdots a_{m2}\vec{\epsilon}_m \\
&\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
f(\vec{e}_j) &= a_{1j}\vec{\epsilon}_1 + a_{2j}\vec{\epsilon}_2 + \cdots + a_{ij}\vec{\epsilon}_i + \cdots + a_{mj}\vec{\epsilon}_m \\
&\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
f(\vec{e}_n) &= a_{1n}\vec{\epsilon}_1 + a_{2n}\vec{\epsilon}_2 + \cdots + a_{in}\vec{\epsilon}_i + \cdots + a_{mn}\vec{\epsilon}_m
\end{aligned}$$

Οι παραπάνω σχέσεις γράφονται συνεπτυγμένα ως εξής:

$$\forall j = 1, 2, \cdots, m: \quad f(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{\epsilon}_i \qquad (*)$$

Ορισμός 7.2.1 *Ο* **πίνακας της** $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ *ως προς τις βάσεις* $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ *και* $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ *των* $\mathcal{E}$ *και* $\mathcal{F}$ *αντίστοιχα, ορίζεται να είναι ο* $m \times n$ *πίνακας στοιχείων του* $\mathbb{K}$*:*

$$M_{\mathcal{B}_{\mathcal{E}},\mathcal{B}_{\mathcal{F}}}(f) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (**)$$

Αν $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ *και επιλέξουμε* $\mathcal{B} := \mathcal{B}_{\mathcal{E}} = \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$, *τότε ο πίνακας της* f *ως προς τις βάσεις* $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ *και* $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ *καλείται ο πίνακας της* f *ως προς την βάση* $\mathcal{B}$ *και συμβολίζεται ως* $M_{\mathcal{B}}(f)$.

Παρατήρηση 7.2.2 *1.* $\forall j = 1, 2, \cdots, m$, *η* j*-στήλη του πίνακα* $M_{\mathcal{B}_{\mathcal{E}},\mathcal{B}_{\mathcal{F}}}(f)$ *αποτελείται από τους συντελεστές του διανύσματος* $f(\vec{e}_j)$ *όταν αυτό εκφρασθεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης* $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ *του* $\mathcal{F}$.

2. Η διαδικασία την οποία ακολουθούμε για να σχηματίσουμε τον πίνακα μιας γραμμικής απεικόνισης $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ *ως προς τις βάσεις* $\mathcal{B}_{\mathcal{E}} = \{\}$ *και* $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ *των* $\mathcal{E}$ *και* $\mathcal{F}$ *αντίστοιχα, είναι ο εξής: εφαρμόζουμε την* f *σε κάθε διάνυσμα*

$\vec{e}_j$ της βάσης $\mathcal{B}_\mathcal{E}$ και ακολούθως εκφράζουμε το διάνυσμα $f(\vec{e}_j)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B}_\mathcal{F}$ του $\mathcal{F}$· τότε οι συνιστώσες του $f(\vec{e}_j)$ αποτελούν την j-στήλη του πίνακα $M_{\mathcal{B}_\mathcal{E},\mathcal{B}_\mathcal{F}}(f)$.

3. Ο Πίνακας μιας γραμμικής απεικόνισης $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ είναι τετραγωνικός αν-ν $\dim_\mathbb{K} \mathcal{E} = \dim_\mathbb{K} \mathcal{F}$.

4. Όπως είναι φανερό από τον ορισμό ο πίνακας της f εξαρτάται από τις βάσεις τις οποίες επιλέγουμε. Για παράδειγμα έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, και έστω $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ δύο βάσεις του $\mathcal{E}$. Τότε μπορούμε να σχηματίσουμε τους πίνακες $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$, $M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(f)$, $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1}(f)$, και $M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2}(f)$. Γενικά οι παραπάνω πίνακες είναι διαφορετικοί.

Παράδειγμα 7.2.1 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ με $\dim_\mathbb{K} \mathcal{E} = n$, και έστω $k \in \mathbb{K}$. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση (ομοθεσία με λόγο k):*

$$f_k : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \vec{x} \longmapsto f_k(\vec{x}) = k\vec{x}$$

Αν $\mathcal{B}$ είναι μια τυχούσα βάση του $\mathcal{E}$, τότε:

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f_k) = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

Θέτοντας $k = 0$, έχουμε ότι $f_0 = 0$ είναι η μηδενική γραμμική απεικόνιση, και άρα ο πίνακας της μηδενικής γραμμικής απεικόνισης $0 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ ως προς τυχούσα βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$ είναι ο μηδενικός $n \times n$ πίνακας.

Επιλέγοντας $k = 1$, έχουμε ότι $f_1 = \mathrm{Id}_\mathcal{E}$ είναι η ταυτοτική γραμμική απεικόνιση, και άρα ο πίνακας της ταυτοτικής γραμμικής απεικόνισης $\mathrm{Id}_\mathcal{E} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ ως προς τυχούσα βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$ είναι ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας I_n.

Παράδειγμα 7.2.2 *Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (x, x + y, 0)$. Θεωρούμε τις ακόλουθες βάσεις του $\mathbb{R}^3$:*

$$\mathcal{B}_1 := \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$$

$$\mathcal{B}_2 := \{\vec{\varepsilon}_1 = (1, 1, 0), \vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, 1), \vec{\varepsilon}_3 = (1, 1, 1)\}$$

Τότε:

$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Πραγματικά:

Παράδειγμα 7.2.3 *Έστω η γραμμική απεικόνιση* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$*,* $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (2x + y, y - z)$*. Θεωρούμε τις ακόλουθες βάσεις των* $\mathbb{R}^3$ *και* $\mathbb{R}^2$*:*

$$\mathcal{B}_1 := \{\vec{e}_1 = (1, 0, 1), \vec{e}_2 = (-1, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 1, 2)\}$$

$$\mathcal{B}_2 := \{\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0), \vec{\varepsilon}_2 = (0, 1)\}$$

Τότε:

$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Πραγματικά:

Το ακόλουθο βασικό θεώρημα αναλύει την σχέση μεταξύ γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων και είναι θεμελιώδες στην Γραμμική Άλγεβρα.

Θεώρημα 7.2.3 *Έστω* $\mathcal{E}$ *και* $\mathcal{F}$ *δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος* $\mathbb{K}$ *και έστω* $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ *μια γραμμική απεικόνιση.*

Υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$ *και* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = m$*, και σταθεροποιούμε μια βάση* $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ *του* $\mathcal{E}$ *και* $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ *μια βάση του* $\mathcal{F}$*.*

Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ *των γραμμικών απεικονίσεων* $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$*, και τον διανυσματικό χώρο* $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *των* $m \times n$ *πινάκων με στοιχεία από το σώμα* $\mathbb{K}$*.*

Τότε η απεικόνιση M *η οποία στέλνει την γραμμική απεικόνιση* f *στον πίνακα της* $M_{\mathcal{B}_{\mathcal{E}},\mathcal{B}_{\mathcal{F}}}(f)$ *ως προς τις βάσεις* $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ *και* $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ *των* $\mathcal{E}$ *και* $\mathcal{F}$ *αντίστοιχα, είναι ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων:*

$$\mathsf{M} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), \quad f \longmapsto \mathsf{M}(f) := M_{\mathcal{B}_{\mathcal{E}},\mathcal{B}_{\mathcal{F}}}(f)$$

Απόδειξη: □

Η ακόλουθη πρόταση μας δίνει πως από πίνακες μεταβαίνουμε σε γραμμικές απεικονίσεις, χωρίς να γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι μας έχουν δοθεί κάποιοι συγκεκριμένοι διανυσματικοί χώροι.

Πρόταση 7.2.4 *Έστω* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *ένας* $m \times n$ *πίνακας με στοιχεία από το σώμα* $\mathbb{K}$*. Τότε η απεικόνιση:*

$$f_A : \Sigma_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \Sigma_m(\mathbb{K})$$

η οποία ορίζεται ως εξής $f_A(\vec{X}) := A \cdot \vec{X}$, *δηλαδή:*

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \overset{f_A}{\longmapsto} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

είναι μια γραμμική απεικόνιση και ο πίνακας της ως προς τις κανονικές βάσεις $\mathcal{B}_{\Sigma_n(\mathbb{K})}$ *και* $\mathcal{B}_{\Sigma_n(\mathbb{K})}$ *των διανυσματικών χώρων* $\Sigma_n(\mathbb{K})$ *και* $\Sigma_m(\mathbb{K})$ *είναι ο* A*:*

$$M_{\mathcal{B}_{\Sigma_n(\mathbb{K})},\mathcal{B}_{\Sigma_n(\mathbb{K})}}(f_A) = A$$

Απόδειξη:

□

Άσκηση 7.2.4 *Να δείξετε ότι η απεικόνιση:*

$$G : \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\Sigma_n(\mathbb{K}), \Sigma_m(\mathbb{K}), \;\; A \longmapsto G(A) := f_A$$

είναι ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

Παράδειγμα 7.2.5

Θα δείξουμε τώρα ότι ο ισομορφισμός του Θεωρήματος 7.2.3 στέλνει την σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων μεταξύ διανυσματικών χώρων στο γινόμενο των πινάκων τους ως προς κάποιες επιλεγμένες βάσεις των χώρων.

Θεώρημα 7.2.5 *Έστω* $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ *και* $\mathcal{G}$ *τρεις διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος* $\mathbb{K}$ *και έστω*

$$\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{G}$$

δύο γραμμικές απεικονίσεις. Υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = m$, *και* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{G} = r$, *και σταθεροποιούμε μια βάση* $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ *του* $\mathcal{E}$, *μια βάση* $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ *του* $\mathcal{F}$, *και μια βάση* $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ *του* $\mathcal{G}$. *Τότε ο πίνακας της σύνθεσης* $g \circ f : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ *ως προς τις βάσεις* $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ *και* $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ *των* $\mathcal{E}$ *και* $\mathcal{G}$ *είναι το γινόμενο των πινάκων των γραμμικών απεικονίσεων* f *και* g *ως προς τι βάσεις* $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ *και* $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$, *και* $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ *και* $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ *αντίστοιχα:*

$$M_{\mathcal{B}_{\mathcal{E}},\mathcal{B}_{\mathcal{G}}}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}_{\mathcal{F}},\mathcal{B}_{\mathcal{G}}}(g) \cdot M_{\mathcal{B}_{\mathcal{E}},\mathcal{B}_{\mathcal{F}}}(f)$$

Απόδειξη: □

7.3 Αλλαγή Βάσης και Συνιστωσών

Στην παρούσα ενότητα θα δούμε έναν τρόπο ο οποίος μας επιτρέπει να περάσουμε από μια βάση ενός διανυσματικού χώρου σε μια άλλη βάση του ίδιου χώρου. Επίσης θα δούμε πως αλλάζουν οι συνιστώσες ενός διανύσματος όταν αλλάξουμε βάση, και πως αλλάζει ο πίνακας μιας γραμμικής απεικόνισης όταν αλλάξουμε βάσεις στους διανυσματικούς χώρους στους οποίους είναι ορισμένη η γραμμική απεικόνιση.

Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$. Έστω ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$ και έστω

$$\mathcal{B} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$$
$$\mathcal{B}' := \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$$

δύο τυχούσες βάσεις του $\mathcal{E}$.

Τότε κάθε διάνυσμα της βάσης $\mathcal{B}'$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσεις $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\varepsilon}_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{e}_n \\
\vec{\varepsilon}_2 &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n2}\vec{e}_n \\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\cdots \\
\vec{\varepsilon}_n &= a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n
\end{aligned}$$

ή περισσοτερο αναλυτικά:

$$\forall j = 1, 2, \cdots, n: \quad \vec{\varepsilon}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i$$

Ορισμός 7.3.1 *Ο* **πίνακας μετάβασης από την βάση** $\mathcal{B}$ **στην βάση** $\mathcal{B}'$ *ορίζεται να είναι ο τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας:*

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Παρόμοια κάθε διάνυσμα της βάσης $\mathcal{B}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσεις $\mathcal{B}'$:

$$\vec{e}_1 = b_{11}\vec{\varepsilon}_1 + b_{21}\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + b_{n1}\vec{\varepsilon}_n$$

$$\vec{e}_2 = b_{12}\vec{\varepsilon}_1 + b_{22}\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + b_{n2}\vec{\varepsilon}_n$$
$$\cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots\cdots$$
$$\vec{e}_n = b_{1n}\vec{\varepsilon}_1 + b_{2n}\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + b_{nn}\vec{\varepsilon}_n$$

ή περισσοτερο αναλυτικά:

$$\forall i = 1, 2, \cdots, n: \ \ \vec{e}_j = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\vec{\varepsilon}_k$$

Ορισμός 7.3.2 *Ο* **πίνακας μετάβασης από την βάση** $\mathcal{B}'$ **στην βάση** $\mathcal{B}$ *ορίζεται να είναι ο τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας:*

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 7.3.1 *Έστω οι ακόλουθες βάσεις του $\mathbb{R}^3$:*

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (2, 0, 0), \vec{e}_2 = (-3, -1, 0), \vec{e}_3 = (0, 2, \frac{1}{2}\}$$

$$\mathcal{B}' = \{\vec{\varepsilon}_1 = (1, -1, 0), \vec{\varepsilon}_2 = (1, 0, 1), \vec{\varepsilon}_3 = (0, 1, -2\}$$

Τότε ο πίνακας μετάβασης από την βάση $\mathcal{B}'$ στην βάση $\mathcal{B}$ είναι ο εξής:

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{13}{2} & -\frac{27}{2} \\ 1 & 4 & -9 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Πρόχειρη Δοκιμασία

Να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ για τις βάσεις του παραπάνω παραδείγματος.

Παράδειγμα 7.3.2 *Θεωρούμε την κανονική βάση*

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, \vec{e}_n = (0, 0, \cdots, 1)\}$$

του διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}^n$. Θεωρούμε επίσης μια διαφορετική τυχούσα βάση

$$\mathcal{B}' = \{\vec{\varepsilon}_1 = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1}), \vec{\varepsilon}_2 = (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{n2}), \cdots, \vec{\varepsilon}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{nn})\}$$

του $\mathbb{K}^n$. Τότε ο πίνακας μετάβασης από την βάση την κανονική βάση $\mathcal{B}$ στην τυχούσα βάση $\mathcal{B}'$ είναι ο $n \times n$ που προκύπτει αν μετατρέψουμε τα διανύσματα $\vec{\varepsilon}_i$ σε στήλες:

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Είναι εύλογο να αναρωτηθούμε τι σχέση έχουν οι πίνακες μετάβασης μεταξύ δύο βάσεων ενός διανυσματικού χώρου. Την απάντηση την δίνει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 7.3.3 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$, και έστω*

$$\mathcal{B} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$$

$$\mathcal{B}' := \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$$

δύο τυχούσες βάσεις του $\mathcal{E}$. Τότε ο πίνακας μετάβασης $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ από την βάση $\mathcal{B}$ στην βάση $\mathcal{B}'$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος του είναι ο πίνακας μετάβασης $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ από την βάση $\mathcal{B}'$ στην βάση $\mathcal{B}$:

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = M^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

Απόδειξη: □

Έστω, όπως και πριν, $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω

$$\mathcal{B} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$$

$$\mathcal{B}' := \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$$

δύο βάσεις του $\mathcal{E}$. Τότε κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων των βάσεων $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i$$

$$\vec{x} = x'_1\vec{\varepsilon}_1 + x'_2\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + x'_n\vec{\varepsilon}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{\varepsilon}_i$$

Θεωρούμε τα διανύσματα στήλες:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \vec{X}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_i \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

τα οποία καλούνται τα **διανύσματα-στήλες των συνιστωσών** του $\vec{x}$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$.

Η επόμενη πρόταση περιγράφει πως αλλάζουν οι συνιστώσες του διανύσματος $\vec{x}$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$.

Πρόταση 7.3.4 *Ισχύοουν οι ακόλουθες σχέσεις:*

$$\vec{X}' = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \cdot \vec{X} = M^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \cdot \vec{X} \qquad \textit{και} \qquad \vec{X} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \cdot \vec{X}' = M^{-1}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \cdot \vec{X}'$$

Περισσότερο αναλυτικά:

$$\forall k = 1, 2, \cdots n: \;\; x_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x'_i \qquad x'_k = \sum_{i=1}^{n} b_{ki} x_i$$

όπου: $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = (a_{ij})$ *και* $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = (b_{ij})$.

Απόδειξη: □

7.4 Ισοδύναμοι και Όμοιοι Πίνακες

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε πως αλλάζει ο πίνακας μιας γραμμικής απεικόνισης όταν αλλάξουμε βάσεις.

Από τώρα και στο εξής υποθέτουμε ότι μας έχουν δοθεί τα ακόλουθα:

1. $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$, και έστω $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ και $\mathcal{B}'_{\mathcal{E}}$ δύο βάσεις του:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{E}} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}, \quad \mathcal{B}'_{\mathcal{E}} := \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \cdots, \vec{e}'_n\}$$

2. $\mathcal{F}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = m$, και έστω $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ και $\mathcal{B}'_{\mathcal{F}}$ δύο βάσεις του:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{F}} := \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_m\}, \quad \mathcal{B}'_{\mathcal{F}} := \{\vec{\varepsilon}'_1, \vec{\varepsilon}'_2, \cdots, \vec{\varepsilon}'_m\},$$

3. $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση.

Συμβολίζουμε με:

4. $A = M_{\mathcal{B}_\mathcal{E},\mathcal{B}_\mathcal{F}}(f)$ τον πίνακα της f ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_\mathcal{E}$ και $\mathcal{B}_\mathcal{F}$ των $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$:

$$A = (a_{ij}) := M_{\mathcal{B}_\mathcal{E},\mathcal{B}_\mathcal{F}} \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

5. $A' = M_{\mathcal{B}'_\mathcal{E},\mathcal{B}'_\mathcal{F}}(f)$ τον πίνακα της f ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}'_\mathcal{E}$ και $\mathcal{B}'_\mathcal{F}$ των $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$:

$$A' = (a'_{ij}) := M_{\mathcal{B}'_\mathcal{E},\mathcal{B}'_\mathcal{F}} \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

6. $P = M_{\mathcal{B}_\mathcal{E},\mathcal{B}'_\mathcal{E}}$ τον πίνακα μετάβασης από την βάση $\mathcal{B}_\mathcal{E}$ στην βάση $\mathcal{B}'_\mathcal{E}$:

$$P = (p_{ij}) := M_{\mathcal{B}_\mathcal{E},\mathcal{B}'_\mathcal{E}} \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$$

Τότε από το Θεώρημα 7.3.3 γνωρίζουμε ότι ο πίνακας μετάβασης από την βάση $\mathcal{B}'_\mathcal{E}$ στην βάση $\mathcal{B}_\mathcal{E}$ είναι ο P^{-1}, δηλαδή: $P^{-1} = M_{\mathcal{B}'_\mathcal{E},\mathcal{B}_\mathcal{E}}$.

7. $Q = M_{\mathcal{B}_\mathcal{F},\mathcal{B}'_\mathcal{F}}$ τον πίνακα μετάβασης από την βάση $\mathcal{B}_\mathcal{F}$ στην βάση $\mathcal{B}'_\mathcal{F}$:

$$Q = (q_{ij}) := M_{\mathcal{B}_\mathcal{F},\mathcal{B}'_\mathcal{F}} \in \mathbb{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$$

Τότε από το Θεώρημα 7.3.3 γνωρίζουμε ότι ο πίνακας μετάβασης από την βάση $\mathcal{B}'_\mathcal{F}$ στην βάση $\mathcal{B}_\mathcal{F}$ είναι ο Q^{-1}, δηλαδή: $Q^{-1} = M_{\mathcal{B}'_\mathcal{F},\mathcal{B}_\mathcal{F}}$.

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι $A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P$. Γι' αυτό το σκοπό χρειαζόμαστε κάποια προεργασία.

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$ ένα τυχόν διάνυσμα του $\mathcal{E}$, το οποίο το εκφράζουμε ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων των βάσεων $\mathcal{B}_\mathcal{E}$ και $\mathcal{B}'_\mathcal{E}$:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i \tag{7.2}$$

$$\vec{x} = x'_1\vec{e}'_1 + x'_2\vec{e}'_2 + \cdots + x'_n\vec{e}'_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}'_i \tag{7.3}$$

Συμβολίζουμε με $\vec{X}$ και $\vec{X}'$ τα διανύσματα-στήλες των συνιστωσών του $\vec{x}$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_\mathcal{E}$ και $\mathcal{B}'_\mathcal{E}$ όπως στην σχέση ??. Τότε από την Πρόταση 7.3.4, έχουμε τις σχέσεις:

$$\vec{X} = P \cdot \vec{X}', \quad \vec{X}' = P^{-1} \cdot \vec{X} \tag{7.4}$$

Εφαρμόζουμε την γραμμική απεικόνιση f στο διάνυσμα $\vec{x}$ και έστω $\vec{y} = f(\vec{x})$. Εν συνεχεία εκφράζουμε το $\vec{y}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων των βάσεων $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ και $\mathcal{B}'_{\mathcal{F}}$:

$$f(\vec{x}) = \vec{y} = y_1\vec{\varepsilon}_1 + y_2\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + y_n\vec{\varepsilon}_m = \sum_{i=1}^{m} x_i\vec{\varepsilon}_i \tag{7.5}$$

$$f(\vec{x}) = \vec{y} = y'_1\vec{\varepsilon}'_1 + y'_2\vec{\varepsilon}'_2 + \cdots + y'_n\vec{\varepsilon}'_n = \sum_{i=1}^{m} x_i\vec{\varepsilon}'_i \tag{7.6}$$

Συμβολίζουμε με $\vec{Y}$ και $\vec{Y}'$ τα διανύσματα-στήλες των συνιστωσών του $\vec{y} = f(\vec{x})$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ και $\mathcal{B}'_{\mathcal{F}}$ όπως στην σχέση ??. Τότε από την Πρόταση 7.3.4, έχουμε τις σχέσεις:

$$\vec{Y} = Q \cdot \vec{Y}', \quad \vec{Y}' = Q^{-1} \cdot \vec{Y} \tag{7.7}$$

Λήμμα 7.4.1 *Τα διάνυσματα-στήλες $\vec{X}$ και $\vec{Y}$ των συνιστωσών των διανυσμάτων $\vec{x}$ και $\vec{y} = f(\vec{x})$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ και $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ τν $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ αντίστοιχα, συνδέονται με τον ακόλουθο τύπο:*

$$\vec{Y} = A \cdot \vec{X} \tag{7.8}$$

ή περισσότερο αναλυτικά:

$$\forall i = 1, 2, \cdots, m: \quad y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \tag{7.9}$$

Απόδειξη:

□

Θεώρημα 7.4.2 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ διανυσματικών υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Επιλέγουμε δύο τυχούσες βάσεις $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ και $\mathcal{B}'_{\mathcal{E}}$ του $\mathcal{E}$, και δύο τυχούσες βάσεις $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ και $\mathcal{B}'_{\mathcal{F}}$ του $\mathcal{F}$. Έστω A ο πίνακας της f ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ και $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ και έστω A' ο πίνακας της f ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}'_{\mathcal{E}}$ και $\mathcal{B}'_{\mathcal{F}}$. Τέλος έστω P ο πίνακας μετάβασης από την βάση $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ στην βάση $\mathcal{B}'_{\mathcal{E}}$ του $\mathcal{E}$, και έστω Q ο πίνακας μετάβασης από την βάση $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ στην βάση $\mathcal{B}'_{\mathcal{F}}$ του $\mathcal{F}$. Τότε ισχύει ο ακόλουθος τύπος:*

$$\boxed{A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P}$$

Απόδειξη:

□

Το Θεώρημα 7.4.2 μας οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 7.4.3 *Έστω $A, A' \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ δύο $m \times n$ πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Οι πίνακες A και A' καλούνται* **ισοδύναμοι** *αν υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας $P \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ και ένας αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας $Q \in \mathbb{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$, έτσι ώστε:*

$$A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P$$

Θεώρημα 7.4.4 *Δύο πίνακες $A, A' \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ είναι ισοδύναμοι αν-ν είναι πίνακες μιας γραμμικής απεικόνισης $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, όπου $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = m$, ως προς διαφορετικές βάσεις των $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$.*

Απόδειξη:

□

Υποθέτουμε τώρα ότι $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ και θέτουμε $\mathcal{B}_{\mathcal{E}} = \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ και $\mathcal{B}'_{\mathcal{E}} = \mathcal{B}'_{\mathcal{F}}$, στα παραπάνω δεδομένα. Επομένως έχουμε μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ και δύο βάσεις του $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{E}} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}, \quad \mathcal{B}'_{\mathcal{E}} := \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \cdots, \vec{e}'_n\}$$

Όπως προηγουμένως, έστω $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ ο πίνακας της f στην βάση $\mathcal{B}$ και $A' = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$ ο πίνακας της f στην βάση $\mathcal{B}'$. Επίσης έστω $P = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ ο πίνακας μετάβασης από την βάση $\mathcal{B}$ στην βάση $\mathcal{B}'$. Τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 7.3.3, ο πίνακας μετάβασης $Q = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ από την βάση $\mathcal{B}'$ στην βάση $\mathcal{B}$ είναι $Q = P^{-1}$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 7.4.2, θα έχουμε $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Αυτή η σχέση τετραγωνικών πινάκων μας οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 7.4.5 *Έστω $A, A' \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ δύο τετραγωνικοί $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Οι πίνακες A και A' καλούνται* **όμοιοι** *αν υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας $P \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$έτσι ώστε:*

$$A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Η παρπάνω ανάλυση μας οδηγεί στο ακόλουθο βασικό Θεώρημα, το οποίο είναι ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 7.4.4.

Θεώρημα 7.4.6 *Δύο τετραγωνικοί πίνακες $A, A' \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ είναι όμοιοι αν-ν είναι πίνακες μιας γραμμικής απεικόνισης $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, όπου $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$, ως προς διαφορετικές βάσεις του $\mathcal{E}$.*

Απόδειξη:

$\square$

Παράδειγμα 7.4.1 *Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση η οποία ορίζεται ως εξής:*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (x, x + y, 0)$$

Θεωρούμε τις ακόλουθες βάσεις του $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B}_1 := \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$$

$$\mathcal{B}_2 := \{\vec{e}_1' = (1, 1, 0), \vec{e}_2' = (0, 1, 1), \vec{e}_3' = (1, 1, 1)\}$$

όπως στο Παράδειγμα 7.2.2.

Στο σύνολο $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ορίζουμε μια σχέση $\sim$ ως εξής:

$$\forall A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : \ A \sim B \iff \text{οι πίνακες } A, B \text{ είναι ισοδύναμοι}$$

δηλαδή: $A \sim B$ αν-ν υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ και ένας αντιστρέψιμος $m\times m$ πίνακας $Q \in \mathbb{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$, έτσι ώστε: $B = Q^{-1}\cdot A\cdot P$.

Πρόταση 7.4.7 *Η σχέση $\sim_{m\times n}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ των $m \times n$ πινάκων.*

Απόδειξη: $\square$

Περιοριζόμενοι σε τετραγωνικούς $n \times n$ πίνακες έχουμε ανάλογα τον ακόλουθο ορισμό και την ακόλουθη πρόταση.

Στο σύνολο $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ορίζουμε μια σχέση $\sim_{n\times n}$ ως εξής:

$$\forall A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : \ A \sim_{n\times n} B \iff \text{οι πίνακες } A, B \text{ είναι όμοιοι}$$

δηλαδή: $A \sim_{n\times n} B$ αν-ν υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ έτσι ώστε: $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Πρόταση 7.4.8 *Η σχέση ομοιότητας $\sim_{n\times n}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ των $n \times n$ πινάκων.*

Απόδειξη: □

Σύμφωνα με τις Προτάσεις 7.4.7 και 7.4.8 η σχέση $\sim_{m\times n}$ διαμερίζει το σύνολο $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ σε κλάσεις ισοδυναμίας (ισοδύναμων πινάκων), και η σχέση $\sim_{n\times n}$ διαμερίζει το σύνολο $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ σε κλάσεις ισοδυναμίας (όμοιων πινάκων). Δύο από τους βασικότερους σκοπούς της Γραμμικής Άλγεβρας είναι: (α) η εύρεση των πλέον απλών αντιπροσώπων σε κάθε κλάση ισοδυναμίας ή ομοιότητας, και (β) η εύρεση ιδιοτήτων πινάκων οι οποίες ισχύουν για κάθε πίνακα ο οποίος ανήκει σε μια δεδομένη κλάση ισοδυναμίας η ομοιότητας. Στα επόμενα Κεφάλαια θα δούμε κάποιες από αυτές τις ιδιότητες.

Κεφάλαιο 8

Βαθμιδα Πινακα

Στο παρόν Κεφάλαιο θα μελετήσουμε την βαθμίδα ενός πίνακα με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$, καθώς και τις κυριότερες ιδιότητες της. Η έννοια της βαθμίδας είναι ανάλογη της έννοιας της βαθμίδας μιας γραμμικής απεικόνισης, και θα διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στα επόμενα κεφάλαια που αφορούν την θεωρία οριζουσών και γραμμικών συστημάτων.

8.1 Ορισμός και Βασικές Ιδιότητες

Στην παρούσα ενότητα σταθεροποιούμε ένα σώμα $\mathbb{K}$.

Έστω

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$.

Υπενθυμίζουμε ότι με:

1. $\Sigma_m(\mathbb{K})$ συμβολίζουμε τον χώρο στηλών με στοιχεία από το $\mathbb{K}$.

2. $\Gamma_n(\mathbb{K})$ συμβολίζουμε τον χώρο γραμμών με στοιχεία από το $\mathbb{K}$.

Θεωρώντας τις στήλες του πίνακα A, βλέπουμε ότι ο πίνακας A ορίζει τα ακόλουθα διανύσματα του χώρου στηλών $\Sigma_m(\mathbb{K})$:

$$\vec{A}^1 := \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ \vec{A}^2 := \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \quad \vec{A}^n := \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{in} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \ \in \ \Sigma_m(\mathbb{K})$$

Παρόμοια θεωρώντας τις γραμμές του πίνακα A, βλέπουμε ότι ο πίνακας A ορίζει τα ακόλουθα διανύσματα του χώρου στηλών $\Gamma_n(\mathbb{K})$:

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}, \ \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}, \cdots,$$

$$\vec{A}_m = \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \ \in \ \Gamma_n(\mathbb{K})$$

Ορισμός 8.1.1 *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$.*

1. **Ο χώρος στηλών του πίνακα** *A ορίζεται να είναι ο υπόχωρος $\Sigma(A)$ του $\Sigma_m(\mathbb{K})$ ο οποίος παράγεται από τις n στήλες $\vec{A}^1, \vec{A}^2, \cdots, \vec{A}^n$ του πίνακα A.*

2. **Η βαθμίδα στηλών** *$\sigma(A)$* **του πίνακα** *A ορίζεται να είναι η διάσταση του χώρου στηλών $\Sigma(A)$ του πίνακα A:*

$$\sigma(A) := \dim_{\mathbb{K}} \Sigma(A)$$

Δηλαδή $\sigma(A)$ είναι το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του πίνακα A, θεωρώντας τις στήλες του A ως διανύσματα του χώρου στηλών $\Sigma(A)$.

3. **Ο χώρος γραμμών του πίνακα** *A ορίζεται να είναι ο υπόχωρος $\Gamma(A)$ του $\Gamma_n(\mathbb{K})$ ο οποίος παράγεται από τις m γραμμές $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \cdots, \vec{A}_m$ του πίνακα A.*

4. **Η βαθμίδα γραμμών** *$\gamma(A)$* **του πίνακα** *A ορίζεται να είναι η διάσταση του χώρου γραμμών $\Gamma(A)$ του πίνακα A:*

$$\gamma(A) := \dim_{\mathbb{K}} \Gamma(A)$$

Δηλαδή $\gamma(A)$ είναι το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του πίνακα A, θεωρώντας τις γραμμές του A ως διανύσματα του χώρου γραμμών $\Gamma(A)$.

Παρατήρηση 8.1.2 *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Παρατηρούμε ότι επειδή $\Sigma(A) \subseteq \Sigma_m(\mathbb{K})$ και $\dim_{\mathbb{K}} \Sigma_m(\mathbb{K}) = m$, θα έχουμε: $\sigma(A) \leq m$. Παρόμοια επειδή $\Gamma(A) \subseteq \Gamma_n(\mathbb{K})$ και $\dim_{\mathbb{K}} \Gamma_n(\mathbb{K}) = n$, θα έχουμε: $\gamma(A) \leq n$.*

Παρατήρηση 8.1.3 *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Τότε:*

$$\sigma(A) = \gamma({}^tA)$$

Πραγματικά αυτό προκύ·πτει άμεσα από τον ορισμό καθώς οι στήλες του ${}^tA$ είναι οι γραμμές του A και οι γραμμές του ${}^tA$ είναι οι στήλες του A

Ένας από τους βασικούς σκοπούς της παρούσης ενότητας είναι να δείξουμε ότι ισχύει: $\sigma(A) = \gamma(A)$. Προηγουμένως όμως χρειαζόμαστε κάποια προεργασία.

Λήμμα 8.1.4 *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, και έστω η επαγόμενη γραμμική απεικόνιση την οποία ορίζει ο A:*

$$f_A : \Sigma_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \Sigma_m(\mathbb{K}),\ \vec{X} \longmapsto f_A(\vec{X}) := A \cdot \vec{X}$$

Τότε: $\mathbf{r}(f_A) = \sigma(A)$.

Απόδειξη: □

Λήμμα 8.1.5 *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, και έστω η επαγόμενη γραμμική απεικόνιση την οποία ορίζει ο ανάστροφος ${}^tA$ του A:*

$$f_{{}^tA} : \Sigma_m(\mathbb{K}) \longrightarrow \Sigma_n(\mathbb{K}),\ \vec{X} \longmapsto f_{{}^tA}(\vec{X}) := {}^tA \cdot \vec{X}$$

Τότε: $\mathbf{r}(f_{{}^tA}) = \sigma(A) = \gamma({}^tA) \leq \min\{m, n\}$.

Απόδειξη: □

8.2 Βαθμίδα Γραμμικής Απεικόνισης και Πίνακα

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ είναι διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, και $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε ορίσαμε την βαθμίδα $\mathbf{r}(f)$ της fως την διάσταση του υπόχωρου $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f)$. Στην παρούσα ενότητα θα αναλύσουμε την σχέση μεταξύ της βαθμίδας της f και της βαθμίδας γραμμών ή στηλών του πίνακα της f ως προς τυχούσες βάσεις των $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$.

Θεώρημα 8.2.1 *Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = m$. Αν $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε υπάρχει μια βάση $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ του $\mathcal{E}$ και μια βάση $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ του $\mathcal{F}$, έτσι ώστε ο πίνακας της f στις παραπάνω βάσεις να είναι της μορφής:*

$$M_{\mathcal{B}_{\mathcal{E}},\mathcal{B}_{\mathcal{F}}}(f) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

όπου:

$$I_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{r\times r}(\mathbb{K})$$

είναι ο μοναδιαίος $r \times r$ πίνακας και $r = \mathbf{r}(f)$.

Απόδειξη: □

Ο $m \times n$ πίνακας του Θεωρήματος 8.2.1 γράφεται περισσότερο συνοπτικά ως εξής:

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ \hline 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right)$$

όπου $0_{r\times(n-r)}$ είναι ο μηδενικός $r\times(n-r)$ πίνακας, $0_{(m-r)\times r}$ είναι ο μηδενικός $(m-r)\times r$ πίνακας, και $0_{(m-r)\times(n-r)}$ είναι ο μηδενικός $(m-r)\times(n-r)$ πίνακας.

Πρόταση 8.2.2 *Έστω $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$. Τότε ο A είναι ισοδύναμος με έναν πίνακα της μορφής:*

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ \hline 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right), \quad \text{όπου} \ \ r := \sigma(A)$$

Δηλαδή υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας P και ένας αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας Q έτσι ώστε:

$$Q^{-1} \cdot A \cdot P = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ \hline 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right)$$

Απόδειξη:

□

Θεώρημα 8.2.3 *Έστω $A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ δύο $m \times n$ πίνακες με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι.*

2. *Οι πίνακες A και B έχουν την ίδια βαθμίδα στηλών:*

$$\sigma(A) = \sigma(B)$$

Απόδειξη: □

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ είναι διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, και $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε ορίσαμε την ανάστροφη απεικόνιση μεταξύ των δυϊκών χώρων $\mathcal{F}^\star$ και $\mathcal{E}^\star$ ως εξής:

$${}^tf : \mathcal{F}^\star \longrightarrow \mathcal{E}^\star,\ \xi \longmapsto {}^tf(\xi) = \xi \circ f$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 6.1.12 οι απεικονίσεις f και ${}^tf$ έχουν την ίδια βαθμίδα:

$$\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}({}^tf)$$

Υποθέτουμε ότι:

1. $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = m$.

2.

$$\mathcal{B}_{\mathcal{E}} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{E}$, και έστω

$$\mathcal{B}^\star_{\mathcal{E}} := \{\vartheta^1, \vartheta^2, \cdots, \vartheta^n\}$$

είναι η δυϊκή της βάση του $\mathcal{E}^\star$.

3.

$$\mathcal{B}_{\mathcal{F}} := \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{F}$, και έστω

$$\mathcal{B}^\star_{\mathcal{F}} := \{\xi^1, \xi^2, \cdots, \xi^n\}$$

είναι η δυϊκή της βάση του $\mathcal{F}^\star$.

Είναι εύλογο να αναρωτηθούμε αν ο πίνακας της ανάστροφης απεικόνισης ${}^t f$ ως προς τις δυϊκές βάσεις $\mathcal{B}^\star_{\mathcal{F}}$ και $\mathcal{B}^\star_{\mathcal{E}}$ σχετίζεται με τον πίνακα της f ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ και $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$. Την απάντηση δίνει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 8.2.4 *Έστω $A = (a_{ij}) = M_{\mathcal{B}_{\mathcal{E}},\mathcal{B}_{\mathcal{F}}}(f)$ ο πίνακας της $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ και $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ των $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ αντίστοιχα.*

Τότε ο πίνακας $B := (b_{ij}) = M_{\mathcal{B}^\star_{\mathcal{F}},\mathcal{B}^\star_{\mathcal{E}}}({}^t f)$ της ανάστροφης απεικόνισης ${}^t f : \mathcal{F}^\star \to \mathcal{E}^\star$ είναι ο ανάστροφος του A, δηλαδή $B = {}^t A$ ή περισσότερο αναλυτικά:

$$M_{\mathcal{B}^\star_{\mathcal{F}},\mathcal{B}^\star_{\mathcal{E}}}({}^t f) = {}^t M_{\mathcal{B}_{\mathcal{E}},\mathcal{B}_{\mathcal{F}}}(f)$$

Απόδειξη: □

Θεώρημα 8.2.5 *Έστω $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Τότε η βαθμίδα στηλών του A είναι ίση με την βαθμίδα γραμμών του A:*

$$\sigma(A) = \gamma(A)$$

Απόδειξη: □

Ορισμός 8.2.6 *Έστω $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Η κοινή τιμή $\sigma(A) = \gamma(A)$ καλείται* **βαθμίδα** *του A και συμβολίζεται με $\mathbf{r}(A)$.*

Θεώρημα 8.2.7 *Έστω $A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ δύο $m \times n$ πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι.*

2. $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(B)$.

3. *Οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι με τον $m \times n$ πίνακα:*

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ \hline 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right)$$

Αν $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ είναι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας, τότε γνωρίζουμε ότι $\mathbf{r}(A) \leq n$. Το ακόλουθο Θεώρημα χαρακτηρίζει τους τετραγωνικούς πίνακες των οποίων η βαθμίδα λαμβάνει την μέγιστη δυνατή τιμή.

Θεώρημα 8.2.8 *Έστω $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος.*
2. $\mathbf{r}(A) = n$.
3. *Ο πίνακας είναι ισοδύναμος με τον μοναδιαίο* $n \times n$ *πίνακα* I_n.

Ιδιαίτερα δύο τετραγωνικοί αντιστρέψιμοι πίνακες είναι πάντα ισοδύναμοι.

Απόδειξη: □

Όπως έχουμε δείξει η βαθμίδα ενός πίνακα $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ συμπίπτει με την βαθμίδα της γραμμικής απεικόνισης $f_A : \Sigma_n(\mathbb{K}) \to \Sigma_m(\mathbb{K})$, έπεται ότι η βαθμίδα πίνακα έχει τις ίδιες ιδιότητες τις οποίες έχει η βαθμίδα πίνακα. Επομένως συνοψίζοντας τα αποτελέσματα περί βαθμίδας γραμμικής απεικόνισης τα οποία αποδείξαμε στην ενότητα **;;** καθώς και τα αποτελέσματα αυτού του Κεφαλαίου, θα έχουμε τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Έστω $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$.

α. Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{r}(kA) = \mathbf{r}(A), \ \ \forall k \in \mathbb{K}} \tag{1}$$

Απόδειξη: Θα

β. Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{r}(A) \leq \min\{m, n\}} \tag{2}$$

2. $A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ δύο $m \times n$ πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{|\mathbf{r}(A) - \mathbf{r}(B)| \leq \mathbf{r}(A + B) \leq \mathbf{r}(A) + \mathbf{r}(B)} \tag{3}$$

3. Έστω $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ένας $m \times n$ πίνακας και $B \in \mathbb{M}_{n\times r}(\mathbb{K})$ ένας $n \times r$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$.

α. Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{r}(A \cdot B \leq \min\{\mathbf{r}(A), \mathbf{r}(B)\}} \tag{4}$$

β. Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{r}(A \cdot B) = \mathbf{r}(A) \ \ \text{αν ο } B \text{ είναι αντιστρέψιμος}} \tag{5}$$

ϛ. Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{r}(A \cdot B) = \mathbf{r}(B) \quad \text{αν ο } B \text{ είναι αντιστρέψιμος}} \tag{6}$$

δ. Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{r}(A \cdot B) \geq \mathbf{r}(A) + \mathbf{r}(B) - n} \tag{7}$$

8.3 Μέθοδοι Εύρεσης Βαθμίδας

Σκοπός μας στην παρούσα ενότητα είναι να αναπτύξουμε κάποιες μεθόδους υπολογισμού της βαθμίδας ενός πίνακα.