ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

Ασκησεις - Φυλλαδιο 2

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI/LAI2019/LAI2019.html

Παρασκευή 1 Νοεμβρίου 2019

Άσκηση 1. *Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$, όπου $n \geq 2$.*

Χρησιμοποιώντας ότι η ορίζουσα του A μπορεί να υπολογιστεί ως το ανάπτυγμα της κατά τα στοιχεία τυχούσας στήλης ή γραμμής και ότι η ορίζουσα του πίνακα δεν αλλάζει αν σε μια γραμμή ή στήλη προσθέσουμε πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής ή στήλης αντίστοιχα, να δειχθούν τα ακόλουθα:

(1) *Αν ο πίνακας A έχει δύο διαδοχικές στήλες ίσες ή δύο γραμμές ίσες, τότε $|A| = 0$.*
(2) *Αν στον πίνακα A εναλλάξουμε αμοιβαία δύο διαδοχικές στήλες ή γραμμές, τότε η ορίζουσα του πίνακα A αλλάζει πρόσημο. Δηλαδή, αν $1 \leq k \leq n-1$, τότε:*

$$A \xmapsto{\Sigma_k \leftrightarrow \Sigma_{k+1}} A' \quad \Longrightarrow \quad |A'| = -|A|$$

(3) *Αν ο πίνακας A έχει δύο στήλες ίσες ή δύο γραμμές ίσες, τότε $|A| = 0$.*

Άσκηση 2. *Έστω $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ένας 2×2 πίνακας με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι:*

$$|A| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{είτε υπάρχει } \lambda \in \mathbb{K}: \ a = \lambda c \text{ και } b = \lambda d \quad \text{είτε υπάρχει } \mu \in \mathbb{K}: \ c = \mu a \text{ και } d = \mu b$$

Με άλλα λόγια, η ορίζουσα ενός 2×2 πίνακα είναι ίση με μηδέν αν και μόνον αν μία από τις δύο γραμμές είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο της άλλης[1].

Άσκηση 3. *Χωρίς να υπολογιστεί, να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα:*

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$$

Άσκηση 4. *Να υπολογίσετε την ορίζουσα του ακόλουθου πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

[1] Το συμπέρασμα της Άσκησης εξακολουθεί να ισχύει αν αντικαταστήσουμε τις γραμμές με τις στήλες, δηλαδή: η ορίζουσα ενός 2×2 πίνακα είναι ίση με μηδέν αν και μόνον αν μία από τις δύο στήλες του είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο της άλλης

Άσκηση 5. *Να υπολογίσετε την ορίζουσα του ακόλουθου πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 6. *Χωρίς να υπολογιστούν οι ορίζουσες, να δειχθεί ότι*

$$\begin{vmatrix} 1 & 11 & 111 \\ 2 & 22 & 222 \\ 3 & 33 & 333 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -11 & 111 \\ -2 & 22 & -222 \\ 3 & -33 & 333 \end{vmatrix}$$

Άσκηση 7. *Να υπολογιστεί η ορίζουσα*

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1+b & 1+c \\ 1+2a & 1+2b & 1+2c \\ 1+3a & 1+3b & 1+3c \end{vmatrix}$$

Άσκηση 8. *Να υπολογίσετε την ορίζουσα* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

Άσκηση 9. *Αν α, β και γ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε να δείξετε ότι*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) \qquad (\textit{ορίζουσα } \textsc{Vandermonde} \textit{ τρίτης τάξης})$$

Άσκηση 10. *Να υπολογίσετε την ορίζουσα* $\begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & 1+\alpha_1\beta_2 & 1+\alpha_1\beta_3 \\ 1+\alpha_2\beta_1 & 1+\alpha_2\beta_2 & 1+\alpha_2\beta_3 \\ 1+\alpha_3\beta_1 & 1+\alpha_3\beta_2 & 1+\alpha_3\beta_3 \end{vmatrix}$.

Άσκηση 11. *Να υπολογίσετε την ορίζουσα* $\Delta = \begin{vmatrix} \sin^2(x) & 1 & \cos^2(x) \\ \sin^2(y) & 1 & \cos^2(y) \\ \sin^2(z) & 1 & \cos^2(z) \end{vmatrix}$

Άσκηση 12. *Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να υπολογισθεί η ορίζουσα $|A|$ του 4×4 πίνακα πραγματικών αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 13. *Θεωρούμε έναν πίνακα $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{K})$ ο οποίος ικανοποιεί την σχέση:*

$$A^2 + 2 \cdot A = O$$

Να δείξετε ότι ο πίνακας $A + I_3$ είναι αντιστρέψιμος, να βρείτε τον $(A + I_3)^{-1}$, και να υπολογίσετε την ορίζουσα $|A|$ του A.

Άσκηση 14. *Έστω* A *ένας* $n \times n$ *πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα* $\mathbb{K}$.

(1) *Αν ο* n *είναι περιττός και* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *να δειχθεί ότι δεν υπάρχουν πίνακες* $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ *έτσι ώστε:* $A^2 + I_n = O$.
(2) *Αν ο* n *είναι περιττός και* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *να δειχθεί ότι υπάρχουν πίνακες* $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ *έτσι ώστε:* $A^2 + I_n = O$.
(3) *Αν ο* n *είναι άρτιος και* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *να δειχθεί ότι υπάρχουν πίνακες* $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ *έτσι ώστε:* $A^2 + I_n = O$.

Άσκηση 15. *Θεωρούμε* 2×2 *πίνακες* A *και* B *με στοιχεία από το σώμα* $\mathbb{K}$ *και υποθέτουμε ότι:*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} y & x-1 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$$

όπου $x, y \in \mathbb{K}$. *Να βρεθούν οι αριθμοί* x, y. *Αν ο πίνακας* A *είναι γνωστός, μπορεί να προσδιοριστεί ο πίνακας* B;

Άσκηση 16. *Έστω* A *ένας αντισυμμετρικός* $n \times n$ *πίνακας με στοιχεία από το σώμα* $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ *ή* $\mathbb{R}$ *ή* $\mathbb{C}$. *Αν ο* n *είναι περιττός, να δειχθεί ότι* $|A| = 0$. *Ακολούθως να δοθούν παραδείγματα αντισυμμετρικών* 2×2 *και* 4×4 *πινάκων με μη μηδενική ορίζουσα.*

Άσκηση 17. *Να λυθεί η εξίσωση* $\begin{vmatrix} 2-x & 1 & i \\ 1 & 2-x & i \\ -i & -i & 2-x \end{vmatrix} = 0$, *όπου* $i^2 = -1$.

Άσκηση 18. *Να υπολογισθεί η* $n \times n$ *ορίζουσα* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

Άσκηση 19. *Να υπολογισθεί η* $n \times n$ *ορίζουσα* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

Άσκηση 20. *Να υπολογιστεί η ορίζουσα του* $n \times n$ *πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

Άσκηση 21. *Να υπολογισθεί η* $n \times n$ *ορίζουσα* $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$.

Άσκηση 22. *Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 23. *Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 24. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{pmatrix}$$

Άσκηση 25. *Να υπολογισθεί η $2n \times 2n$ ορίζουσα* $\begin{vmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \cdots & \beta & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \beta & \cdots & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{vmatrix}$.

Άσκηση 26. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα του ακόλουθου $n \times n$ πίνακα A, όπου $x \in \mathbb{R}$:*

$$A = \begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 27. *Να υπολογιστεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα:*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1-n & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1-n \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 28. *Να λυθεί η εξίσωση ως προς x: $|A| = 0$, όπου A είναι ο ακόλουθος $n \times n$ πίνακας:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-2-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n-1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & n-x \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 29. *Πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να έχει η ορίζουσα ενός 5×5 πίνακα τής μορφής*

$$A = \begin{pmatrix} \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star \end{pmatrix};$$

(Με «$\star$» συμβολίζουμε αυθαίρετες τιμές στοιχείων του $\mathbb{K}$).

Η **ακολουθία Fibonacci** F_n, $n \geq 0$, είναι η ακολουθία φυσικών αριθμών η οποία ορίζεται ως εξής:

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 2, \quad F_3 = 3, \quad F_4 = 5, \quad F_5 = 8, \quad F_6 = 13, \quad F_7 = 21, \quad F_8 = 34, \quad F_9 = 55$$

και κάθε όρος της, εκτός του μηδενικού, είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενων, δηλαδή, $\forall n \geq 1$:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Άσκηση 30. *Να δειχθεί ότι για κάθε $n \geq 1$, η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

συμπίπτει με τον n-οστό όρο της ακολουθίας Fibonacci, δηλαδή: $|A_n| = F_n$, $\forall n \geq 1$.

Άσκηση 31. *Έστω ότι x, y είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{pmatrix}$$

Άσκηση 32. *Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{pmatrix}$$

Άσκηση 33. *Έστω ότι x είναι ένας πραγματικός αριθμός. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} a & x & x & \cdots & x & x \\ x & a & x & \cdots & x & x \\ x & x & a & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a & x \\ x & x & x & \cdots & x & a \end{pmatrix}$$

Η επόμενη Άσκηση αποτελεί γενίκευση της Άσκησης 33.

Άσκηση 34. *Έστω ότι $x, a_1, a_2, \cdots, a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_{n-1} & x \\ x & x & x & \cdots & x & a_n \end{pmatrix}$$

Άσκηση 35. *Έστω $r_1, r_2, \cdots, r_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1+r_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+r_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+r_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+r_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+r_n \end{pmatrix}$$

Άσκηση 36. *Έστω ότι $x, a_1, a_2, \cdots, a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x+a_n \end{pmatrix}$$

Άσκηση 37. *Έστω ότι x, y είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & x & x & \cdots & x & x \\ y & 0 & x & \cdots & x & x \\ y & y & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & 0 & x \\ y & y & y & \cdots & y & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 38. *Να υπολογιστεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$*

$$V(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Η ορίζουσα $|V(x_1, x_2, \cdots, x_n)|$ καλείται **ορίζουσα Vandermonde τάξης** *n.*