ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

Λυσεις Ασκησεων - Φυλλαδιο 3

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:
http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI/LAI2019/LAI2019.html

Παρασκευή 8 Νοεμβρίου 2019

Άσκηση 1. *Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Να δειχθούν τα εξής:*

(1)

$$A \xmapsto{\Sigma_i \longrightarrow \Sigma_i + \lambda \Sigma_j} A \cdot {}^t E_{ij}(\lambda)$$

όπου ${}^t E_{ij}(\lambda)$ είναι ο ανάστροφος του στοιχειώδους $n \times n$ πίνακα $E_{ij}(\lambda)$

(2)

$$A \xmapsto{\Sigma_i \longleftrightarrow \Sigma_j} A \cdot E_{ij}$$

όπου ο στοιχειώδης πίνακας $E_{ij} = {}^t E_{ij}$ είναι μεγέθους $n \times n$.

(3)

$$A \xmapsto{\Sigma_i \longrightarrow \lambda \Sigma_i} A \cdot E_i(\lambda)$$

όπου ο στοιχειώδης πίνακας $E_i(\lambda) = {}^t E_i(\lambda)$ είναι μεγέθους $n \times n$.

Άσκηση 2. *Έστω A ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας. Να εξεταστεί πως θα μετασχηματισθεί ο πίνακας A^{-1} όταν στις γραμμές του πίνακα A εκτελέσουμε τις ακόλουθες πράξεις, όπου $1 \leq i, j \leq n$, $\lambda \in \mathbb{K}$, και $k \in \mathbb{K}$, $k \neq 0$:*

(1) $\Gamma_i \longrightarrow \Gamma_i + \lambda \Gamma_j$,
(2) $\Gamma_i \longleftrightarrow \Gamma_j$.
(3) $\Gamma_i \longrightarrow k\Gamma_i$.

Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Ο πίνακας A καλείται **αριστερά αντιστρέψιμος** αν και μόνον αν υπάρχει $n \times m$ πίνακας Y έτσι ώστε $YA = I_n$, και τότε ο πίνακας Y καλείται ένας **αριστερός αντίστροφος** του A. Παρόμοια, ο πίνακας A καλείται **δεξιά αντιστρέψιμος** αν και μόνον αν υπάρχει $n \times m$ πίνακας X έτσι ώστε $AX = I_m$, και τότε ο πίνακας X καλείται ένας **δεξιός αντίστροφος** του A.

Άσκηση 3 (Βλέπε την Άσκηση 7 για ένα ελαφρώς γενικότερο αποτέλεσμα). *Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ο A είναι τετραγωνικός και είναι αριστερά και δεξιά αντιστρέψιμος.*

Άσκηση 4. *Θεωρούμε τον* 3×2 *πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Να εξετασθεί αν ο πίνακας A *έχει δεξιούς ή αριστερούς αντίστροφους πίνακες.*

Υπενθυμίζουμε ότι η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή ενός πίνακα $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ είναι μοναδική και συμβολίζεται με $\Gamma(A)$. Η **βαθμίδα γραμμών** του πίνακα A ορίζεται να είναι το πλήθος των μη-μηδενικών γραμμών της ισχυρά γ-κλιμακωτής μορφής $\Gamma(A)$ του πίνακα A και συμβολίζεται με $\gamma(A)$. Προφανώς: $\gamma(A) \leq m$.

Παρόμοια η ισχυρά σ-κλιμακωτή μορφή νός πίνακα $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ είναι μοναδική και συμβολίζεται με $\Sigma(A)$. Η **βαθμίδα στηλών** του πίνακα A ορίζεται να είναι το πλήθος των μη-μηδενικών γραμμών της ισχυρά σ-κλιμακωτής μορφής $\Sigma(A)$ του πίνακα A και συμβολίζεται με $\sigma(A)$. Προφανώς: $\sigma(A) \leq n$.

Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι, για κάθε πίνακα $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, ισχύει ότι: $\gamma(A) = \sigma(A)$ και η κοινή αυτή τιμή καλείται η **βαθμίδα** του πίνακα A και συμβολίζεται με:

$$\mathbf{r}(A) = \sigma(A) = \gamma(A)$$

Παρατηρούμε ότι η βαθμίδα $\mathbf{r}(A)$ ενός πίνακα $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ικανοποιεί την ανισότητα

$$\mathbf{r}(A) \ \leq \ \min\big\{m, n\big\} \tag{$*$}$$

Άσκηση 5. *Έστω* $A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Να δειχθεί ότι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

(1) $\gamma(A) = m$.
(2) *Υπάρχει πίνακας* $B \in \mathsf{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ *έτσι ώστε:* $AB = I_m$.

Επιπλέον να δειχθεί ότι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(3) $\sigma(A) = n$.
(4) *Υπάρχει πίνακας* $C \in \mathsf{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ *έτσι ώστε:* $CA = I_n$.

Άσκηση 6. *Έστω* $A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Να δειχθεί ότι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

(1) $\sigma(A) = n$.
(2) *Υπάρχει πίνακας* $C \in \mathsf{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ *έτσι ώστε:* $CA = I_n$.

Άσκηση 7. *Έστω* A *ένας* $m \times n$ *πίνακας με στοιχεία από το σώμα* $\mathbb{K}$. *Να δειχθεί ότι, αν ο* A *έχει έναν αριστερό αντίστροφο* X *και έναν δεξιό αντίστροφο* Y, *τότε* $m = n$, $X = Y$, *ο πίνακας* A *είναι αντιστρέψιμος και* $A^{-1} = X = Y$.

Ιδιαίτερα ισχύει ότι: ένας πίνακας A *είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν έχει δεξιό και αριστερό αντίστροφο.*

Μέθοδος εύρεσης αντίστροφου ενός αντιστρέψιμου πίνακα με χρήση στοιχειωδών πράξεων

Υπενθυμίζουμε ότι αν

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

είναι ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τον $n \times 2n$ πίνακα

$$\big(A \,|\, I_n\big) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

Εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του πίνακα $(A|I_3)$ με σκοπό να προσδιορίσουμε την ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή $\Gamma(A)$ του πίνακα A. Τότε ο πίνακας $(A|I_3)$ θα μετατραπεί σε έναν πίνακα της μορφής

$$\big(\Gamma(A) \,|\, X\big)$$

1. Αν $\Gamma(A) = I_n$, τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = X$.
2. Αν $\Gamma(A) \neq I_n$, τότε ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 8. *Να βρεθεί η ισχυρά κλιμακωτή μορφή του πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ακολούθως, αν ο A είναι αντιστρέψιμος, να βρεθεί ο A^{-1} με χρήση πράξεων επί των γραμμών του.

Άσκηση 9. *Αν $a \in \mathbb{K}$, να βρεθεί η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ a & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

και ακολούθως να βρεθεί η τιμή του a για τις οποίες ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Ποιός είναι τότε ο αντίστροφος του A;

Άσκηση 10. *Να βρεθεί η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή των πινάκων*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ακολούθως, αν οι πίνακες είναι αντιστρέψιμοι, να βρεθούν οι αντίστροφοί τους με χρήση πράξεων επί των γραμμών τους.

Άσκηση 11. *Να βρεθεί η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή των πινάκων*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ακολούθως, αν οι πίνακες είναι αντιστρέψιμοι, να βρεθούν οι αντίστροφοί τους με χρήση πράξεων επί των γραμμών τους.

Άσκηση 12. *Να βρεθεί η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή των πινάκων*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ακολούθως, αν οι πίνακες είναι αντιστρέψιμοι, να βρεθούν οι αντίστροφοί τους με χρήση πράξεων επί των γραμμών τους.

Άσκηση 13. *Να δειχθεί ότι οι παρακάτω πίνακες είναι αντιστρέψιμοι και να βρεθούν οι αντίστροφοι τους:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 14. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 11 & 0 & -4 & 8 \\ -1 & 2 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή $\Gamma(A)$ του A και ένας αντιστρέψιμος 4×4 πίνακας P έτσι ώστε: $PA = \Gamma(A)$. Ποιά είναι η βαθμίδα του A;

Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι για κάθε πίνακα $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$, υπάρχει αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας P και αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας Q έτσι ώστε

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ \hline O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{array} \right)$$

όπου $r = \sigma(A) = \gamma(A)$ είναι η κοινή τιμή της βαθμίδας γραμμών και της βαθμίδας στηλών του πίνακα A, και $O_{r\times(n-r)}$ είναι ο μηδενικός $r \times (n-r)$ πίνακας, $O_{(m-r)\times r}$ είναι ο μηδενικός $(m-r)\times r$ πίνακας, $O_{(m-r)\times(n-r)}$ είναι ο μηδενικός $(m-r)\times(n-r)$ πίνακας, και τέλος I_r είναι ο μοναδιαίος $r \times r$ πίνακας. Ο παραπάνω πίνακας γράφεται πιο απλά ως

$$\mathsf{K}(A) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right)$$

και καλείται η **κανονική μορφή** του πίνακα A. Με άλλα λόγια, κάθε $m\times n$ πίνακας A μπορεί να μετατραπεί, μετά την εκτέλεση πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές **και** στις στήλες του, σε έναν κανονικό πίνακα, ο οποίος καλείται η **κανονική μορφή** του A, και συμβολίζεται με $\mathsf{K}(A)$. Σημειώνουμε ότι ο πίνακας $\mathsf{K}(A)$ καθορίζεται πλήρως από το μέγεθος και τη βαθμίδα του πίνακα A.

Άσκηση 15. *Να βρεθεί η κανονική μορφή του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 11 & 0 & -4 & 8 \\ -1 & 2 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

της Άσκησης 14. Επιπλέον να βρεθεί ένας αντιστρέψιμος 4×4 πίνακας P και ένας αντιστρέψιμος 5×5 πίνακας Q έτσι ώστε

$$PAQ = \mathsf{K}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 16. *Να βρεθεί η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 6 & 5 & 13 \\ -3 & -9 & 0 & -6 & -6 & -18 \end{pmatrix}$$

και ακολούθως να βρεθεί η κανονική μορφή του πίνακα A.

Άσκηση 17. *Να βρεθεί η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή και η κανονική μορφή του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & a \end{pmatrix}$$

όπου $a \in \mathbb{K}$.

Δύο $m \times n$ πίνακες A και B καλούνται γ-**ισοδύναμοι** αν ο B προκύπτει από τον A μετά την εκτέλεση πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές του A. Γνωρίζουμε τότε ότι: οι πίνακες A και B είναι γ-ισοδύναμοι αν υπάρχουν στοιχειώδεις $m\times m$ πίνακες $E_1, E_2, \cdots, E_p$ έτσι ώστε: $E_pE_{p-1}\cdots E_2E_1A = B$.

Ορίζουμε μια σχέση «$\sim_\gamma$» στο σύνολο $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, ως εξής: $\forall A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$: $A \sim_\gamma B$ αν και μόνον αν οι πίνακες A και B είναι γ-ισοδύναμοι, δηλαδή, $\forall A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$:

$$A \sim_\gamma B \iff \text{υπάρχουν στοιχειώδεις } m\times m \text{ πίνακες } E_1, E_2, \cdots, E_p: \quad E_pE_{p-1}\cdots E_2E_1A = B$$

Θέτοντας $P = E_pE_{p-1}\cdots E_2E_1$, αποκτούμε τότε έναν αντιστρέψιμο $m\times m$ πίνακα P για τον οποίο ισχύει ότι: $PA = B$. Επειδή κάθε αντιστρέψιμος πίνακας P είναι γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων, έπεται ότι:

$$A \sim_\gamma B \iff \text{υπάρχει αντιστρέψιμος } m\times m \text{ πίνακας } P: \quad PA = B$$

Άσκηση 18.

(1) *Να δειχθεί ότι η σχέση «$\sim_\gamma$» στο σύνολο $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ των $m\times n$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας.*
(2) *Να δειχθεί ότι ένας πίνακας A είναι γ-ισοδύναμος με τον μηδενικό πίνακα αν και μόνον αν $A = O$.*
(3) *Να δειχθεί ότι ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν είναι γ-ισοδύναμος με τον I_n.*
(4) *Να δειχθεί ότι δύο τυχόντες $n\times n$ αντιστρέψιμοι πίνακες είναι πάντα γ-ισοδύναμοι.*
(5) *Να δειχθεί ότι ένας αντιστρέψιμος πίνακας A είναι γ-ισοδύναμος με τον πίνακα A^n, $\forall n \in \mathbb{Z}$.*

Δύο $m\times n$ πίνακες A και B καλούνται σ-**ισοδύναμοι** αν ο B προκύπτει από τον A μετά την εκτέλεση πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πράξεων στις στήλες του A. Γνωρίζουμε τότε ότι: οι πίνακες A και B είναι σ-ισοδύναμοι αν υπάρχουν στοιχειώδεις $n\times n$ πίνακες $E_1, E_2, \cdots, E_q$ έτσι ώστε: $B = AE_1E_2\cdots E_{q-1}E_q$.

Ορίζουμε μια σχέση «$\sim_\sigma$» στο σύνολο $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, ως εξής: $\forall A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$: $A \sim_\sigma B$ αν και μόνον αν οι πίνακες A και B είναι σ-ισοδύναμοι, δηλαδή, $\forall A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$:

$$A \sim_\sigma B \iff \text{υπάρχουν στοιχειώδεις } m\times m \text{ πίνακες } E_1, E_2, \cdots, E_q : \quad AE_1E_2\cdots E_{q-1}E_q = B$$

Θέτοντας $Q = E_1E_2\cdots E_{q-1}E_q$, αποκτούμε τότε έναν αντιστρέψιμο $n\times n$ πίνακα Q για τον οποίο ισχύει ότι: $B = AQ$. Επειδή κάθε αντιστρέψιμος πίνακας Q είναι γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων, έπεται ότι:

$$A \sim_\sigma B \iff \text{υπάρχει αντιστρέψιμος } n\times n \text{ πίνακας } Q : \quad B = AQ$$

Άσκηση 19. (1) *Να δειχθεί ότι η σχέση «$\sim_\sigma$» στο σύνολο $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ των $m\times n$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας.*
(2) *Να δειχθεί ότι ένας πίνακας A είναι σ-ισοδύναμος με τον μηδενικό πίνακα αν και μόνον αν $A = O$.*
(3) *Να δειχθεί ότι ένας τετραγωνικός $n\times n$ πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν είναι σ-ισοδύναμος με τον I_n.*
(4) *Να δειχθεί ότι δύο τυχόντες $n\times n$ αντιστρέψιμοι πίνακες είναι πάντα σ-ισοδύναμοι.*
(5) *Να δειχθεί ότι ένας αντιστρέψιμος πίνακας A είναι σ-ισοδύναμος με τον πίνακα A^n, $\forall n \in \mathbb{Z}$.*

Δύο $m\times n$ πίνακες A και B καλούνται **ισοδύναμοι** αν ο B προκύπτει από τον A μετά την εκτέλεση πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές και στις στήλες του A. Γνωρίζουμε τότε ότι: οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι αν υπάρχουν στοιχειώδεις $n\times n$ πίνακες $E'_1, E'_2, \cdots, E'_q$, και στοιχειώδεις $m\times m$ πίνακες $E_1, E_2, \cdots, E_p$ έτσι ώστε:έτσι ώστε:

$$E_pE_{p-1}\cdots E_2E_1\, A\, E'_1E'_2\cdots E'_{q-1}E'_q = B$$

Επειδή ένας τετραγωνικό πίνακαςε είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων, έπεται ότι οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι αν και μόνον αν υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $m\times m$ πίνακας P και ένας αντιστρέψιμος $n\times n$ πίνακας Q έτσι ώστε: $PAQ = B$.

Ορίζουμε μια σχέση «$\sim$» στο σύνολο $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, ως εξής: $\forall A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$: $A \sim B$ αν και μόνον αν οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι, δηλαδή, $\forall A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$:

$$A \sim B \iff \text{υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακές } P \in \mathsf{M}_m(\mathbb{K}) \text{ και } Q \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \text{ έτσι ώστε : } \quad PAQ = B$$

Άσκηση 20. (1) *Να δειχθεί ότι η σχέση «$\sim$» στο σύνολο $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ των $m\times n$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας.*
(2) *Να δειχθεί ότι ένας πίνακας A είναι ισοδύναμος με τον μηδενικό πίνακα αν και μόνον αν $A = O$.*
(3) *Να δειχθεί ότι ένας τετραγωνικός $n\times n$ πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν είναι ισοδύναμος με τον I_n.*
(4) *Να δειχθεί ότι δύο τυχόντες $n\times n$ αντιστρέψιμοι πίνακες είναι πάντα ισοδύναμοι.*
(5) *Να δειχθεί ότι ένας αντιστρέψιμος πίνακας A είναι ισοδύναμος με τον πίνακα A^n, $\forall n \in \mathbb{Z}$.*

Άσκηση 21. *Έστω $A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.*
(1) *Να δειχθεί ότι:*

$$A \sim_\gamma B \implies A \sim B$$

Ισχύει η αντίστροφη συνεπαγωγή;
(2) *Να δειχθεί ότι:*

$$A \sim_\sigma B \implies A \sim B$$

Ισχύει η αντίστροφη συνεπαγωγή;

Άσκηση 22. *Να δειχθεί ότι δύο $m \times n$ πίνακες είναι ισοδύναμοι αν έχουν την ίδια βαθμίδα*[1]*:*

$$\forall A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K}): \qquad \mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(B) \quad \Longrightarrow \quad A \sim B$$

Άσκηση 23. *Έστω $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ και υποθέτουμε ότι $\mathbf{r}(A) = r$. Να δειχθεί ότι υπάρχουν πίνακες $B \in \mathsf{M}_{m\times r}(\mathbb{K})$ και $C \in \mathsf{M}_{r\times n}(\mathbb{K})$ έτσι ώστε:*

$$A = B\,C$$

Άσκηση 24. *Να λυθεί το σύστημα:*

$$(\Sigma)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

Άσκηση 25. *Να λυθεί το σύστημα:*

$$(\Sigma)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & 6x_3 & = & 8 \end{array}\right.$$

Άσκηση 26. *Να λυθεί το σύστημα:*

$$(\Sigma)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 8x_1 & + & 12x_2 & - & 9x_3 & + & 8x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 9x_3 & + & -7x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Άσκηση 27. *Να λυθεί το σύστημα:*

$$(\Sigma)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & \lambda \\ -4x_1 & + & 4x_2 & - & 4x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & -\lambda \end{array}\right.$$

Άσκηση 28. *Να λυθεί το σύστημα:*

$$(\Sigma)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 1-2\lambda \\ & & x_2 & + & x_3 & & & & & = & -2\lambda \\ & & & & & & x_4 & - & x_5 & = & 1-\lambda \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 2-2\lambda \end{array}\right.$$

Άσκηση 29. *Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να λυθεί το ακόλουθο σύστημα:*

$$(\Sigma):\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & - & x_6 & + & 0x_7 & = & 0 \\ 0x_1 & + & x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & x_5 & - & x_6 & + & 0x_7 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & - & 2x_6 & + & x_7 & = & 1 \\ x_1 & + & 0x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 0x_5 & + & 0x_6 & + & 0x_7 & = & -\lambda \end{array}\right.$$

[1] Θα δείξουμε αργότερα με χρήση γραμμικών απεικονίσεων ότι:

$$\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(B) \quad \Longleftrightarrow \quad A \sim B$$

Άσκηση 30. *Να λυθεί το σύστημα* ($\lambda \in \mathbb{R}$):

$$(\Sigma) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & + & \lambda z & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & \lambda \end{array} \right.$$

Άσκηση 31. *Αν* $a, b \in \mathbb{R}$, *να λυθεί το σύστημα:*

$$(\Sigma) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & z & = & -6a \\ 2x & + & y & + & (b+1)z & = & 4 \\ bx & + & 3y & + & 2z & = & 3a \end{array} \right.$$

Άσκηση 32. *Να βρεθεί η ισχυρά* γ*-κλιμακωτή και η κανονική μορφή του πίνακα*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 4 & 2 \\ 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 1 \\ 5 & 8 & 9 & 10 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Ακολούθως να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$AX = B, \quad \text{όπου} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 4 \\ 4 & 7 & 10 & 13 & 16 \\ 5 & 8 & 9 & 10 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 33. *Θεωρούμε τον* 4×5 *πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί ένας αντιστρέψιμος 4×4 *πίνακας* P *και ένας αντιστρέψιμος* 5×5 *πίνακας* Q *έτσι ώστε ο πίνακας* PAQ *να είναι ισχυρά* γ*-κλιμακωτός και ισχυρά* σ*-κλιμακωτός, δηλαδή ο πίνακας* PAQ *είναι η κανονική μορφή του πίνακα* A.

Ακολούθως να λυθεί το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$(\Sigma) \quad AX = O, \quad \text{όπου} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$