ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

Ασκησεις - Φυλλαδιο 4

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI/LAI2019/LAI2019.html

Παρασκευή 22 Νοεμβρίου 2019

Άσκηση 1. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι:*

$$\kappa\vec{x} + \lambda\vec{y} = \lambda\vec{x} + \kappa\vec{y} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \kappa = \lambda \\ \quad ή \\ \vec{x} = \vec{y} \end{cases}$$

Άσκηση 2. *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ μια τριάδα η οποία αποτελείται από ένα σύνολο $\mathcal{E}$, μια εσωτερική πράξη «πρόσθεσης» $+$ και μια εξωτερική πράξη «βαθμωτού πολλαπλασιασμού» του $\mathbb{K}$ επί του $\mathcal{E}$:*

$$+\colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \vec{x} + \vec{y} \qquad \textit{και} \qquad \cdot\colon \mathbb{K} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (k, \vec{x}) \longmapsto k \cdot \vec{x}$$

Να δειχθεί ότι η τριάδα $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$ αν και μόνο αν η τριάδα $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ ικανοποιεί τα αξιώματα (1)-(7) ενός διανυσματικού χώρου υπεράνω του $\mathbb{K}$, και το ακόλουθο αξίωμα

$$(8') \quad \forall k \in \mathbb{K}, \ \forall \vec{x} \in \mathcal{E}\colon \ k \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} k = 0 \\ \quad ή \\ \vec{x} = \vec{0} \end{cases}$$

Άσκηση 3. *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ μια τριάδα η οποία αποτελείται από ένα σύνολο $\mathcal{E}$, μια εσωτερική πράξη «πρόσθεσης» $+$ και μια εξωτερική πράξη «βαθμωτού πολλαπλασιασμού» του $\mathbb{K}$ επί του $\mathcal{E}$:*

$$+\colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \vec{x} + \vec{y} \qquad \textit{και} \qquad \cdot\colon \mathbb{K} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (k, \vec{x}) \longmapsto k \cdot \vec{x}$$

Υποθέτουμε ότι η τριάδα $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ ικανοποιεί όλα τα αξιώματα ενός διανυσματικού χώρου υπεράνω του $\mathbb{K}$, εκτός πιθανόν από το Αξίωμα (2), δηλαδή δεν απαιτούμε να ισχύει ότι, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}\colon \quad \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.

Να δειχθεί ότι ισχύει το Αξίωμα (2) και άρα η τριάδα $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$.

Άσκηση 4. *Να δειχθεί ότι το Αξίωμα (8) ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$, δηλαδή ότι, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}\colon \ 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$, δεν προκύπτει από τα υπόλοιπα αξιώματα.*

Άσκηση 5. *Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}^3$ μαζί με τις πράξεις:*

$$\oplus \ : \ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ \longrightarrow \ \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

και

$$\odot \ : \ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \ \longrightarrow \ \mathbb{R}^3, \quad r \odot (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

Να εξετάσετε αν με τις παραπάνω πράξεις το σύνολο $\mathbb{R}^3$ είναι $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος. Ποιά από τα αξιώματα που διέπουν τον ορισμό του διανυσματικού χώρου ισχύουν και ποια όχι;

Άσκηση 6. *Στο σύνολο των $n \times n$ πινάκων $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$, ορίζουμε δυο πράξεις:*

$$\oplus\,:\,\mathsf{M}_n(\mathbb{R})\,\times\,\mathsf{M}_n(\mathbb{R})\;\longrightarrow\;\mathsf{M}_n(\mathbb{R}),\qquad A\oplus B=-(A+B)$$

και

$$\odot\,:\,\mathbb{R}\,\times\,\mathsf{M}_n(\mathbb{R})\;\longrightarrow\;\mathsf{M}_n(\mathbb{R}),\qquad r\odot A=-(rA)$$

Οι πράξεις στα δεξιά μέλη των ανωτέρω ορισμών είναι οι γνωστές πράξεις πρόσθεσης πινάκων και βαθμωτού πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα. Να εξετάσετε ποια από τα αξιώματα που διέπουν τον ορισμό του διανυσματικού χώρου ισχύουν και ποια όχι.

Άσκηση 7. *Στο σύνολο* $\mathbb{R}^+=\{r\in\mathbb{R}\mid r>0\}$ *ορίζουμε τις πράξεις:*

$$\oplus\,:\,\mathbb{R}^+\,\times\,\mathbb{R}^+\;\longrightarrow\;\mathbb{R}^+,\qquad (a,b)\;\longmapsto\;a\oplus b=ab-1$$

και

$$\odot\,:\,\mathbb{R}\,\times\,\mathbb{R}^+\;\longrightarrow\;\mathbb{R}^+,\qquad (r,a)\;\longmapsto\;r\odot a=a$$

Να εξετάσετε αν η τριάδα $(\mathbb{R}^+,\oplus,\odot)$ αποτελεί διανυσματικό χώρο πάνω από το $\mathbb{R}$.

Άσκηση 8. *Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ορίζουμε πράξεις:*

$$\oplus\,:\,\mathbb{R}\,\times\,\mathbb{R}\;\longrightarrow\;\mathbb{R},\qquad (a,b)\;\longmapsto\;a\oplus b=ab$$

και

$$\odot\,:\,\mathbb{R}\,\times\,\mathbb{R}\;\longrightarrow\;\mathbb{R},\qquad (r,a)\;\longmapsto\;r\odot a=r+a$$

Να εξετάσετε αν η τριάδα $(\mathbb{R},\oplus,\odot)$ αποτελεί διανυσματικό χώρο πάνω από το $\mathbb{R}$.

Άσκηση 9. *Θεωρούμε έναν διανυσματικό χώρο $(\mathcal{E},+,\cdot)$ υπεράνω του σώματος των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$. Ορίζουμε μια νέα πράξη*

$$\odot\colon\mathbb{C}\times\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{E}\qquad z\odot\vec{x}=\overline{z}\cdot\vec{x}$$

Να δειχθεί ότι η τριάδα $(\mathbb{C}^n,+,\odot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{C}$.

Άσκηση 10. *Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{C}^n$ το οποίο θεωρούμε ότι είναι εφοδιασμένο με την συνήθη πράξη πρόσθεσης «$+$» κατά συνιστώσα:*

$$(z_1,z_2,\cdots,z_n)+(w_1,w_2,\cdots,w_n)=(z_1+w_1,z_2+w_2,\cdots,z_n+w_n)$$

Ορίζουμε μια πράξη

$$*\colon\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{C}^n,\qquad \omega*(z_1,z_2,\cdots,z_n)=(\omega\overline{z}_1,\omega\overline{z}_2,\cdots,\omega\overline{z}_n)$$

Να εξετασθεί αν η τριάδα $(\mathbb{C}^n,+,*)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{C}$. Αν η τριάδα $(\mathbb{C}^n,+,*)$ δεν είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{C}$, ποιά από τα οκτώ αξιώματα δεν ισχύουν;

Άσκηση 11. *Θεωρούμε έναν διανυσματικό χώρο $(\mathcal{E},+,\cdot)$ υπεράνω του σώματος των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$. Περιορίζοντας τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό $\cdot:\mathbb{C}\times\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{E}$ στο υποσύνολο $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$, ορίζεται μια νέα πράξη*

$$\star\colon\mathbb{R}\times\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{E}\qquad r\star\vec{x}=r\cdot\vec{x}$$

Να δειχθεί ότι η τριάδα $(\mathcal{E},+,\star)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$.

Άσκηση 12. *Να δειχθεί ότι το υποσύνολο:*

$$\mathcal{V} = \big\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid c = a-b,\ d = a+b\big\} \quad \subseteq \quad \mathbb{R}^4$$

αποτελεί έναν $\mathbb{R}$*-υπόχωρο του* $\mathbb{R}^4$.

Άσκηση 13. *Να εξεταστεί ποια από τα ακόλουθα υποσύνολα τού* $\mathbb{R}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathbb{R}^4$ *είναι υπόχωροί του:*

(1) $\mathcal{W}_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y, z = t\}$,
(2) $\mathcal{W}_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0\}$,
(3) $\mathcal{W}_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 1\}$,
(4) $\mathcal{W}_4 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid xt = yz\}$.

Άσκηση 14. *Να εξετασθεί ποιά από τα ακόλουθα υποσύνολα των αντίστοιχων διανυσματικών χώρων είναι υπόχωροι:*

(1) $\mathcal{V}_1 = \big\{(a,b,1) \in \mathbb{R}^3 \mid a,b \in \mathbb{R}\big\}$, *στον* $\mathbb{R}$*-διανυσματικό χώρο* $\mathbb{R}^3$.
(2) $\mathcal{V}_2 = \big\{(a,b,a+2b) \in \mathbb{R}^3 \mid a,b \in \mathbb{R}\big\}$, *στον* $\mathbb{R}$*-διανυσματικό χώρο* $\mathbb{R}^3$.
(3) $\mathcal{V}_3 = \big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+2b-c = 0,\ \ a,b,c \in \mathbb{R}\big\}$, *στον* $\mathbb{R}$*-διανυσματικό χώρο* $\mathbb{R}^3$.
(4) $\mathcal{V}_4 = \big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \geq 0 \ \ \textit{και} \ \ c \leq 0\big\}$, *στον* $\mathbb{R}$*-διανυσματικό χώρο* $\mathbb{R}^3$.
(5) $\mathcal{V}_5 = \{A \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^2 = A\}$, *στον* $\mathbb{R}$*-διανυσματικό χώρο* $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.
(6) $\mathcal{V}_6 = \{A \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^2 = \mathbb{O}\}$, *στον* $\mathbb{R}$*-διανυσματικό χώρο* $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.
(7) $\mathcal{V}_7 = \{f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(1) = 1\}$, *στον* $\mathbb{R}$*-διανυσματικό χώρο* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
(8) $\mathcal{V}_8 = \{f \colon (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(\frac{1}{2}) = 0\}$, *στον* $\mathbb{R}$*-διανυσματικό χώρο* $\mathcal{F}\big((-1,1),\mathbb{R}\big)$.

Άσκηση 15. *Θεωρούμε το σώμα* $\mathbb{K}$ *ως* $\mathbb{K}$*-διανυσματικό χώρο. Να δείξετε ότι οι μόνοι υπόχωροι του* $\mathbb{K}$ *είναι οι:*

$$\big\{0\big\} \qquad \textit{και} \qquad \mathbb{K}$$

Άσκηση 16. *Αν* $\mathbb{K}$ *είναι ένα σώμα, να βρεθούν όλοι οι υπόχωροι του* $\mathbb{K}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathbb{K}^2$.

Άσκηση 17. *Να εξετασθεί ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του* $\mathbb{R}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathsf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ *είναι υπόχωροι:*

(1) $\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \mid b = a+c \right\}$
(2) $\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \mid c > 0 \right\}$

Άσκηση 18. *Στον* $\mathbb{R}$*-διανυσματικό χώρο* $\mathbb{R}^3$, *θεωρούμε τα διανύσματα*

$$\vec{x} = (1,1,0) \qquad \textit{και} \qquad \vec{y} = (2,1,1)$$

Να βρεθεί μια αναγκαία και ικανή συνθήκη έτσι ώστε το διάνυσμα $\vec{z} = (a,b,c)$ *να ανήκει στον υπόχωρο* $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ *του* $\mathbb{R}^3$ *ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα* $\vec{x}$ *και* $\vec{y}$.

Άσκηση 19. *Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο* $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ *πάνω από το* $\mathbb{R}$ *και τα παρακάτω υποσύνολά του:*

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

και

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & c+d \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι τα υποσύνολα* $\mathcal{V}$ *και* $\mathcal{W}$ *είναι υπόχωροι του* $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.
(2) *Να βρεθεί η μορφή των στοιχείων του υποχώρου* $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$.

Υπενθυμίζουμε ότι, γενικά, η ένωση υπόχωρων ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$ δεν είναι υπόχωρος του $\mathcal{E}$. Η επόμενη Άσκηση δίνει έναν χαρακτηρισμό για το πότε η ένωση δύο υπόχωρων ενός διανυσματικού χώρου είναι υπόχωρος.

Άσκηση 20. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας* $\mathbb{K}$*-διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος* $\mathbb{K}$ *και* $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ *δύο υπόχωροί του. Να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(1) *Η ένωση* $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ *των συνόλων* $\mathcal{V}$ *και* $\mathcal{W}$ *είναι υπόχωρος του* $\mathcal{E}$.
(2) *Είτε* $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ *είτε* $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$.

Να συμπεράνετε ότι δεν υπάρχει $\mathbb{K}$*-διανυσματικός χώρος ο οποίος είναι ένωση δύο γνήσιων υπόχωρών του.*

Άσκηση 21. *Έστω ότι* $\mathcal{E}$ *είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος* $\mathbb{K}$*, όπου* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$*, και έστω ότι* $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3$ *είναι υπόχωροι του* $\mathcal{E}$. *Να δειχθεί ότι:*

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \cup \mathcal{V}_3 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, k = 1,2,3: \quad \mathcal{V}_k = \mathcal{E}$$

δηλαδή δεν υπάρχει $\mathbb{K}$*-διανυσματικός χώρος ο οποίος είναι ένωση τριών γνήσιων υπόχωρών του.*

Υπάρχουν όμως σώματα $\mathbb{K} \notin \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ *και* $\mathbb{K}$*-διανυσματικοί χώροι οι οποίοι είναι ένωση τριών γνήσιων υπόχωρων.*

Άσκηση 22. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος* $\mathbb{K}$ *και έστω* $\{\mathcal{V}_i\}_{i=0}^{\infty}$ *μια συλλογή υπόχωρων του* $\mathcal{E}$ *έτσι ώστε:*

$$\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2 \subseteq \cdots\cdots \subseteq \mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{V}_{n+1} \subseteq \cdots$$

Να δειχθεί ότι η ένωση $\mathcal{V} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{V}_i$ *είναι ένας υπόχωρος του* $\mathcal{E}$.

Άσκηση 23. *Να προσδιοριστούν όλοι οι διανυσματικοί χώροι* $\mathcal{E}$ *οι οποίοι ικανοποιούν την ακόλουθη ιδιότητα:*

$$\text{Αν } \mathcal{V}, \mathcal{W} \text{ είναι υπόχωροι του } \mathcal{E}, \text{ τότε}: \quad \text{είτε } \mathcal{V} \subseteq \mathcal{W} \text{ είτε } \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V} \qquad (\dagger)$$

Άσκηση 24. *Έστω* $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots$ *μια ακολουθία διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου* $\mathcal{E}$ *υπεράνω του σώματος* $\mathbb{K}$. *Να δειχθεί ότι το υποσύνολο*

$$\mathcal{V} = \{\lambda_{i_1}\vec{x}_{i_1} + \lambda_{i_2}\vec{x}_{i_2} + \cdots + \lambda_{i_n}\vec{x}_{i_n} \in \mathcal{E} \mid \lambda_{i_j} \in \mathbb{K},\ i_j \geq 0,\ 1 \leq j \leq n\}$$

είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{E}$, τότε οι ακόλουθες πράξεις επί των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$, καλούνται **στοιχειώδεις πράξεις επί των διανυσμάτων του συνόλου** $\mathcal{X}$:

(1) Αντικατάσταση του διανύσματος $\vec{x}_i$ με το διάνυσμα $\vec{x}_i + \lambda\vec{x}_j$:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall i,j = 1,2,\cdots,n: \quad \vec{x}_i \longmapsto \vec{x}_i + \lambda\vec{x}_j$$

(2) Αμοιβαία εναλλαγή των διανυσμάτων $\vec{x}_i$ και $\vec{x}_j$:

$$\forall i,j = 1,2,\cdots,n: \quad \vec{x}_i \longleftrightarrow \vec{x}_j$$

(3) Αντικατάσταση του διανύσματος $\vec{x}_i$ με το διάνυσμα $\lambda\vec{x}_i$:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \neq 0,\ \forall i = 1,2,\cdots,n: \quad \vec{x}_i \longmapsto \lambda\vec{x}_i$$

Υπενθυμίζουμε ότι: ο υπόχωρος του $\mathcal{E}$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ παραμένει αμετάβλητος μετά από την εφαρμογή πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πράξεων επι των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $B \subseteq A$ είναι ένα υποσύνολο του συνόλου A, τότε:

$$A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}$$

συμβολίζει το σύνολο των στοιχείων του A τα οποία δεν ανήκουν στο υποσύνολο B.

Άσκηση 25. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{E}$. Συμβολίζουμε με $\langle \mathcal{X} \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n \rangle$ τον υπόχωρο του $\mathcal{E}$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ του συνόλου $\mathcal{X}$.*

(1) *Αν $\mathcal{Y}$ είναι ένα τυχόν υποσύνολο του $\mathcal{X}$, τότε: $\langle \mathcal{Y} \rangle \subseteq \langle \mathcal{X} \rangle$.*
(2) *Αν $\mathcal{Y}$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\langle \mathcal{Y} \rangle$, τότε: $\langle \mathcal{Y} \rangle \subseteq \langle \mathcal{X} \rangle$.*
(3) *Αν υπάρχει $i = 1, 2, \cdots, n$: $\vec{x}_i \in \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \cdots, \vec{x}_n \rangle$, τότε:*

$$\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_i, \vec{x}_{i+1}, \cdots, \vec{x}_n \rangle = \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \cdots, \vec{x}_n \rangle$$

(4) *Έστω ότι $\mathcal{Y}$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathcal{X}$ και υποθέτουμε ότι κάθε διάνυσμα του $\mathcal{Y}$ ανήκει στον υπόχωρο ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα του υποσυνόλου $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$, δηλαδή $\mathcal{Y} \subseteq \langle \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y} \rangle$. Τότε:*

$$\langle \mathcal{X} \rangle = \langle \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y} \rangle$$

Άσκηση 26. *Να βρεθεί ο υπόχωρος που παράγεται από τα διανύσματα $(3, 5, -4)$, $(-3, -2, 4)$, $(6, 1, -8)$ τού $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$.*

Άσκηση 27. *Έστω ότι $a_1, a_2, \cdots, a_n$ είναι στοιχεία ενός σώματος $\mathbb{K}$, και θεωρούμε το ακόλουθο υποσύνολο του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}^{n+1}$:*

$$\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x_{n+1} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_{n-1} x_{n-1} + a_n x_n\}$$

Να δειχθεί ότι το υποσύνολο $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{K}^{n+1}$.

Άσκηση 28. *Έστω $\mathsf{A}(\mathbb{R})$ το σύνολο των ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Στο $\mathsf{A}(\mathbb{R})$ ορίζουμε πρόσθεση*

$$\begin{aligned} + \ : \mathsf{A}(\mathbb{R}) \times \mathsf{A}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathsf{A}(\mathbb{R}), \\ \big((a_n)_{n\in\mathbb{N}},\, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) &\longmapsto (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

και βαθμωτό πολλαπλασιασμό

$$\cdot \ : \ \mathbb{R} \times \mathsf{A}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathsf{A}(\mathbb{R}), (\lambda, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \longmapsto \lambda \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(1) *Να δειχθεί ότι η τριάδα $(\mathsf{A}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ αποτελεί $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο.*
(2) *Ας είναι $\mathsf{A}_\Sigma(\mathbb{R})$ το υποσύνολο τού $\mathsf{A}(\mathbb{R})$ που απαρτίζεται από τις ακολουθίες που συγκλίνουν σε κάποιον πραγματικό αριθμό. Ποιες γνωστές προτάσεις τού Απειροστικού Λογισμού εξασφαλίζουν ότι το $\mathsf{A}_\Sigma(\mathbb{R})$ είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος τού $\mathsf{A}(\mathbb{R})$;*

Άσκηση 29. *Να εξεταστεί ποιο από τα επόμενα υποσύνολα τού $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{R}$ αποτελεί υποχώρο τού $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$:*

(1) *Το σύνολο $\mathsf{S}_n(\mathbb{R})$ των συμμετρικών $n \times n$ πινάκων.*
(2) *Το σύνολο $\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ των αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων.*
(3) *Το σύνολο των μη αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων.*

Υπενθυμίζουμε ότι η τομή $\bigcap_{i\in I}\mathcal{V}_i$ μιας οικογένειας $\{\mathcal{V}_i\}_{i\in I}$ υπόχωρων ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{E}$. Αν $X \subseteq \mathcal{E}$ είναι ένα τυχόν μη-κενό υποσύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{E}$, τότε ο υπόχωρος

$$\langle X\rangle = \bigcap\big\{\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E} \mid \text{ο } \mathcal{V} \text{ είναι υπόχωρος του } \mathcal{E} \text{ και } X \subseteq V\big\}$$

δηλαδή η τομή της οικογένειας όλων των υπόχωρων του $\mathcal{E}$ οι οποιοι περιέχουν το υποσύνολο X (η οικογένεια αυτή δεν είναι κενή καθώς περιέχει τον υπόχωρο $\mathcal{E}$), είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$ ο οποίος καλείται **ο υπόχωρος του** $\mathcal{E}$ **ο οποίος παράγεται από το υποσύνολο διανυσμάτων** X.

Άσκηση 30. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Αν $X \subseteq \mathcal{E}$ είναι ένα τυχόν μη-κενό υποσύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{E}$, τότε*

$$\langle X\rangle = \big\{\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n \in \mathcal{E} \mid \lambda_i \in \mathbb{K} \ \&\ \vec{x}_i \in X,\ 1 \le i \le n,\ n \in \mathbb{N}\big\}$$

και το υποσύνολο $\langle X\rangle$ είναι ο μικρότερος υπόχωρος του $\mathcal{E}$ ο οποίος περιέχει το υποσύνολο X.

Υπενθυμίζουμε ότι γενικά η ένωση δύο υπόχωρων ενός διανυσματικού χώρου δεν είναι υπόχωρος. Έστω $\{\mathcal{V}_i\}_{i\in I}$ μια οικογένεια υπόχωρων του διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$. Συμβολίζουμε με

$$\sum_{i\in I}\mathcal{V}_i = \Big\langle \bigcup_{i\in I}\mathcal{V}_i \Big\rangle$$

τον υπόχωρο του $\mathcal{E}$ ο οποίος παράγεται από το υποσύνολο διανυσμάτων $\bigcup_{i\in I}\mathcal{V}_i$ του $\mathcal{E}$. Ο υπόχωρος $\sum_{i\in I}\mathcal{V}_i$ καλείται **άθροισμα των υπόχωρων της οικογένειας** $\{\mathcal{V}_i\}_{i\in I}$.

Άσκηση 31. *Έστω $\{\mathcal{V}_i\}_{i\in I}$ μια οικογένεια υπόχωρων του διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$. Τότε*

$$\sum_{i\in I}\mathcal{V}_i = \big\{\vec{x}_{i_1} + \vec{x}_{i_2} + \cdots + \vec{x}_{i_n} \in \mathcal{E} \mid \vec{x}_{i_j} \in \mathcal{V}_{i_j} \ \&\ \{i_1, i_2, \cdots, i_n\} \subseteq I\big\}$$

δηλαδή ο υπόχωρος $\sum_{i\in I}\mathcal{V}_i$ αποτελείται από όλα τα πεπερασμένα αθροίσματα διανυσμάτων τα οποία ανήκουν στους υπόχωρους της οικογένειας, και είναι ο μικρότερος υπόχωρος του $\mathcal{E}$ ο οποίος περιέχει όλους τους υπόχωρους $\mathcal{V}_i$ της οικογένειας $\{\mathcal{V}_i\}_{i\in I}$.

Ιδιαίτερα, αν $I = \{1, 2, \cdots, n\}$, τότε:

$$\sum_{i=1}^{n}\mathcal{V}_i := \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n = \big\{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n \in \mathcal{E} \mid \vec{x}_i \in \mathcal{V}_i \ \ 1 \le i \le n\big\}$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$, τότε το σύνολο $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ καλείται **γραμμικά ανεξάρτητο**, αν για τυχόντα στοιχεία $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n = \vec{0} \quad\Longrightarrow\quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Το σύνολο διανυσμάτων $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ καλείται **γραμμικά εξαρτημένο**, αν δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο ή ισοδύναμα, αν:

$$\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}: \quad (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \neq (0, 0, \cdots, 0) \quad \text{και} \quad \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n = \vec{0}$$

Άσκηση 32. *Ας είναι*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ένας $n \times n$ πίνακας με συνιστώσες από ένα σώμα $\mathbb{K}$ και ας είναι

$$\vec{A}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \qquad 1 \leq j \leq n$$

η j-οστή στήλη τού πίνακα A την οποία θεωρούμε ως διάνυσμα του χώρου των στηλών $\mathbb{K}_n$.

Να δειχθεί ότι το γραμμικό ομογενές σύστημα

$$A \cdot X = O, \qquad \textit{όπου} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \textit{και} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

έχει μόνο τη μηδενική λύση, αν και μόνο αν, οι στήλες $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \cdots, \vec{A}_n$ τού A είναι $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα το χώρου των στηλών $\mathbb{K}_n$.

Άσκηση 33. *Ας είναι A ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.*
(2) *Οι στήλες τού πίνακα A είναι $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα τού χώρου των στηλών $\mathbb{K}_n$.*
(3) *Οι γραμμές τού πίνακα A είναι $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα τού χώρου $\mathbb{K}^n$.*

Άσκηση 34. *Να εξεταστεί αν τα διανύσματα $(3, 5, -4)$, $(-3, -2, 4)$, $(6, 1, -8)$ τού $\mathbb{R}^3$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητα ή όχι.*

Έστω $\mathbb{K}[x]$ ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Υπενθυμίζουμε ότι ο **βαθμός** ενός μη-μηδενικού πολυωνύμου $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, όπου $a_i \in \mathbb{K}$, $0 \leq i \leq n$, ορίζεται να είναι ο μη-αρνητικός ακέραιος

$$\mathsf{deg} P(x) = \mathsf{max}\big\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid a_k \neq 0\big\}$$

Στο μηδενικό πολυώνυμο 0 δεν ορίζουμε βαθμό. Έτσι όταν θεωρούμε βαθμό $\mathsf{deg} P(x)$ ενός πολυωνύμου $P(x)$ θα υπονοιείται πάντα ότι το $P(x)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Άσκηση 35. *Έστω $n \geq 0$ ένας μη-αρνητικός ακέραιος και $\mathbb{K}_n[x]$ το σύνολο όλων των πολυωνύμων υπεράνω του $\mathbb{K}$ με βαθμό $\leq n$ μαζί με το μηδενικό πολυώνυμο:*

$$\mathbb{K}_n[x] = \big\{P(x) \in \mathbb{K}[x] \mid \mathsf{deg} P(x) \leq n\big\} \bigcup \{0\}$$

Να δειχθεί ότι το υποσύνολο $\mathbb{K}_n[x]$ *είναι ένας υπόχωρος του* $\mathbb{K}[x]$ *και*

$$\mathbb{K}[x] = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{K}_n[x]$$

Άσκηση 36. *Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο* $\mathsf{M}_3(\mathbb{K})$ *των* 3×3 *πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα* $\mathbb{K}$ *και έστω* $\Delta(\mathbb{K})$ *το υποσύνολο όλων των διαγωνίων πινάκων:*

$$\Delta_3(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{K}) \mid a, b, c \in \mathbb{K} \right\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι το υποσύνολο* $\Delta_3(\mathbb{K})$ *είναι ένας υπόχωρος του* $\mathsf{M}_3(\mathbb{K})$.

(2) *Να δειχθεί ότι για τους πίνακες*

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ισχύει ότι:

$$\langle E_1, E_2, E_3 \rangle = \Delta_3(\mathbb{K})$$

(3) *Να εξετασθεί αν για τους πίνακες*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ισχύει ότι:

$$\langle A_1, A_2, A_3 \rangle = \Delta_3(\mathbb{K})$$

Άσκηση 37. *Στον διανυσματικό χώρο* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{ f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f : \text{ συνάρτηση} \}$, *θεωρούμε τα υποσύνολα*

$$\mathsf{A}(\mathbb{R}) = \{ f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = f(-x), \ \forall x \in \mathbb{R} \} \qquad (\text{άρτιες συναρτήσεις})$$

$$\mathsf{\Pi}(\mathbb{R}) = \{ f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = -f(-x), \ \forall x \in \mathbb{R} \} \qquad (\text{περιττές συναρτήσεις})$$

Να δειχθεί ότι τα υποσύνολα $\mathsf{A}(\mathbb{R})$ *και* $\mathsf{\Pi}(\mathbb{R})$ *είναι υπόχωροι του* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *και ισχύει ότι:*

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathsf{A}(\mathbb{R}) + \mathsf{\Pi}(\mathbb{R}) \quad \text{και} \quad \mathsf{A}(\mathbb{R}) \cap \mathsf{\Pi}(\mathbb{R}) = \{0\}$$

Άσκηση 38. *Στον* $\mathbb{R}$*-διανυσματικό χώρο* $\mathbb{R}^3$, *θεωρούμε τα ακόλουθα υποσύνολα:*

$$\mathcal{V}_1 = \{ (x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathcal{V}_2 = \{ (0, x, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathcal{V}_3 = \{ (x, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

Να δειχθεί ότι τα παραπάνω υποσύνολα είναι υπόχωροι και να βρεθούν οι υπόχωροι:

$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3, \quad \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2, \quad \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3, \quad \mathcal{V}_2 \cap \mathcal{V}_3, \quad (\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) \cap \mathcal{V}_3, \quad (\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_3) \cap \mathcal{V}_2, \quad (\mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3) \cap \mathcal{V}_1,$$

Άσκηση 39. *Έστω ότι* $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ *είναι υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου* $\mathcal{E}$ *υπεράνω ενός σώματος* $\mathbb{K}$. *Να δειχθεί ότι:*

$$(\mathcal{U} + \mathcal{W}) \cap (\mathcal{W} + \mathcal{V}) \cap (\mathcal{V} + \mathcal{U}) = \Big((\mathcal{W} + \mathcal{V}) \cap \mathcal{U} \Big) + \Big((\mathcal{V} + \mathcal{U}) \cap \mathcal{W} \Big)$$

Άσκηση 40. *Έστω ότι* $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, $\mathcal{V}_3$ *είναι υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου* $\mathcal{E}$ *υπεράνω ενός σώματος* $\mathbb{K}$.

(1) *Αν* $\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_1$, *να δειχθεί ότι:*

$$\mathcal{V}_1 \cap (\mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3) = (\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2) + (\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3) = \mathcal{V}_2 + (\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3)$$ *(Μοδιακός Νόμος Υπόχωρων)*

(2) *Αν* $\mathcal{V}_2 \not\subseteq \mathcal{V}_1$, *να δειχθεί ότι γενικά:* $\mathcal{V}_1 \cap (\mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3) \neq \mathcal{V}_2 + (\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3)$.