ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

Ασκησεις - Φυλλαδιο 6

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:
http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI/LAI2019/LAI2019.html

Παρασκευή 12 Δεκεμβρίου 2019

Άσκηση 1. *Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ και*

$$\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0\}$$

Να βρεθεί η διάσταση $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}$ και μια βάση του $\mathbb{R}^n$ η οποία περιέχει μια βάση του $\mathcal{V}$.

Άσκηση 2. *Έστω $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ δύο υπόχωροι του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}_6[x]$ και υποθέτουμε ότι*

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U} = 4 \quad \text{και} \quad \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V} = 5$$

Να προσδιορισθούν οι δυνατές τιμές για τη διάσταση:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$$

Αν $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, ποιά είναι η διάσταση $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$;

Άσκηση 3. *Έστω ότι $\mathcal{V}$ και $\mathcal{U}$ είναι υπόχωροι πεπερασμένης διάστασης του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$. Υποθέτουμε ότι:*

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} + \mathcal{U}) = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) + 1$$

Να δειχθεί ότι ένας εκ των υποχώρων $\mathcal{V}$ και $\mathcal{U}$ συμπίπτει με τον $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ και ο άλλος με τον $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$.

Άσκηση 4. *Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$:*

$$\vec{x}_1 = (1,2,1), \quad \vec{x}_2 = (1,1,-1), \quad \vec{x}_3 = (1,3,3)$$
$$\vec{y}_1 = (2,3,-1), \quad \vec{y}_2 = (1,2,2), \quad \vec{y}_3 = (1,1,-3)$$

Αν

$$\mathcal{V} = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \rangle \quad \text{και} \quad \mathcal{U} = \langle \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3 \rangle$$

να βρεθούν βάσεις και η διάσταση των υπόχωρων $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V} + \mathcal{U}$ και $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$.

Άσκηση 5. *Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$:*

$$\vec{x}_1 = (1,1,0,0), \quad \vec{x}_2 = (0,1,1,0), \quad \vec{x}_3 = (0,0,1,1)$$
$$\vec{y}_1 = (1,0,1,0), \quad \vec{y}_2 = (0,2,1,1), \quad \vec{y}_3 = (1,2,1,2)$$

Αν

$$\mathcal{V} = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \rangle \quad \text{και} \quad \mathcal{U} = \langle \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3 \rangle$$

να βρεθούν βάσεις και η διάσταση των υπόχωρων $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V} + \mathcal{U}$ και $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$.

Ένας τετραγωνικός πίνακας $n \times n$ πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

καλείται **μαγικός** αν και μόνον αν το άθροισμα:

(1) $\forall i = 1, 2, \cdots, n$, το άθροισμα των στοιχείων της i-γραμμής: $a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}$
(2) $\forall j = 1, 2, \cdots, n$, το άθροισμα των στοιχείων της j-στήλης: $a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj}$
(3) των στοιχείων της κύριας διαγωνίου: $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$
(4) των στοιχείων της δευτερεύουσας διαγωνίου: $a_{1n} + a_{2n-1} + \cdots + a_{n1}$

είναι ίσο με τον ίδιο αριθμό $S \in \mathbb{K}$, ο οποίος καλείται ο **μαγικός αριθμός** του A.

Για παράδειγμα οι πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι μαγικοί με μαγικούς αριθμούς 2, 15 και 34 αντίστοιχα.

Συμβολίζουμε με ΜΠ(n) το σύνολο όλων των $n \times n$ μαγικών πινάκων.

Άσκηση 6. *Να δειχθεί ότι το σύνολο ΜΠ(n) είναι ένας υπόχωρος του $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$. Να βρεθούν βάσεις των υπόχωρων ΜΠ(2) και ΜΠ(3).*

Άσκηση 7. *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ και*

$$(\Sigma) \quad AX = 0$$

το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους. Αν $m < n$ να δειχθεί ότι το (Σ) έχει τουλάχιστον μια μη μηδενική λύση, και επομένως έχει άπειρες λύσεις.

Άσκηση 8. *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο k με $k \geq n^2$, υπάρχουν στοιχεία $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, όχι όλα ίσα με μηδέν, έτσι ώστε:*

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \cdots + \lambda_k A^k = 0$$

Άσκηση 9. *Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_n[x]$ των πολυωνύμων με βαθμό το πολύ n υπεράνω του $\mathbb{R}$, και έστω $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ ανά δύο διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $1 \leq k \leq n$, θεωρούμε το σύνολο:*

$$\mathcal{V}_k = \big\{ P(x) \in \mathbb{R}_n[x] \mid P(\rho_1) = P(\rho_2) = \cdots = P(\rho_k) = 0 \big\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι το υποσύνολο $\mathcal{V}_k$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{K}_n[x]$.*
(2) *Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του $\mathcal{V}_k$.*
(3) *Να συμπληρωθεί η βάση του $\mathcal{V}_k$ που βρέθηκε στο (2) σε μια βάση του $\mathbb{R}_n[x]$.*

Υπενθυμίζουμε ότι αν

$$\mathcal{B} = \big\{ \vec{e}_1,\, \vec{e}_2,\, \cdots,\, \vec{e}_n \big\}$$
$$\mathcal{C} = \big\{ \vec{\epsilon}_1,\, \vec{\epsilon}_2,\, \cdots,\, \vec{\epsilon}_n \big\}$$

είναι δύο βάσεις του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$, τότε γράφοντας τα διανύσματα της βάσης $\mathcal{C}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B}$

$$\begin{aligned}
\vec{\epsilon}_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{e}_n \\
\vec{\epsilon}_2 &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n2}\vec{e}_n \\
&\vdots \\
\vec{\epsilon}_n &= a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n
\end{aligned}$$

προκύπτει ο $n \times n$ πίνακας

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ο οποίος καλείται ο **πίνακας μετάβασης από τη βάση** $\mathcal{B}$ **στη βάση** $\mathcal{C}$. Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι ο πίνακας $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ είναι αντιστρέψιμος και

$$(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$$

όπου ο $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{C}$ στη βάση $\mathcal{B}$.

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$ ένα τυχόν διάνυσμα του $\mathcal{E}$ και έστω

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{x}_n$$

$$\vec{x} = x_1'\vec{e}_1 + x_2'\vec{e}_2 + \cdots + x_n'\vec{x}_n$$

η μοναδική γραφή του $\vec{x}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων των βάσεων $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$. Οι πίνακες-στήλες

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

καλούνται οι *πίνακες των συνιστωσών* του $\vec{x}$ ως προς τι βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$ αντίστοιχα. Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι:

$$X = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot X' \qquad \text{και} \qquad X' = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot X$$

Άσκηση 10. *Θεωρούμε τις ακόλουθες βάσεις του* $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1 = (1,0,0), \;\; \vec{e}_2 = (0,1,0), \;\; \vec{e}_1 = (0,0,1)\big\}$$

$$\mathcal{C} = \big\{\vec{\epsilon}_1 = (1,1,1), \;\; \vec{\epsilon}_2 = (1,1,0), \;\; \vec{\epsilon}_3 = (1,0,0)\big\}$$

(1) *Να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ *και* $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.
(2) *Να βρεθούν οι συνιστώσες του διανύσματος* $\vec{x} = (4,-2,3)$ *ως προς τη βάση* $\mathcal{C}$.

Άσκηση 11. *Θεωρούμε τα ακόλουθα σύνολα διανυσμάτων του* $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1 = (1,1,1), \;\; \vec{e}_2 = (1,1,0), \;\; \vec{e}_1 = (1,0,0)\big\}$$

$$\mathcal{C} = \big\{\vec{\epsilon}_1 = (1,0,-1), \;\; \vec{\epsilon}_2 = (-1,1,0), \;\; \vec{\epsilon}_3 = (1,-1,1)\big\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι τα υποσύνολα* $\mathcal{B}$ *και* $\mathcal{C}$ *είναι βάσεις του* $\mathbb{R}^3$.
(2) *Να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ *και* $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.
(3) *Να βρεθούν οι συνιστώσες του διανύσματος* $\vec{x} = (1,-2,5)$ *ως προς τις βάσεις* $\mathcal{B}$ *και* $\mathcal{C}$.

Άσκηση 12. *Θεωρούμε την κανονική βάση*

$$\mathcal{B} = \{1,\, x,\, x^2, \cdots, x^n\}$$

του $\mathbb{K}_n[x]$ *και το σύνολο*

$$\mathcal{C} = \{1,\, 1+x,\, 1+x^2, \cdots, 1+x^n\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι το υποσύνολο* $\mathcal{C}$ *είναι βάση του* $\mathbb{K}_n[x]$.
(2) *Να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ *και* $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.
(3) *Να βρεθούν οι συνιστώσες του πολυωνύμου* $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$ *ως προς τις βάσεις* $\mathcal{B}$ *και* $\mathcal{C}$.

Άσκηση 13. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας* $\mathbb{K}$*-διανυσματικός χώρος διάστασης* n *και έστω*

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$$
$$\mathcal{C} = \{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_n\}$$
$$\mathcal{D} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_n\}$$

τρεις βάσεις του $\mathcal{E}$. *Αν* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ *είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση* $\mathcal{B}$ *στη βάση* $\mathcal{C}$, *αν* $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$ *είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση* $\mathcal{C}$ *στη βάση* $\mathcal{D}$, *και αν* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}$ *είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση* $\mathcal{B}$ *στη βάση* $\mathcal{D}$ *να δειχθεί ότι:*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ είναι υπόχωροι ενός $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$, τότε το άθροισμα υπόχωρων

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = \{\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{E} \mid \vec{u} \in \mathcal{U} \text{ και } \vec{v} \in \mathcal{V}\}$$

καλείται **ευθύ άθροισμα** αν κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ του $\mathcal{U}+\mathcal{V}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $\vec{x} = \vec{u}+\vec{v}$, δηλαδή:

$$\vec{x} = \vec{u}_1 + \vec{v}_1 = \vec{u}_2 + \vec{v}_2, \text{ όπου } \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \mathcal{U} \text{ και } \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{V} \implies \vec{u}_1 = \vec{u}_2 \text{ και } \vec{v}_1 = \vec{v}_2$$

Αν το άθροισμα των υπόχωρων $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ είναι ευθύ, θα γράφουμε:

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

Άσκηση 14. *Αν* $\mathcal{U}$ *και* $\mathcal{V}$ *είναι υπόχωροι ενός* $\mathbb{K}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathcal{E}$, *τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *το άθροισμα υπόχωρων* $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ *είναι ευθύ.*
(2)
$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}, \text{ όπου } \vec{u} \in \mathcal{U} \text{ και } \vec{v} \in \mathcal{V} \implies \vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$$
(3) $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{\vec{0}\}$.

Άσκηση 15. *Θεωρούμε τα ακόλουθους υπόχωρους του* $\mathbb{K}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathsf{M}_2(\mathbb{K})$:

$$\mathcal{U} = \left\langle A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$\mathcal{V} = \left\langle C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Να βρεθούν βάσεις των $\mathcal{U}$ *και*$\mathcal{V}$ *και να δειχθεί ότι:*

$$\mathsf{M}_2(\mathbb{K}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

Άσκηση 16. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας* $\mathbb{K}$*-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και* $\mathcal{U}$ *και* $\mathcal{V}$ *δύο υπόχωροι του* $\mathcal{E}$. *Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) $\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.

(2) *Ικανοποιούνται δύο από τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:*
   (α') $\mathcal{E} = \mathcal{U} + \mathcal{V}$.
   (β') $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{\vec{0}\}$.
   (γ') $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{E} = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U} + \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V}$.

Άσκηση 17. *Αν $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ είναι υπόχωροι ενός $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης $\mathcal{E}$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(1) $\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.
(2) *Αν $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathcal{U}$ και $\mathcal{C}$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}$, τότε το σύνολο $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$.*

Άσκηση 18. *Έστω $\mathcal{U}$ ένας υπόχωρος ενός $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$ πεπερασμένης διάστασης. Να δειχθεί ότι υπάρχει ένας υπόχωρος $\mathcal{V}$ του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε:*
$$\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$
Είναι ο υπόχωρος $\mathcal{V}$ μοναδικός;

Άσκηση 19. *Θεωρούμε δύο στοιχεία a, b ενός σώματος $\mathbb{K}$ και έστω ο ακόλουθος 2×2 πίνακας*
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$
Θεωρούμε το σύνολο
$$\mathcal{U} = \big\{X \in \mathsf{M}_2(\mathbb{K}) \mid AX = XA\big\}$$
(1) *Να δειχθεί ότι το σύνολο $\mathcal{U}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathsf{M}_2(\mathbb{K})$ και να βρεθεί μια βάση του.*
(2) *Να βρεθεί υπόχωρος $\mathcal{V}$ του $\mathsf{M}_2(\mathbb{K})$ έτσι ώστε:*
$$\mathsf{M}_2(\mathbb{K}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

Άσκηση 20. *Να δειχθεί ότι:*
$$\mathbb{K}^n = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$
όπου
$$\mathcal{U} = \big\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\big\}$$
$$\mathcal{V} = \big\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 = x_2 = \cdots = x_n\big\}$$

Άσκηση 21. *Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_n[x]$ των πολυωνύμων με βαθμό το πολύ n υπεράνω του $\mathbb{R}$, και έστω $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ ανά δύο διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $1 \leq k \leq n$, θεωρούμε το σύνολο:*
$$\mathcal{V}_k = \big\{P(x) \in \mathbb{R}_n[x] \mid P(\rho_1) = P(\rho_2) = \cdots = P(\rho_k) = 0\big\}$$
Να δειχθεί ότι:
$$\mathbb{R}_n[x] = \mathbb{R}_{k-1}[x] \oplus \mathcal{V}_k$$

Άσκηση 22. *Θεωρούμε το σύνολο*
$$\mathsf{S}_n(\mathbb{K}) = \big\{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = A\big\}$$
των συμμετρικών $n \times n$ πινάκων, και το σύνολο
$$\mathsf{A}_n(\mathbb{K}) = \big\{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = -A\big\}$$
των αντισυμμετρικών $n \times n$ πινάκων.
(1) *Να δειχθεί ότι:*
$$\mathsf{M}_n(\mathbb{K}) = \mathsf{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathsf{A}_n(\mathbb{K})$$

(2) *Να βρεθούν οι διαστάσεις των υπόχωρων* $\mathsf{S}_n(\mathbb{K})$ *και* $\mathsf{A}_n(\mathbb{K})$.
(3) *Αν* $n = 3$, *να βρεθούν βάσεις των υπόχωρων* $\mathsf{S}_n(\mathbb{K})$ *και* $\mathsf{A}_n(\mathbb{K})$.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{V}_1,\ \mathcal{V}_2,\ \cdots,\ \mathcal{V}_n$ είναι υπόχωροι ενός $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$, τότε το άθροισμα υπόχωρων

$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n = \big\{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_n \in \mathcal{E} \mid \vec{v}_i \in \mathcal{V}_i\ 1 \leq i \leq n\big\}$$

καλείται **ευθύ άθροισμα** αν κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ του $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $\vec{x} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_n$, δηλαδή:

$$\vec{x} = \vec{v}_1+\vec{v}_2+\cdots+\vec{v}_n = \vec{u}_1+\vec{u}_2+\cdots+\vec{u}_n,\ \text{όπου}\ \vec{v}_i, \vec{u}_i \in \mathcal{V}_i,\ 1 \leq i \leq n \implies \vec{v}_1 = \vec{u}_1,\ \vec{v}_2 = \vec{u}_2,\ \cdots,\ \vec{v}_n = \vec{u}_n$$

Αν το άθροισμα των υπόχωρων $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n$ είναι ευθύ, θα γράφουμε:

$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_n$$

Άσκηση 23. *Έστω* $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\big\}$ *ένα σύνολο διανυσμάτων του* $\mathbb{K}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathcal{E}$. *Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Το σύνολο* $\mathcal{B}$ *είναι μια βάση του* $\mathcal{E}$.
(2)
$$\mathcal{E} = \langle\vec{e}_1\rangle \oplus \langle\vec{e}_2\rangle \oplus \cdots \oplus \langle\vec{e}_n\rangle$$

Άσκηση 24. *Αν* $\mathcal{V}_1,\ \mathcal{V}_2,\ \cdots,\ \mathcal{V}_n$ *είναι υπόχωροι ενός* $\mathbb{K}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathcal{E}$, *τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Το άθροισμα των υπόχωρων* $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n$ *είναι ευθύ:*
$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_n$$
(2)
$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_n = \vec{0},\ \ \textit{όπου}\ \vec{v}_i \in \mathcal{V}_i\ 1 \leq i \leq n \implies \vec{v}_i = \vec{0},\ 1 \leq i \leq n$$
(3)
$$\forall i = 1, 2, \cdots, n: \quad \mathcal{V}_i \bigcap \Big(\mathcal{V}_1 + \cdots + \mathcal{V}_{i-1} + \mathcal{V}_{i+1} + \cdots + \mathcal{V}_n\Big) = \{\vec{0}\}$$

Αν A και B είναι υποσύνολα ενός συνόλου X, τότε γνωρίζουμε ότι:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Όπως έχουμε αποδείξει στο μάθημα, η παραπάνω σχέση γενικεύεται για υπόχωρους: αν $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ είναι υπόχωροι ενος $\mathbb{K}$-διανσυματικού χώρου $\mathcal{E}$ πεπερασμένης διάστασης, τότε:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U} + \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V} - \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$$

Τι συμβαίνει για τρεις υπόχωρους;

Αν A, B και C είναι υποσύνολα ενός συνόλου X, τότε[1]:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Άσκηση 25. *Αν* $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ *είναι υπόχωροι ενός* $\mathbb{K}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathcal{E}$ *πεπερασμένης διάστασης, να εξετασθεί αν ισχύει ότι:*

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}+\mathcal{V}+\mathcal{W}) = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U}+\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V}+\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{W}-\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})-\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}\cap\mathcal{W})-\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}\cap\mathcal{W})+\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}\cap\mathcal{V}\cap\mathcal{W})$$

[1] Δείξτε το σαν Άσκηση.