

# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

**ΤΜΗΜΑ Β'** (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

## ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebra/LAI2019/LAI2019.html>

**Παρασκευή 8 Νοεμβρίου 2019**

**Άσκηση 1.** Έστω  $A, B$  δύο  $n \times n$  πίνακες έτσι ώστε  $A^2 = I_n, B^3 = I_n$  και ο  $A + B$  είναι αντιστρέψιμος. Να δείχθεί ότι ο πίνακας  $A + B^2$  είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφος του.

**Άσκηση 2.** Έστω  $A$  ένας τετραγωνικός πίνακας για τον οποίο ισχύει ότι  $A^2 = A$  και  $(A - {}^t A)^2 = 0$ . Να δείξετε ότι

$$(A \cdot {}^t A)^2 = A \cdot {}^t A$$

**Άσκηση 3.** Έστω  $A$  ένας τετραγωνικός  $n \times n$ -πίνακας. Αν  $A^k = 0$  για κάποιο  $k \geq 1$ , να δείξετε ότι ο  $I_n - A$  είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο  $(I_n - A)^{-1}$ .

**Άσκηση 4.** Αν  $A$  είναι ένας άνω τριγωνικός  $n \times n$ -πίνακας με μη-μηδενικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο, να δείξετε ότι ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος και ο  $A^{-1}$  είναι επίσης άνω τριγωνικός με μη-μηδενικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο.

**Άσκηση 5.** Έστω ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ . Να δείχθεί ότι ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος και στη συνέχεια να υπολογισθεί ο  $A^{-1}$  με χρήση στοιχειωδών πράξεων επί των γραμμών του  $A$ .

**Άσκηση 6.** Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -8 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας  $P$  έτσι ώστε ο πίνακας  $PA$  να είναι ισχυρά  $\gamma$ -κλιμακωτός.

**Άσκηση 7.** Να βρεθεί η ισχυρά  $\gamma$ -κλιμακωτή μορφή του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -0 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 4 & 1 & -3 \\ 6 & 10 & 7 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

και ακολούθως να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας  $P$  έτσι ώστε ο πίνακας  $PA$  να είναι ισχυρά  $\gamma$ -κλιμακωτός.

**Άσκηση 8.** Να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και ακολούθως να βρεθεί ο αντίστροφος  $A^{-1}$  του  $A$  με χρήση στοιχειωδών πράξεων επί των γραμμών του  $A$ .

**Άσκηση 9.** Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι αντίστροφοι πίνακες των πινάκων

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

με χρήση στοιχειωδών πράξεων επί των γραμμών τους.

**Άσκηση 10.** Με με χρήση στοιχειωδών πράξεων επί των γραμμών του, να βρεθεί ο αντίστροφος πίνακας  $A^{-1}$  του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 11.** Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) Για ποιές τιμές του  $\lambda$  είναι ο πίνακας  $A$  αντιστρέψιμος; Για τις τιμές αυτές να βρεθεί ο αντίστροφος  $A^{-1}$  του  $A$  με χρήση στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές του.
- (2) Για τις τιμές του  $A$  για τις οποίες ο πίνακας  $A$  δεν είναι αντιστρέψιμος, να βρεθούν αντιστρέψιμοι  $3 \times 3$  πίνακες  $P$  και  $Q$  έτσι ώστε  $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ , όπου  $r$  είναι η βαθμίδα του  $A$ .

**Άσκηση 12.** Να βρεθεί η βαθμίδα του πίνακα  $(\lambda, \kappa \in \mathbb{K})$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \kappa \\ 1 & 1 & \lambda^2 & \kappa^2 \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 13.** Να βρεθεί η ισχυρά  $\gamma$ -κλιμακωτή μορφή και η κανονική μορφή του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \kappa & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \kappa & 5 \\ 1 & \lambda & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Ποιά είναι η βαθμίδα του πίνακα  $A$ ;

**Άσκηση 14.** Να βρεθεί η ισχυρά  $\gamma$ -κλιμακωτή μορφή και η κανονική μορφή του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a-2 & a & a-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ποιά είναι η βαθμίδα του πίνακα  $A$ ;

**Άσκηση 15.** Να βρεθεί η βαθμίδα του πίνακα ( $\lambda \in \mathbb{K}$ ):

$$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 16.** Έστω  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$  και  $r \in \mathbb{N}$ . Ναδειχθεί ότι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

(1)  $r(A) = r$ .

(2)

$$A \sim_{\gamma} \left( \begin{array}{c|c} B & O \\ \hline O & O \end{array} \right) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

όπου  $B$  είναι ένας  $r \times n$  πίνακας με βαθμίδα  $r(B) = r$ .

(3)

$$A \sim_{\sigma} \left( C \mid O \right) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mr} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

όπου  $C$  είναι ένας  $m \times r$  πίνακας με βαθμίδα  $r(C) = r$ .

(4)

$$A \sim \left( \begin{array}{c|c} D & O \\ \hline O & O \end{array} \right)$$

όπου  $D$  είναι ένας  $r \times r$  πίνακας με βαθμίδα  $r(D) = r$ .

(5)

$$A \sim \left( \begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right)$$

**Άσκηση 17.** Θεωρούμε έναν  $m \times n$  πίνακα  $A$  και έναν  $n \times k$  πίνακα  $B$ . Ναδειχθεί ότι:

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$$

**Άσκηση 18.** Έστω  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Ναδειχθεί ότι το ομογενές γραμμικό σύστημα  $AX = O$  έχει μοναδική λύση αν και μόνον αν ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος.

**Άσκηση 19.** Έστω  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ . Αν  $m < n$ , ναδειχθεί ότι το ομογενές γραμμικό σύστημα  $AX = O$  έχει μη-μηδενικές λύσεις.

**Άσκηση 20.** Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + 2z - t = 3 \\ 2x + y + 3z + t = 8 \\ x + 4y + 7z - 2t = 9 \\ x - y - z + t = 1 \end{cases}$$

**Άσκηση 21.** Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 24 \end{cases}$$

**Άσκηση 22.** Να λυθεί το σύστημα:

$$(\Sigma) \begin{cases} 3x + 4y + z + 2w + 3t = 0 \\ 5x + 7y + z + 3w + 4t = 0 \\ 4x + 5y + 2z + w + 5t = 0 \\ 7x + 10y + z + 6w + 5t = 0 \end{cases}$$

**Άσκηση 23.** Να λυθεί το σύστημα:

$$(\Sigma) \begin{cases} 2x - y + z - 2w + 3t = 2 \\ 6x - 3y + 2z + 4w + 5t = 3 \\ 6x - 3y + 4z + 8w + 13t = 9 \\ 4x - 2y + z + w + 2t = 1 \end{cases}$$

**Άσκηση 24.** Να λυθεί το σύστημα:

$$(\Sigma) \begin{cases} 6x + 3y + 2z + 3w + 4t = 5 \\ 4x + 2y + z + 2w + 3t = 4 \\ 4x + 2y + 3z + 2w + t = 0 \\ 2x + 1y + 7z + 3w + 2t = 1 \end{cases}$$

**Άσκηση 25.** Να λυθεί το σύστημα:

$$(\Sigma) \begin{cases} 8x + 6y + 5z + 2w = 21 \\ 3x + 3y + 2z + w = 10 \\ 4x + 2y + 3z + w = 8 \\ 3x + 5y + z + w = 15 \\ 7x + 4y + 5z + 2w = 18 \end{cases}$$

**Άσκηση 26.** Να λυθεί το σύστημα:

$$(\Sigma) \begin{cases} 2x + 3y + z + 2w = 4 \\ 4x + 3y + z + w = 5 \\ 5x + 11y + 3z + 2w = 2 \\ 2x + 5y + z + w = 1 \\ x - 7y - z + 2w = 7 \end{cases}$$

**Άσκηση 27.** Να λυθεί το σύστημα ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

**Άσκηση 28.** Να λυθεί το σύστημα ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{cases} \lambda x + y + z + w = 1 \\ x + \lambda y + z + w = 1 \\ x + y + \lambda z + w = 1 \\ x + y + z + \lambda w = 1 \end{cases}$$

**Άσκηση 29.** Να λυθεί το σύστημα ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{cases} (1 + \lambda)x + y + z = 1 \\ x + (1 + \lambda)y + z = \lambda \\ x + y + (1 + \lambda)z = \lambda^2 \end{cases}$$

**Άσκηση 30.** Να λυθεί το σύστημα ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{cases} (1 + \lambda)x + y + z = \lambda^2 + 3\lambda \\ x + (1 + \lambda)y + z = \lambda^3 + 3\lambda^2 \\ x + y + (1 + \lambda)z = \lambda^4 + 3\lambda^3 \end{cases}$$

**Άσκηση 31.** Να λυθεί το σύστημα ( $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ \lambda x + y + z = \kappa \end{cases}$$

**Άσκηση 32.** Να λυθεί το σύστημα ( $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{cases} x - 2y + \lambda z = 3 \\ \kappa x + 2z = 2 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$$

**Άσκηση 33.** Θεωρούμε τον  $4 \times 6$  πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -13 & 12 & -1 & -20 \\ 1 & -3 & 8 & -8 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

- (1) Να βρεθεί η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα  $A$ .
- (2) Να βρεθεί η κανονική μορφή του πίνακα  $A$ .
- (3) Να βρεθεί ένας αντιστρέψιμος  $4 \times 4$  πίνακας  $P$  και ένας αντιστρέψιμος  $6 \times 6$  πίνακας  $Q$  έτσι ώστε: ο πίνακας  $PAQ$  να είναι η κανονική μορφή του  $A$ .
- (4) Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -13 & 12 & -1 & -20 \\ 1 & -3 & 8 & -8 & 2 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$