ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Τμημα **Β′** (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

Προτεινομενες Ασκησεις - Φυλλαδιο **5**

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:
http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI/LAI2019/LAI2019.html

Παρασκευή 6 Δεκεμβρίου 2019

Άσκηση 1. *Να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις*

$$f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \cos 4x$$

θεωρούμενες ως διανύσματα του $\mathbb{R}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*, είναι γραμμικά ανεξάρτητες.*

Άσκηση 2. *Για ποιές τιμές του* $a \in \mathbb{R}$ *οι συναρτήσεις*

$$\cos x + (2a-1)\cos 4x, \quad (1-a)\cos x + \cos 4x$$

θεωρούμενες ως διανύσματα του $\mathbb{R}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*, είναι γραμμικά εξαρτημένες ;*

Άσκηση 3. *Να δειχθεί ότι για κάθε* $n \geq 1$ *οι συναρτήσεις*

$$\sin x, , \ \ \sin 2x, \ \ \cdots, \ \ \sin nx$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες, ως στοιχεία του $\mathbb{R}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*.*

Παρόμοια να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις

$$\cos x, , \ \ \cos 2x, \ \ \cdots, \ \ \cos nx$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες, ως στοιχεία του $\mathbb{R}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*.*

Να συμπεράνετε ότι η $\mathbb{R}$*-διανυσματικός χώρος* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *έχει άπειρη διάσταση.*

Άσκηση 4. *Να δειχθεί ότι για κάθε* $n \geq 1$ *και για κάθε* $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$*, όπου οι αριθμοί είναι ανά δύο διαφορετικοί, οι συναρτήσεις*

$$x^{a_1}, \ \ x^{a_2}, \ \ \cdots, \ \ x^{a_n}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες, ως στοιχεία του $\mathbb{R}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*.*

Παρόμοια να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις

$$e^{a_1 x}, \ \ e^{a_2 x}, \ \ \cdots, \ \ e^{a_n x}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες, ως στοιχεία του $\mathbb{R}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*.*

Να συμπεράνετε ότι η $\mathbb{R}$*-διανυσματικός χώρος* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *έχει άπειρη διάσταση.*

Άσκηση 5. *Θεωρούμε συναρτήσεις* $f_1, f_2, \cdots, f_n \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Να δειχθεί ότι το σύνολο* $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνον αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί* $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *έτσι ώστε*

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

Άσκηση 6. *Για κάθε* $n \geq 1$, *έστω* $m_1, m_2, \cdots, m_n$ *ανά δύο διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι οι οποίοι είναι ε-λεύθεροι τετραγώνου (δηλαδή δεν διαρούνται από τετράγωνο πρώτου αριθμού). Να δειχθεί ότι οι πραγματικοί αριθμοί*

$$\sqrt{m_1}, \ \sqrt{m_2}, \ \cdots, \ \sqrt{m_n}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{Q}$*-διαννυσματικού χώρου* $\mathbb{R}$.

Να συμπεράνετε ότι η $\mathbb{Q}$*-διαννυσματικός χώρος* $\mathbb{R}$ *έχει άπειρη διάσταση.*

Άσκηση 7. *Για κάθε* $n \geq 1$, *έστω* $r_1, r_2, \cdots, r_n$ *ανά δύο διαφορετικοί ρητοί αριθμοί οι οποίοι ανήκουν στο διάστημα* $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$. *Να δειχθεί ότι οι πραγματικοί αριθμοί*

$$2^{r_1}, \ 2^{r_2}, \ \cdots, \ 2^{r_n}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{Q}$*-διαννυσματικού χώρου* $\mathbb{R}$.

Να συμπεράνετε ότι η $\mathbb{Q}$*-διαννυσματικός χώρος* $\mathbb{R}$ *έχει άπειρη διάσταση.*

Άσκηση 8. *Έστω ότι το σύνολο διανυσμάτων* $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ *ενός διανυσματικού χώρου είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Να δείξετε ότι το σύνολο*

$$\{\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \ \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \ \cdots, \ \vec{e}_n + \vec{e}_1\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνο αν ο αριθμός n *είναι περιττός.*

Άσκηση 9. *Να βρεθούν οι τιμές του* $\lambda \in \mathbb{R}$ *για τις οποίες τα διανύσματα*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

του $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Άσκηση 10. *Να βρεθεί το* $\lambda \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε τα διανύσματα*

$$\left(\lambda, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, \lambda, -\frac{1}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \lambda\right)$$

να αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 11. *Να προσδιοριστεί μια βάση και η διάσταση του* $\mathbb{R}$*-υπόχωρου*

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & c+d \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

του $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.

Άσκηση 12. *Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Να δείξετε ότι το σύνολο*

$$\mathsf{R}(A) = \big\{Y \in \mathbb{K}_m \mid \text{ υπάρχει } X \in \mathbb{K}_n \text{ έτσι ώστε : } Y = AX\big\}$$

είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}_n$.

Άσκηση 13. *Να δειχθεί ότι το υποσύνολο $\big\{(1,1,-2),\ (0,-3,3)\big\}$ του $\mathbb{R}^3$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}$-υπόχωρου*

$$\mathcal{V} = \big\{(x,y,z) \mid x+y+z=0\big\} \ \subseteq \ \mathbb{R}^3$$

η οποία να συμπληρωθεί σε μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 14. *Να δείξετε ότι το ακόλουθο υποσύνολο*

$$\mathcal{V} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+y+3z=0\big\}$$

είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και να βρείτε μια βάση του $\mathcal{C}$. Ακολούθως να βρείτε μια βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}^3$ η οποία περιέχει την $\mathcal{C}$.

Άσκηση 15. *Να εξεταστεί ποια από τα επόμενα σύνολα διανυσμάτων αποτελούν βάσεις του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$:*

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\},$$

$$\left\{\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right\},$$

$$\left\{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right\}.$$

Άσκηση 16. *Να προσδιορισθούν όλοι οι υπόχωροι των $\mathbb{R}$-διανυσματικών χώρων: (α) $\mathbb{R}^3$, και (β) $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.*

Άσκηση 17. (1) *Να βρεθεί η διάσταση $\dim_{\mathbb{K}} \mathsf{S}_2(\mathbb{K})$ όπου*

$$\mathsf{S}_2(\mathbb{K}) = \left\{\begin{pmatrix} a & x \\ x & b \end{pmatrix} \ \in\ \mathsf{M}_2(\mathbb{K}) \mid \ a,b,x \in \mathbb{K}\right\}$$

είναι ο υπόχωρος του $\mathsf{M}_2(\mathbb{K})$ ο οποίος αποτελείται από όλους τους 2×2 συμμετρικούς πίνακες.

(2) *Να βρεθεί η διάσταση $\dim_{\mathbb{K}} \mathsf{A}_2(\mathbb{K})$ όπου*

$$\mathsf{A}_2(\mathbb{K}) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix} \ \in\ \mathsf{M}_2(\mathbb{K}) \mid \ c \in \mathbb{K}\right\}$$

είναι ο υπόχωρος του $\mathsf{M}_2(\mathbb{K})$ ο οποίος αποτελείται από όλους τους 2×2 αντισυμμετρικούς πίνακες.

Άσκηση 18. (1) *Να βρεθεί η διάσταση $\dim_{\mathbb{K}} \mathsf{S}_3(\mathbb{K})$ όπου*

$$\mathsf{S}_3(\mathbb{K}) = \left\{\begin{pmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{pmatrix} \ \in\ \mathsf{M}_3(\mathbb{K}) \mid \ a,b,c,x,y,z \in \mathbb{K}\right\}$$

είναι ο υπόχωρος του $\mathsf{M}_3(\mathbb{K})$ ο οποίος αποτελείται από όλους τους 3×3 συμμετρικούς πίνακες.

(2) *Να βρεθεί η διάσταση* $\dim_{\mathbb{K}} \mathsf{A}_3(\mathbb{K})$ *όπου*

$$\mathsf{A}_3(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & e \\ -c & -e & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{K}) \mid \ b, c, e \in \mathbb{K} \right\}$$

είναι ο υπόχωρος του $\mathsf{M}_3(\mathbb{K})$ *ο οποίος αποτελείται από όλους τους* 3×3 *αντισυμμετρικούς πίνακες.*

Άσκηση 19. *Να βρεθουν οι διαστάσεις* $\dim_{\mathbb{K}} \mathsf{S}_n(\mathbb{K})$ *και* $\dim_{\mathbb{R}} \mathsf{A}_n(\mathbb{K})$ *όπου:*

(1) $\mathsf{S}_n(\mathbb{K})$ *είναι ο υπόχωρος του* $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ *ο οποίος αποτελείται από όλους τους* $n \times n$ *συμμετρικούς πίνακες.*
(2) $\mathsf{A}_n(\mathbb{K})$ *είναι ο υπόχωρος του* $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ *ο οποίος αποτελείται από όλους τους* $n \times n$ *αντισυμμετρικούς πίνακες.*

Άσκηση 20. *Να δείξετε ότι ένας* $\mathbb{K}$*-διανυσματικός χώρος* $\mathcal{V}$ *έχει ακριβώς δυο υπόχωρους αν και μόνο αν* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = 1$.

Άσκηση 21. *Για τις διάφορες τιμές του* $\lambda \in \mathbb{R}$, *να βρεθεί η διάσταση του υπόχωρου* $\langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3 \rangle$ *όπου*

$$\vec{\varepsilon}_1 = (1, 2, 3, 4), \quad \vec{\varepsilon}_2 = (-2, 1, \lambda, 2), \quad \vec{\varepsilon}_3 = (3, 1, 1, 2)$$

Άσκηση 22. *Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του* $\mathbb{R}^4$*:*

$$\vec{x} = (1, -1, -1, 1), \quad \vec{y} = (1, -2, -2, 1), \quad \vec{z} = (0, 1, 1, 0),$$
$$\vec{x_1} = (1, 0, 0, 1), \quad \vec{y_1} = (0, -1, -1, 0)$$

Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου $\langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \rangle$ *και να δείξετε ότι*

$$\langle \vec{x}, \ \vec{y}, \ \vec{z} \rangle = \langle \vec{x_1}, \ \vec{y_1} \rangle$$

Άσκηση 23. *Θεωρούμε τους υπόχωρους του* $\mathbb{R}^4$*:*

$$\mathcal{V} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \ \}$$

$$\mathcal{W} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_4, \ x_2 = 2x_3 \ \}$$

$$\mathcal{Z} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 + x_3 + x_4 = 0 \ \}$$

$$\mathcal{U} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0, \ x_2 = 2x_4 \ \}$$

Να βρεθούν οι βάσεις των υπόχωρων $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$, $\mathcal{Z} \cap \mathcal{U}$, *και* $\mathcal{V} + \mathcal{U}$.

Άσκηση 24. *Να βρεθούν οι τιμές των* $a, b \in \mathbb{R}$ *για τις οποίες τα διανύσματα*

$$\vec{x} = (1, \ 2, \ 0, \ a+2), \qquad \vec{y} = (a, \ 3, \ b, \ 0), \qquad \vec{z} = (0, \ 1, \ -1, \ 8)$$

παράγουν έναν υπόχωρο του $\mathbb{R}^4$ *διάστασης* 2.

Άσκηση 25. *Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου* $\langle P(t), Q(t), R(t) \rangle$ *του* $\mathbb{R}_4$, *όπου*

$$P(t) = 1 + t + t^3, \quad Q(t) = 2 + 2t + 2t^2 + t^4, \quad R(t) = 1 + t + 4t^2 - 3t^3 + 2t^4$$

η οποία στη συνέχεια να συμπληρωθεί σε μια βάση του $\mathbb{R}_4[t]$.

Άσκηση 26. *Να βρεθεί η τιμή του* $\lambda \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε τα πολυώνυμα*

$$P_1(t) = 3t^3 - t^2 - 4t + 6, \quad P_2(t) = t^3 + t^2 + 4t + 4, \quad P_3(t) = t^3 - 4t + \lambda$$

να είναι γραμμικά ανεξάρτητα στον $\mathbb{R}_3[t]$.

Άσκηση 27. *Να δείξετε ότι τα ακόλουθα υποσύνολα:*

$$\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1 = 1, \quad \vec{e}_2 = t - 1, \quad \vec{e}_3 = t^2 - 1, \quad \vec{e}_4 = t^3 - 1\big\}$$

$$\mathcal{B}' = \big\{\vec{\varepsilon}_1 = 1 + t^3, \quad \vec{\varepsilon}_2 = t, \quad \vec{\varepsilon}_3 = t + t^3, \quad \vec{\varepsilon}_4 = t^2 + t^3\big\}$$

είναι βάσεις του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}_3[t]$.

Άσκηση 28. *Στον* $\mathbb{K}$*-διανυσματικό χώρο* $\mathbb{K}_2[x]$, *θεωρούμε τους υπόχωρους*

$$\mathcal{V} = \big\langle x^2 + x,\, x + 1\big\rangle \quad \textit{και} \quad \mathcal{W} = \big\langle -x^2 + x + 2,\, x + 3x + 1\big\rangle$$

Να βρεθούν βάσεις για τους υπόχωρους $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ *και* $\mathcal{V} + \mathcal{W}$.

Άσκηση 29. *Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του υπόχωρου* $\big\langle A,\, B,\, G,\, D\big\rangle$ *του* $\mathsf{M}_2(\mathbb{C})$, *όπου:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & -i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 2-i & 1+i \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3i & -2-i \\ 3i-5 & -i \end{pmatrix}$$

Άσκηση 30. *Να δειχθεί ότι το ακόλουθο σύνολο πολυωνύμων*

$$\mathcal{B} = \Big\{(1+x)^n,\, x(1+x)^{n-1}, \cdots, x^{n-1}(1+x),\, x^n\Big\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{K}_n[x]$.

Άσκηση 31. *Θαωρούμε τα πολυώνυμα*

$$P(x) = x^3 - x^2 + x + 3, \qquad Q(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x + 10, \qquad R(x) = 3x^3 + 3x^2 + x + 1$$

Είναι τα πολυώνυμα $P(X), Q(x), R(x)$ *γραμμικά ανεξάρτητα; Αν όχι, να βρεθεί μια σχέση γραμμικής εξάρτησης η οποία τα συνδέει, και να προσδιορισθεί μια βάση του υπόχωρου* $\langle P(x), Q(x), R(x)\rangle$ *του* $\mathbb{K}_3[x]$ *η οποία και να συμπληρωθεί σε μια βάση του* $\mathbb{K}_3[x]$.

Άσκηση 32. *Έστω* $P(x)$ *ένα πολυώνυμο βαθμού* $\deg P(x) = n$. *Αν η* k*-παράγωγος του* $P(x)$ *συμβολίζεται με* $P^{(k)}(x)$, *να δειχθεί ότι το σύνολο*

$$\mathcal{B} = \big\{1,\, P^{(1)}(x),\, P^{(2)}(x),\, \cdots,\, P^{(n)}(x)\big\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Είναι το σύνολο

$$\mathcal{C} = \big\{P(x),\, P^{(1)}(x),\, P^{(2)}(x),\, \cdots,\, P^{(n)}(x)\big\}$$

βάση του $\mathbb{K}_n[x]$;

Άσκηση 33. *Να δειχθεί ότι το σύνολο*

$$\mathcal{B} = \big\{1,\, x - 1,\, x^2 - 2x + 1\big\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{K}_2[x]$ *και ακολούθως να βρεθούν οι συνιστώσες του* $2x^2 - 5x + 6$ *ως προς τη βάση* $\mathcal{B}$.

Άσκηση 34. *Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου*

$$\mathcal{V} = \langle \vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \vec{x}_3,\ \vec{x}_4 \rangle$$

ο οποίος παράγεται απο τα διανύσματα

$$\vec{x}_1 = (1,\, 1,\, 2,\, 4), \quad \vec{x}_2 = (2,\, -1,\, 5,\, 2), \quad \vec{x}_3 = (1,\, -1,\, -4,\, 0),, \quad \vec{x}_4 = (2,\, 1,\, 1,\, 5),$$

η οποία να επεκταθεί σε μια βάση του $\mathbb{R}^4$.

Άσκηση 35. *Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του υπόχωρου* $\left\langle \vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z},\, \vec{w} \right\rangle$ *του* $\mathbb{K}^5$ *ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα:*

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (1,\, 7,\, 5,\, 3,\, -2) \\ \vec{y} &= (0,\, 4,\, 2,\, 2,\, 0) \\ \vec{z} &= (2,\, -2,\, 4,\, 0,\, 1) \\ \vec{w} &= (3,\, -1,\, 7,\, 1,\, 3) \end{aligned}$$

η οποία ακολούθως να συμπληρωθεί σε μια βάση $\mathcal{B}$ *του* $\mathbb{K}^5$*. Τέλος να βρεθούν οι συνιστώσες του διανύσματος* $(1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5)$ *ως προς τη βάση* $\mathcal{B}$.

Άσκηση 36. *Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του υπόχωρου* $\left\langle \vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z} \right\rangle$ *του* $\mathbb{C}^4$ *ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα:*

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (1,\, -i,\, -i,\, 1) \\ \vec{y} &= (i,\, 1,\, 1,\, i) \\ \vec{z} &= (1,\, i,\, 3i,\, 3) \end{aligned}$$

η οποία ακολούθως να συμπληρωθεί σε μια βάση του $\mathbb{C}^4$.

Άσκηση 37. *Θεωρούμε τα ακόλουθα υποσύνολα* 3×3 *πινάκων*

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{K}) \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{K} \right\}$$

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} b & a & c \\ a & c & b \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{K}) \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{K} \right\}$$

$$\mathcal{Z} = \left\{ \begin{pmatrix} c & a & b \\ b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{K}) \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{K} \right\}$$

Να δειχθεί ότι τα υποσύνολα $\mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{Z}$ *είναι υπόχωροι του* $\mathsf{M}_3(\mathbb{K})$ *και ακολούθως να βρεθούν βάσεις για τους υπόχωρους*

$$\mathcal{V}, \quad \mathcal{W}, \quad \mathcal{Z}, \quad \mathcal{V} \cap \mathcal{W}, \quad \mathcal{V} \cap \mathcal{Z}, \quad \mathcal{W} \cap \mathcal{Z}, \quad \mathcal{V} + \mathcal{W} + \mathcal{Z}$$