ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ **Β′** (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ **6**

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:
http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI/LAI2019/LAI2019.html

Παρασκευή 12 Δεκεμβρίου 2019

Άσκηση 1. *Θεωρούμε την κανονική βάση*

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = 1, \quad \vec{e}_1 = x, \quad \vec{e}_1 = x^2, \quad \vec{e}_1 = x^3\}$$

του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}_3[t]$. Να δειχθεί ότι το σύνολο διανυσμάτων

$$\mathcal{B}' = \{\vec{\varepsilon}_1 = 1 + x^3, \quad \vec{\varepsilon}_1 = x, \quad \vec{\varepsilon}_1 = x + x^3, \quad \vec{\varepsilon}_1 = x^2 + x^3\}$$

είναι βάση του $\mathbb{R}_3[x]$, και στη συνέχεια να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης P από την βάση $\mathcal{B}$ στην βάση $\mathcal{B}'$ και ο πίνακας μετάβασης Q από την βάση $\mathcal{B}'$ στην βάση $\mathcal{B}$. Να επαληθεύσετε ότι: $Q = P^{-1}$.

Άσκηση 2. *Για κάθε $\alpha \in \mathbb{K}$, θεωρούμε τις βάσεις*

$$\mathcal{B} = \{1, \ t, \ t^2, \ \cdots, \ t^n\}$$
$$\mathcal{B}' = \{1, \ t-\alpha, \ (t-\alpha)^2, \ \cdots, \ (t-\alpha)^n\}$$

του διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}_n[t]$. Να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης P από την βάση $\mathcal{B}$ στην βάση $\mathcal{B}'$ και ο πίνακας μετάβασης Q από την βάση $\mathcal{B}'$ στην βάση $\mathcal{B}$. Να επαληθεύσετε ότι: $Q = P^{-1}$. Ποιές είναι οι συνιστώσες του τυχόντος $P(t) \in \mathbb{K}_n[t]$ στις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$;

Άσκηση 3. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ και υποθέτουμε ότι $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι το σύνολο*

$$\mathcal{C} = \{\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \cdots, \vec{e}_{n-1} + \vec{e}_n, \vec{e}_n + \vec{e}_1\}$$

είναι επίσης βάση του $\mathcal{E}$ και να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ και $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$.

Άσκηση 4. *Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ μια βάση του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}_3[x]$ και έστω το σύνολο*

$$\mathcal{C} = \{\vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\} \subseteq \mathbb{K}_3[x]$$

Να δειχθεί ότι το σύνολο $\mathcal{C}$ είναι μια βάση του $\mathbb{K}_3[x]$, να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ και $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$, και να βρεθούν οι συνιστώσες του πολυωνύμου

$$P(x) = \vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{6}\vec{e}_3 + \frac{1}{24}\vec{e}_4$$

ως προς τη βάση $\mathcal{C}$.

Να εξετάσετε ειδικότερα τις περιπτώσεις: (α) $\mathcal{B}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{K}_3[x]$ και, (β) $\mathcal{B}$ είναι η βάση $\mathcal{B}'$ της Άσκησης 2.

Άσκηση 5. *Να δειχθεί ότι το σύνολο*

$$\mathcal{C} = \big\{1,\, 1+x,\, 1+x+x^2,\, \cdots,\, 1+x+x^2+\cdots+x^n\big\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{K}_n[x]$. Να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ και $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$, όπου $\mathcal{B}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{K}_n[x]$. Ποιές είναι οι συνιστώσες ενός πολυωνύμου

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

στη βάση $\mathcal{C}$;

Άσκηση 6. *Θεωρούμε το σύνολο*

$$\mathcal{C} = \big\{(1+t)^n,\ t(1+t)^{n-1},\ t^2(1+t)^{n-2},\ \cdots,\ t^n\big\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}_n[t]$ και ακολούθως να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης από την κανονική βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{K}_n[t]$ στην $\mathcal{C}$ και από τη βάση $\mathcal{C}$ στην κανονική βάση $\mathcal{B}$.

Άσκηση 7. *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ ένας αντιστρέψιμος $n\times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι ο πίνακας A είναι ο πίνακας μετάβασης από μια βάση $\mathcal{B}$ σε μια βάση $\mathcal{C}$ ενός κατάλληλου $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$.*

Υπόδειξη: Θεωρείστε τον $\mathbb{K}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}_n$ των στηλών με n στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$ και θεωρείστε την κανονική βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{K}_n$.

Άσκηση 8. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Αν $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{E} = n$, να δειχθεί ότι υπάρχουνν υπόχωροι $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \cdots, \mathcal{V}_n$ του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε:*

$$\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{V}_{n-1} \subseteq \mathcal{V}_n = \mathcal{E}$$

έτσι ώστε, $\forall k = 0, 1, 2, \cdots, n$: $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V}_k = k$.

Άσκηση 9. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Ο $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένη διάσταση.*
(2) *Αν*

$$\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{V}_{n+1} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{E}$$

είναι μια αύξουσα ακολουθία υπόχωρων του $\mathcal{E}$, τότε υπάρχει $n \geq 0$ έτσι ώστε:

$$\mathcal{V}_n = \mathcal{V}_{n+1} = \cdots$$

Αν ισχύει η συνθήκη (2) και n είναι ο μεγαλύτερος μη-αρνητικός ακέραιος έτσι ώστε $\mathcal{V}_n = \mathcal{V}_{n+1} = \cdots$, για κάθε τέτοια ακολουθία υπόχωρων, τότε να δειχθεί ότι ο $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένη διάσταση και:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{E} = n$$

Άσκηση 10. *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Θεωρούμε τα υποσύνολα:*

$$\mathcal{U}(A) = \big\{AX \in \mathbb{K}_m \mid X \in \mathbb{K}_n\big\} \quad \text{και} \quad \mathcal{V}(A) = \big\{{}^tAAX \in \mathbb{K}_m \mid X \in \mathbb{K}_n\big\}$$

Να δειχθεί ότι τα υποσύνολα $\mathcal{U}(A)$ και $\mathcal{V}(A)$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{K}_m$ και:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U}(A) = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V}(A)$$

Άσκηση 11. *Να δειχθεί ότι το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, θεωρούμενο ως $\mathbb{Q}$-διανυσματικός χώρος έχει άπειρη διάσταση:*

$$\dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{R} = \infty$$

Άσκηση 12. *Θεωρούμε τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{K}^6$:*

$$\mathcal{U} = \big\{(x, x+z, x-y+2z, -z, x, y) \in \mathbb{K}^6 \mid x, y, z \in \mathbb{K}\big\}$$

$$\mathcal{V} = \big\{(x+y-w, x+y+z, w, -y-z, -y, z+w) \in \mathbb{K}^6 \mid x, y, z, w \in \mathbb{K}\big\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι τα υποσύνολα $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{K}^6$.*
(2) *Να βρεθούν βάσεις των $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ οι οποίες να επεκταθούν σε βάσεις του $\mathbb{K}^6$.*
(3) *Να βρεθούν βάσεις των υπόχωρων $\mathcal{U}+\mathcal{V}$ και $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$.*

Άσκηση 13. *Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$:*

$$\vec{x}_1 = (1,2,1,-2), \quad \vec{x}_2 = (1,0,1,-1), \quad \vec{x}_3 = (1,2,2,-3)$$

$$\vec{y}_1 = (1,1,1,1), \quad \vec{y}_2 = (1,0,1,-1), \quad \vec{y}_3 = (1,3,0,-4)$$

Αν

$$\mathcal{V} = \big\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \big\rangle \quad \text{και} \quad \mathcal{U} = \big\langle \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3 \big\rangle$$

να βρεθούν βάσεις και η διάσταση των υπόχωρων $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}+\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}\cap\mathcal{U}$.

Άσκηση 14. *Θεωρούμε τα σύνολα διανυσμάτων του $\mathbb{K}^4$:*

$$\mathcal{A}_1 = \big\{(2,\,1,\,4,\,3),\ \ (2,\,1,\,2,\,0)\big\}$$

$$\mathcal{A}_2 = \big\{(1,\,1,\,2,\,0),\ \ (2,\,1,\,0,\,2)\big\}$$

$$\mathcal{A}_3 = \big\{(1,\,2,\,3,\,4),\ \ (0,\,4,\,5,\,2)\big\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι τα σύνολα διανυσμάτων $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, και $\mathcal{A}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*
(2) *Να συμπληρωθούν τα σύνολα $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, και $\mathcal{A}_3$ σε βάσεις $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, και $\mathcal{B}_3$ του $\mathbb{K}^4$.*
(3) *Να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης:*
  (α΄) $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ *από τη βάση $\mathcal{B}_1$ στη βάση $\mathcal{B}_2$.*
  (β΄) $M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3}$ *από τη βάση $\mathcal{B}_2$ στη βάση $\mathcal{B}_3$.*
  (γ΄) $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_3}$ *από τη βάση $\mathcal{B}_1$ στη βάση $\mathcal{B}_3$.*
(4) *Να επαληθεύσετε ότι:*

$$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_3} = M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \cdot M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3}$$

Άσκηση 15. *Θεωρούμε n το πλήθος στοιχεία $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ενός σώματος $\mathbb{K}$ και έστω τα διανύσματα:*

$$\vec{x}_1 = (0, a_1, a_2, \cdots, a_n), \ \ \vec{x}_2 = (a_1, 0, \cdots, 0), \ \ \vec{x}_3 = (a_2, 0, \cdots, 0), \ \cdots, \ \vec{x}_{n+1} = (a_n, 0, \cdots, 0)$$

του $\mathbb{K}^{n+1}$. Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου $\mathcal{U}$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{n+1}$ και να συμπληρωθεί σε μια βάση $\mathcal{C}$ του $\mathbb{K}^{n+1}$. Ποιός είναι ο πίνακας μετάβασης από την κανονική βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{K}^{n+1}$ στη βάση $\mathcal{C}$ και ποιός ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{C}$ στη βάση $\mathcal{B}$;

Υπενθυμίζουμε ότι, αν $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \cdots, \mathcal{U}_n$ είναι υπόχωροι ενός $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$, τότε το άθροισμα

$$\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots + \mathcal{U}_n = \big\{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n \in \mathcal{E} \mid \vec{x}_i \in \mathcal{U}_i, \ 1 \le i \le n\big\}$$

των υπόχωρων $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \cdots, \mathcal{U}_n$ είναι επίσης ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$.

Το άθροισμα $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots + \mathcal{U}_n$ των υπόχωρων $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \cdots, \mathcal{U}_n$ καλείται **ευθύ άθροισμα** αν ισχύει η μοναδικότητα της γραφής:

$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n = \vec{x}'_1 + \vec{x}'_2 + \cdots + \vec{x}'_n, \ \ \text{όπου} \ \ \vec{x}_i, \vec{x}'_i \in \mathcal{U}_i, \ 1 \le i \le n \quad \Longrightarrow \quad \vec{x}_i = \vec{x}'_i, \ \forall i = 1, 2, \cdots, n$$

Αν το άθροισμα $\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2+\cdots+\mathcal{U}_n$ είναι ευθύ, τότε θα γράφουμε: $\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2+\cdots+\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_1\oplus\mathcal{U}_2\oplus\cdots\oplus\mathcal{U}_n$.

Άσκηση 16. *Έστω ότι $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \cdots, \mathcal{U}_n$ είναι υπόχωροι ενός $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots + \mathcal{U}_n = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_n$.

(2)
$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n = \vec{0}, \quad \text{όπου} \quad \vec{x}_i \in \mathcal{U}_i,\ 1 \leq i \leq n \quad \Longrightarrow \quad \vec{x}_i = \vec{0},\ \forall i = 1, 2, \cdots, n$$

(3) $\forall i = 1, 2, \cdots, n$:
$$\mathcal{U}_i \bigcap \big(\mathcal{U}_1 + \cdots + \mathcal{V}_{i-1} + \mathcal{V}_{i+1} + \cdots + \mathcal{V}_n\big) = \{\vec{0}\}$$

Άσκηση 17. *Θεωρούμε το υποσύνολο*
$$\mathcal{U} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid 2x + y + 3z = 0\big\} \subseteq \mathbb{K}^3$$
Να δειχθεί ότι το υποσύνολο $\mathcal{U}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{K}^3$ και να βρεθεί υπόχωρος $\mathcal{V}$ του $\mathbb{K}^3$ έτσι ώστε:
$$\mathbb{K}^3 = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

Άσκηση 18. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ και έστω $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\big\}$ μια βάση του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι*
$$\mathcal{E} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_n$$
όπου $\mathcal{U}_i = \langle \vec{e}_i \rangle$, $1 \leq i \leq n$.

Άσκηση 19. *Έστω ότι $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \cdots, \mathcal{U}_n$ είναι υπόχωροι ενός $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$, και υποθέτουμε ότι ο $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένη διάσταση.*

(1)
$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\big(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots + \mathcal{U}_n\big) \ \leq\ \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U}_1 + \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U}_2 + \cdots + \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U}_n$$

(2) *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α')
$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\big(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots + \mathcal{U}_n\big) \ =\ \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U}_1 + \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U}_2 + \cdots + \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U}_n$$

(β') $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots + \mathcal{U}_n = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_n$.

Άσκηση 20. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος και $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, και $\mathcal{W}$ τρεις υπόχωροι του $\mathcal{E}$.*

(1) *Αν $\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ και $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$, να δειχθεί ότι:*
$$\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \big(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}\big)$$

(2) *Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α') $\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$.

(β') (i) $\mathcal{E} = \mathcal{U} + \mathcal{V} + \mathcal{W}$.

(ii) $\mathcal{U} \cap \big(\mathcal{V} + \mathcal{W}\big) = \{\vec{0}\}$ *και* $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\vec{0}\}$.

Άσκηση 21. *Έστω $\mathcal{V}$ ο υπόχωρος του $\mathbb{R}_4[t]$ ο οποίος παράγεται από τα πολυώνυμα*
$$t^4 + 3t^3 - 3t^2 + 4t - 1, \qquad t^4 + 4t^3 - t^2 - 2t - 2, \qquad 2t^4 + 9t^3 - 2t - 5$$
$\mathcal{U}$ ο υπόχωρος του $\mathbb{R}_4[t]$ ο οποίος παράγεται από τα πολυώνυμα
$$t^4 + 6t^3 + 2t^2 + 3t - 2, \qquad 2t^4 + 8t^3 - t^2 - 5t + 6, \qquad 2t^4 + 9t^3 - 6t - 5$$
Να βρεθούν μια βάση του $\mathcal{V} + \mathcal{U}$ η οποία να συμπληρωθεί σε μια βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}_4[t]$, και μια βάση του $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$ η οποία να συμπληρωθεόι σε μια βάση $\mathcal{C}$ του $\mathbb{R}_4[t]$. Να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης μεταξύ των βάσεων $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$.

Άσκηση 22. *Θεωρούμε τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}^5$:*

$$\mathcal{U} = \big\{(x, 2x, -x, 3x) \in \mathbb{K}^4 \mid x \in \mathbb{K}\big\}$$
$$\mathcal{V} = \big\{(x, y, -x + 3y, -y) \in \mathbb{K}^4 \mid x, y \in \mathbb{K}\big\}$$
$$\mathcal{W} = \big\{(x, 0, y, z) \in \mathbb{K}^4 \mid x, y, z \in \mathbb{K}\big\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι τα υποσύνολα $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, και $\mathcal{W}$ είναι υπόχωρου του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}^4$.*
(2) *Να βρεθούν βάσεις των υπόχωρων $\mathcal{U} + \mathcal{V}$, $\mathcal{U} + \mathcal{V}$, $\mathcal{U} + \mathcal{W}$, $\mathcal{V} + \mathcal{W}$, $\mathcal{U} + \mathcal{V} + \mathcal{W}$.*
(3) *Να εξετασθεί αν: $\mathbb{K}^4 = \mathcal{U} \oplus (\mathcal{V} + \mathcal{W})$ ή $\mathbb{K}^4 = \mathcal{V} \oplus (\mathcal{U} + \mathcal{W})$ ή $\mathbb{K}^4 = \mathcal{W} \oplus (\mathcal{U} + \mathcal{V})$.*

Άσκηση 23. *Να δειχθεί ότι τα σύνολα διανυσμάτων*

$$\mathcal{U} = \big\{(x, 0, 0) \in \mathbb{K}^3 \mid x \in \mathbb{K}\big\}$$
$$\mathcal{V} = \big\{(x, 0, 2x) \in \mathbb{K}^3 \mid x \in \mathbb{K}\big\}$$
$$\mathcal{W} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x + y - z = 0 \ \textit{και} \ x - 2y + z = 0\big\}$$

είναι υπόχωροι του $\mathbb{K}^3$ και ακολούθως να δειχθεί ότι:

$$\mathbb{K}^3 = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$$

Άσκηση 24. *Θεωρούμε τους 2×2 πίνακες*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Αν $\mathcal{V} = \langle A,\ B,\ C \rangle$ και $\mathcal{U} = \langle X,\ Y,\ Z \rangle$:

(1) *Να βρεθούν βάσεις για τους υπόχωρους $\mathcal{V}$ και $\mathcal{U}$, οι οποίες να συμπληρωθούν σε βάσεις του $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.*
(2) *Να βρεθούν βάσεις για τους υπόχωρους $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$ και $\mathcal{V} + \mathcal{U}$.*
(3) *Να βρεθούν υπόχωροι $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ έτσι ώστε:*

$$\mathsf{M}_2(\mathbb{R}) = (\mathcal{V} \cap U) \oplus \mathcal{X} \quad \textit{και} \quad \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) = (\mathcal{V} + U) \oplus \mathcal{Y}$$

Υπενθυμίζουμε ότι ένας $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ καλείται **αυστηρά άνω τριγωνικός**, αν: $a_{ij} = 0$, $1 \leq j \leq i \leq n$. Ο $n \times n$ πίνακας A καλείται $A = (a_{ij})$ καλείται **αυστηρά κάτω τριγωνικός**, αν: $a_{ij} = 0$, $1 \leq i \leq j \leq n$.

Άσκηση 25. *Αν $\mathbb{K}$ είναι ένα σώμα, έστω $\mathsf{AT}_n(\mathbb{K})$ το σύνολο των άνω τριγωνικών $n \times n$ πινάκων υπεράνω του $\mathbb{K}$, έστω $\mathsf{KT}_n(\mathbb{K})$ το σύνολο των κάτω τριγωνικών $n \times n$ πινάκων υπεράνω του $\mathbb{K}$, και έστω $\mathsf{D}_n(\mathbb{K})$ το σύνολο των διαγωνίων $n \times n$ πινάκων υπεράνω του $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι:*

$$\mathsf{M}_n(\mathbb{K}) = \mathsf{AT}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathsf{D}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathsf{KT}_n(\mathbb{K})$$

Άσκηση 26. *Έστω ότι $\rho_0, \rho_1, \cdots, \rho_n$ είναι ανά δύο διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να δειχθεί ότι υπάρχει ακριβώς ένα σύνολο πολυωνύμων $P_0(t), P_1(t), \cdots, P_n(t)$ βαθμού n, έτσι ώστε:*

$$\forall i, j = 0, 1, 2, \cdots, n: \quad P_i(\rho_j) = \begin{cases} 1, & \textit{αν } i = j \\ 0, & \textit{αν } i \neq j \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι το σύνολο πολυωνύμων $\mathcal{C} = \big\{P_0(t), P_1(t), \cdots, P_n(t)\big\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}_n[t]$, και ακολούθως να βρεθούν οι συνιστώσες τυχόντος πολυωνύμου $Q(t)$ ως προς τη βάση $\mathcal{C}$.