ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

Προτεινομενες Ασκησεις - Φυλλαδιο 7

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI/LAI2019/LAI2019.html

Παρασκευή 20 Δεκεμβρίου 2019

Άσκηση 1. *Έστω $\mathbb{C}$ το σώμα των μιγαδικών αριθμών. Θα γράφουμε $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ όταν θεωρούμε το $\mathbb{C}$ ως διανυσματικό χώρο υπεράνω του $\mathbb{C}$ και θα γράφουμε $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ όταν θεωρούμε το $\mathbb{C}$ ως διανυσματικό χώρο υπεράνω του $\mathbb{R}$.*

(1) *Η απεικόνιση:*
$$f\colon \mathbb{C}^2_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{C}}, \quad f(z,w) = z + \overline{w}$$
δεν είναι γραμμική.

(2) *Η απεικόνιση:*
$$f\colon \mathbb{C}^2_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{R}}, \quad f(z,w) = z + \overline{w}$$
είναι γραμμική.

Παραπάνω $\overline{z}$ συμβολίζει τον συζυγή του μιγαδικού αριθμού $z = a + bi$, δηλαδή $\overline{z} = a - bi$.

Άσκηση 2. *Να περιγραφούν όλες οι γραμμικές απεικονίσεις $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, όταν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = 1$.*

Άσκηση 3. *Να εξετασθεί αν υπάρχουν γραμμικές απεικονίσεις $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ έτσι ώστε: $\mathsf{Ker}(f) = \mathsf{Im}(f)$.*

Άσκηση 4. *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση*
$$f\colon \mathsf{M}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}_4, \quad f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$
είναι ισομορφισμός. Να γενικευτεί το συμπέρασμα για τον $\mathbb{K}$-διανυσματικό χώρο $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Άσκηση 5. *Να εξετασθεί ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικές:*

(1) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4,\ f(x,y) = (x+y,\, 2xz,\, 3x,\, x-z+2y)$.
(2) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (y+z,\, 2x+z,\, 3x-y+z)$.
(3) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (y-2z+1,\, x-2y,\, 1-2y)$.
(4) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x-y+z,\, z+2x,\, x-3y)$.
(5) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (2x+y,\, x+z,\, y^2)$.
(6) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x,\, y+1,\, z+2)$.

Άσκηση 6. *Να δειχθεί ότι η γραμμική απεικόνιση*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$$

είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 7. *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση* $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x+y, z)$.

(1) *Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα* $\mathsf{Ker}(f)$ *και την εικόνα* $\mathsf{Im}(f)$ *της* f.

(2) *Να βρεθεί ο υπόχωρος* $f(\mathcal{V})$, *όπου*

$$\mathcal{V} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\big\}$$

(3) *Να βρεθεί ο υπόχωρος* $f^{-1}(\mathcal{W})$, *όπου*

$$\mathcal{W} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x-y=0\big\}$$

Άσκηση 8. *Θαωρούμε τη γραμμική απεικόνιση* $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x-z, x+y, x-y-z)$.

(1) *Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα* $\mathsf{Ker}(f)$ *και την εικόνα* $\mathsf{Im}(f)$ *της* f.

(2) *Να βρεθεί ο υπόχωρος* $f(\mathcal{V})$, *όπου*

$$\mathcal{V} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=y=z\big\}$$

(3) *Να βρεθεί ο υπόχωρος* $f^{-1}(\mathcal{W})$, *όπου*

$$\mathcal{W} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid z=0\big\}$$

(4) *Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου* $f(\mathcal{V}) \cap f^{-1}(\mathcal{W})$.

Άσκηση 9. *Θεωρούμε τις απεικονίσεις*

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x+y, y_2 z, -x+y+z)$$

$$g\colon \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x], \quad f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (2a_2 - 3a_1 + a_0) + (a_2 - 2a_1)x + 2a_2 x^2$$

Να δειχθεί ότι οι f *και* g *είναι ισομορφισμοί και να βρεθούν οι απεικονίσεις* f^{-1} *και* g^{-1}.

Άσκηση 10. *Να ορίσετε ένα ισομορφισμό από τον* $\mathbb{R}$*-διανυσματικό χώρο* $\mathbb{R}_3[t]$ *στον* $\mathbb{R}$*-διανυσματικό χώρο* $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, *και έναν ισομορφισμό από τον* $\mathbb{R}$*-διανυσματικό χώρο* $\mathbb{R}_3[t]$ *στον* $\mathbb{R}$*-διανυσματικό χώρο* $\mathbb{R}^4$.

Άσκηση 11. *Να προσδιορίστε ποιοί από τους ακόλουθους διανυσματικούς χώρους είναι ισόμορφοι μεταξύ τους:*

$$\mathbb{C}, \quad \mathbb{R}_2[x], \quad \mathbb{R}^4, \quad \mathbb{R}, \quad \mathsf{M}_2(\mathbb{R}), \quad \mathbb{R}^3, \quad \mathbb{R}_6[x], \quad \big\{(x,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\big\}, \quad \mathbb{R}_1[x], \quad \big\{A \in \mathsf{M}_3(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\big\}$$

Άσκηση 12. *Να προσδιορίσετε (χωρίς να το επιλύσετε) τη διάσταση του χώρου λύσεων του συστήματος:*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Άσκηση 13. *Στον* $\mathbb{R}$*-διανυσματικό χώρο* $\mathbb{R}_2[t]$ *θεωρούμε τους υπόχωρους*

$$\mathcal{V} = \big\langle t^2 + t,\ t+1 \big\rangle, \qquad \mathcal{W} = \big\langle -t^2 + t + 2,\ t+3 \big\rangle$$

Να βρεθεί ένας ισομορφισμός $f\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$.

Άσκηση 14. *Να δείξετε ότι:*

(1) *Η γραμμική απεικόνιση*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x,y,z) = (4x - 2y - z, 3x - 4y + z)$$

είναι επιμορφισμός, αλλά όχι μονομορφισμός. Επιπλέον να δειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός:

$$\mathbb{R}^3 \cong \mathsf{Ker}(f) \oplus \mathbb{R}^2$$

(2) *Η γραμμική απεικόνιση*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y) = (2x - y, x + 2y, 0)$$

είναι μονομορφισμός, αλλά όχι επιμορφισμός. Επιπλέον να δειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός:

$$\mathbb{R}^3 \cong \mathsf{Im}(f) \oplus \mathbb{R}$$

Άσκηση 15. *Θεωρούμε τον υπόχωρο*

$$\mathcal{V} = \big\{(x,0,z,0) \in \mathbb{R}^4 \mid x,z \in \mathbb{R}\big\}$$

(1) *Να βρεθεί μια γραμμική απεικόνιση* $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *έτσι ώστε:*

$$\mathsf{Ker}(f) = \mathcal{V}$$

(2) *Να βρεθεί μια γραμμική απεικόνιση* $g\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *έτσι ώστε:*

$$\mathsf{Im}(f) = \mathcal{V}$$

Άσκηση 16. *Να βρεθεί η βαθμίδα της γραμμικής απεικόνισης*

$$f\colon \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \big(x_1 - x_3 + 3x_4 - x_5,\ x_1 + 2x_4 - x_5,\ 2x_1 - x_3 + 5x_4 - x_5,\ -x_3 + x_4\big)$$

Άσκηση 17. *Έστω* $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\big\}$ *μια βάση του* $\mathbb{R}^3$ *και* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *η μοναδική γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε:*

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad f(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1, \quad f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

Να δείξετε ότι η f *είναι ισομορφισμός.*

Άσκηση 18. *Έστω* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *η μοναδική γραμμική απεικόνιση η οποία στέλνει τα διανύσματα της κανονικής βάσης* $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\big\}$ *του* $\mathbb{R}^n$ *στα διανύσματα:*

$$\big\{\vec{w}_1 = (0,0,\cdots,0),\ \vec{w}_2 = (1,0,\cdots,0),\ \vec{w}_3 = (0,2,\cdots,0),\ \cdots,\ \vec{w}_n = (0,0,\cdots,0,n-1,0)\big\}$$

αντίστοιχα, δηλαδή $f(\vec{e}_i) = \vec{w}_i$ *για* $i = 1, \cdots, n$. *Να δείξετε ότι* $f^n = 0$ *και να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα* $\mathsf{Ker}(f)$ *και την εικόνα* $\mathsf{Im}(f)$ *της* f.

Άσκηση 19. *Έστω* $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\big\}$ *μια βάση του* $\mathbb{R}^3$ *και έστω* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *η μοναδική γραμμική απεικόνιση για την οποία ισχύει ότι:*

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad f(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 \quad f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα $\mathsf{Ker}(f)$ *και την εικόνα* $\mathsf{Im}(f)$ *της γραμμικής απεικόνισης* f.

Άσκηση 20. *Να βρεθεί η τιμή του* $\lambda \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε η γραμμική απεικόνιση* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *η οποία ορίζεται μοναδικά από τις ακόλουθες σχέσεις*

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_4, \quad f(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad f(\vec{e}_3) = 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad f(\vec{e}_4) = 2\vec{e}_3 + \vec{e}_4$$

να είναι ισομορφισμός, όπου $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3,\ \vec{e}_4\big\}$ *είναι μια τυχούσα βάση του* $\mathbb{R}^4$.

Για τις τιμές του λ *για τις οποίες η* f *δεν είναι ισομορφισμός, να βρεθούν βάσεις του πυρήνα και της εικόνας της* f.

Άσκηση 21. *Μια γραμμική απεικόνιση* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *καλείται* **μηδενοδύναμη** *αν υπάρχει* $n \geq 0$ *έτσι ώστε:* $f^n = 0$. *Να δειχθεί ότι αν η* f *είναι μηδενοδυναμη, τότε η απεικόνιση* $\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f$ *είναι ισομορφισμός.*

Άσκηση 22. *Να βρεθεί η μοναδική γραμμική απεικόνιση* $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *έτσι ώστε:*

$$f(4,2,0) = 2, \qquad f(1,2-3) = -7, \qquad f(0,2,5) = 1$$

να δειχθεί ότι είναι επιμορφισμός και να βρεθεί μια βάση του πυρήνα $\mathsf{Ker}(f)$ *της.*

Άσκηση 23. *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση*

$$f_A\colon \mathbb{K}_4 \longrightarrow \mathbb{K}_4, \quad f_A(X) = AX$$

όπου:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 8 \\ -4 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα $\mathsf{Ker}(f_A)$ *και την εικόνα* $\mathsf{Im}(f_A)$.

Άσκηση 24. *Θεωρούμε την απεικόνιση*

$$f\colon \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[x], \quad f(P(x)) = P(x) - P(x)'$$

όπου $P(x)'$ *συμβολίζει την παράγωγο του* $P(x)$. *Να δειχθεί ότι η* f *είναι ισομορφισμός και να προσδιοριστεί η αντίστροφή της.*

Άσκηση 25. *Έστω* $f\colon \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ *η μοναδική γραμμική απεικόνιση για την οποία ισχύει ότι:*

$$f(1) = x, \qquad f(x-1) = x^2+1, \qquad f(1-2x+x^2) = 1+x+x^2$$

Να εξετασθεί αν η f *είναι ισομορφισμός. Αν ναι, να βρεθεί η απεικόνιση* f^{-1}. *Αν όχι, να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα* $\mathsf{Ker}(f)$ *και την εικόνα* $\mathsf{Im}(f)$ *της* f.

Άσκηση 26. *Έστω* $f, g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *δύο γραμμικές απεικονίσεις, όπου* $\mathcal{E}$ *είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος* $\mathbb{K}$. *Υποθέτουμε ότι* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$, *και έστω ότι* $f + g = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$.

Να δείξετε ότι:

$$\mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g) \geq n$$

Άσκηση 27. *Έστω* $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ *μια βάση του* $\mathbb{K}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathcal{E}$ *και έστω* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k$ *διανύσματα του* $\mathcal{E}$, *όπου* $k \leq n$. *Να δειχθεί ότι τα διανύσματα* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνον αν υπάρχει ισομορφισμός* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, *έτσι ώστε* $f(\vec{e}_i) = \vec{x}_i$, $1 \leq i \leq k$.

Άσκηση 28. *Έστω* $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k\}$ *ένα σύνολο διανυσμάτων του* $\mathbb{K}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathcal{E}$ *ο οποίος έχει πεπερασμένη διάσταση. Να δειχθεί ότι το σύνολο* $\mathcal{B}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνον αν υπάρχουν γραμμικές απεικονίσεις* $f_i\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq k$, *έται ώστε ο πίνακας*

$$\begin{pmatrix} f_1(\vec{e}_1) & f_1(\vec{e}_2) & \cdots & f_1(\vec{e}_k) \\ f_2(\vec{e}_1) & f_2(\vec{e}_2) & \cdots & f_2(\vec{e}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_k(\vec{e}_1) & f_k(\vec{e}_2) & \cdots & f_k(\vec{e}_k) \end{pmatrix}$$

να είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 29. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μαι γραμμική απεικόνιση και υποθέτουμε ότι για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in' E$,τα διανύσματα $\vec{x}$ και $f(\vec{x})$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.*

Να δειχθεί ότι, υπάρχει $\lambda \in \mathbb{K}$: $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$.

Άσκηση 30. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση για την οποία ισχύει ότι: $f^2 = -\mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$.*

(1) *Να δειχθεί ότι η f είναι ισομορφισμός.*
(2) *Να δειχθεί ότι αν τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}, f(\vec{x})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε και τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}, f(\vec{x}), f(\vec{y})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*
(3) *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση $\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ισομορφισμός.*

Να δοθεί παράδειγμα τέτοιας γραμμικής απεικόνισης.

Άσκηση 31. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση για την οποία ισχύει ότι $f^n = 0$ και $f^{n-1} \neq 0$. Να δειχθεί ότι το σύνολο $\big\{\mathsf{Id}_{\mathcal{E}},\ f,\ f^2,\ \cdots,\ f^{n-1}\big\}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$.*

Άσκηση 32. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = 2n$. Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις*

$$f - \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (f - \mathsf{Id}_{\mathcal{E}})(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \vec{x}$$

$$f - 2\mathsf{Id}_{\mathcal{E}}\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (f - 2\mathsf{Id}_{\mathcal{E}})(\vec{x}) = f(\vec{x}) - 2\vec{x}$$

Αν

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Im}(f - \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}) = n = \dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Im}(f - 2\mathsf{Id}_{\mathcal{E}})$$

Να δειχθεί ότι:

$$\mathcal{E} = \mathsf{Ker}(f - \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}) \oplus \mathsf{Ker}(f - 2\mathsf{Id}_{\mathcal{E}})$$

Άσκηση 33. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση , όπου $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ είναι διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = m$. Αν $\mathbf{r}(f) = 1$, να δειχθεί ότι υπάρχει ένας διανυσματικός χώρος $\mathcal{G}$ με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{G} = 1$ και γραμμικές απεικονίσεις $g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{G}$ και $h\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$ έτσι ώστε:*

$$f = h \circ g$$

Τι ισχύει αν $\mathbf{r}(f) > 1$;

Άσκηση 34. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ και $g\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις για τις οποίες ισχύει ότι:*

$$f \circ g \circ f = f \quad \text{και} \quad g \circ f \circ g = g$$

(1) *Θέτοντας $h_1 = g \circ f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ και $h_2 = f \circ g\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$, να δειχθεί ότι:*

$$h_1^2 = h_1 \quad \text{και} \quad h_2^2 = h_2$$

$$\mathsf{Ker}(h_1) = \mathsf{Ker}(f) \quad \text{και} \quad \mathsf{Ker}(h_2) = \mathsf{Ker}(g)$$

$$\mathsf{Im}(h_1) = \mathsf{Im}(g) \quad \text{και} \quad \mathsf{Im}(h_2) = \mathsf{Im}(f)$$

(2) *Να δειχθεί ότι:*

$$\mathcal{E} = \mathsf{Ker}(f) \oplus \mathsf{Im}(g) \quad \text{και} \quad \mathcal{F} = \mathsf{Ker}(g) \oplus \mathsf{Im}(f)$$

Άσκηση 35. *Έστω $f, g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ δύο γραμμικές απεικόνισεις, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Να δειχθεί ότι:*

$$\mathbf{r}(g) + \mathbf{r}(f) - \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} \ \leq \ \mathbf{r}(g \circ f) \ \leq \ \min\big\{\mathbf{r}(g), \mathbf{r}(f)\big\}$$

Επιπλέον να δειχθεί ότι:

$$\mathbf{r}(f+g) \ \leq \ \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g)$$

και

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Ker}(g \circ f) \ \leq \ \dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Ker}(g) + \dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Ker}(g)$$

Άσκηση 36. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ $\mathbb{K}$-διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης, και θεωρούμε έναν υπόχωρο $\mathcal{V}$ του $\mathcal{E}$ και έναν υπόχωρο $\mathcal{W}$ του $\mathcal{F}$. Τότε:*

(1) *Αν $\mathsf{Ker}(f) \subseteq \mathcal{V}$, να δειχθεί ότι:*

$$\dim_{\mathbb{K}} f(\mathcal{V}) \ = \ \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} + \mathbf{r}(f) - \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} \ = \ \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} - \dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Ker}(f)$$

(2) *Αν $\mathcal{W} \subseteq \mathsf{Im}(f)$, τότε:*

$$\dim_{\mathbb{K}} f^{-1}(\mathcal{W}) \ = \ \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} - \mathbf{r}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} \ = \ \dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W}$$

Άσκηση 37. *Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ και υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n < \infty$. Έστω $\mathcal{V}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$ και $\mathcal{U}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{F}$ και υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} = n$. Να δειχθεί ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ έτσι ώστε:*

$$\mathsf{Ker}(f) = \mathcal{V} \quad \text{και} \quad \mathsf{Im}(f) = \mathcal{U}$$

Άσκηση 38. *Έστω $f, g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K} \in \big\{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\big\}$. Να δειχθεί ότι*

$$f(\vec{x})\, g(\vec{x}) = 0, \ \ \forall \vec{x} \in \mathcal{E} \qquad \Longrightarrow \qquad f = 0 \quad ή \quad g = 0$$

Τι ισχύει αν $f_i\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$ είναι γραμμικές απεικονίσεις και $f_1(\vec{x}) f_2(\vec{x}) \cdots f_n(\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$;