ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

Προτεινομενες Ασκησεις - Φυλλαδιο 9

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:
http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI/LAI2019/LAI2019.html

Παρασκευή 17 Ιανουαρίου 2020

Άσκηση 1. *Έστω $A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Να δείξετε ότι:*

(1) $\mathbf{r}(\kappa A) = \mathbf{r}(A)$.
(2) $|\mathbf{r}(A) - \mathbf{r}(B)| \ \leq\ \mathbf{r}(A+B) \ \leq\ \mathbf{r}(A) + \mathbf{r}(B)$.

Άσκηση 2. *Έστω $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ένας $m \times n$ πίνακας και $B \in \mathsf{M}_{n\times r}(\mathbb{K})$ ένας $n \times r$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$.*

(1) $\mathbf{r}(AB) \ \leq\ \min\big\{\mathbf{r}(A), \mathbf{r}(B)\big\}$.
(2) *Αν $n = r$ και ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος, τότε:* $\mathbf{r}(AB) = \mathbf{r}(A)$.
(3) *Αν $m = n$ και ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε:* $\mathbf{r}(AB) = \mathbf{r}(B)$.
(4) $\mathbf{r}(AB) \ \geq\ \mathbf{r}(A) + \mathbf{r}(B) - n$.

Άσκηση 3. *Θεωρούμε έναν $m \times n$ πίνακα με στοιχεία πό ένα σώμα $\mathbb{K}$. Αν $\mathbf{r}(A) = r$, να δειχθεί ότι υπάρχει ένας $m \times r$ πίνακας B και ένας $r \times n$ πίνακας C έτσι ώστε:*

$$A = B \cdot C, \qquad \textit{και} \quad \mathbf{r}(B) = r = \mathbf{r}(C)$$

Άσκηση 4. *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ ένας $n\times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$ και υποθέτουμε ότι $\mathbf{r}(A) = 1$.*

(1) *Να δειχεί ότι υπάρχει μοναδικό $\lambda \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε:*
$$A^2 = \lambda A$$
(2) *Αν $\lambda \neq 1$, να δειχθεί ότι ο πίνακας $I_n - A$ είναι αντιστρέψιμος.*

Άσκηση 5. *Να δείξετε ότι για τους πίνακες*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \textit{και} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -5 & -1 \\ 2 & 1 & 6 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & -7 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ισχύει: $\mathbf{r}(A) = 4$ *και* $\mathbf{r}(B) = 3$.

Άσκηση 6. *Για τις διάφορες τιμές των* $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\ \in\ \mathbb{R}$*, να υπολογισθεί η βαθμίδα του πίνακα*

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & \alpha & 0 & 0 & 0\\ 0 & \beta & 1 & \beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \gamma & 1 & \gamma & 0\\ 0 & 0 & 0 & \delta & 1 & \delta\end{pmatrix}$$

Άσκηση 7. *Για τις διάφορες τιμές των* $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$*, να υπολογισθεί η βαθμίδα του πίνακα*

$$A=\begin{pmatrix}1 & \kappa & -1 & 2\\ 2 & -1 & \kappa & 5\\ 1 & \lambda & -6 & 1\end{pmatrix}$$

Άσκηση 8. *Να βρεθεί η βαθμίδα του πίνακα* $(a, b \in \mathbb{R})$ *:*

$$\begin{pmatrix}a & b & b & a\\ b & a & -a & -b\\ a+b & a+b & 2a & -2a\\ -2a & 2a & a+b & a+b\end{pmatrix}$$

Άσκηση 9. *Να βρεθούν οι τιμές του* $\lambda \in \mathbb{R}$ *για τις οποίες το σύστημα:*

$$\begin{cases}(1+\lambda)x+y+z=1\\ x+(1+\lambda)y+z=\lambda\\ x+y+(1+\lambda)z=\lambda^2\end{cases}$$

(1) *έχει λύση.*
(2) *δεν έχει λύση.*

Άσκηση 10. *Να λυθεί το σύστημα* $(\lambda \in \mathbb{R})$*:*

$$\begin{cases}x+\lambda y+2w=0\\ -x+2y+\lambda w=0\\ \lambda x-3y+(\lambda+1)w=\lambda\end{cases}$$

Άσκηση 11. *Να βρεθούν οι τιμές του* $\lambda \in \mathbb{R}$*, για τις οποίες το σύστημα*

$$\begin{cases}\lambda x+y+z+w=1\\ x+\lambda y+z+w=\lambda\\ x+y+\lambda z+w=\lambda^2\\ x+y+z+\lambda w=\lambda^3\end{cases}$$

δεν έχει λύση.

Άσκηση 12. *Να λυθεί το σύστημα* $(\lambda \in \mathbb{R})$*:*

$$\begin{cases}(\lambda+3)x+y+2z=\lambda\\ \lambda x+(\lambda-1)y+z=2\lambda\\ 3(\lambda+1)x+\lambda y+(\lambda+3)z=3\end{cases}$$

Άσκηση 13. *Έστω το σύστημα* (Σ)*:*

$$\begin{cases}x+y+\alpha z=1\\ x+\alpha y+z=4\\ \alpha x+y+z=\beta\end{cases}$$

(1) *Να βρεθούν οι τιμές των* α, β *έτσι ώστε το* (Σ) *να έχει:*
  (α΄) *μοναδική λύση,*

(β΄) *περισσότερες από μια λύσεις,*

(γ΄) *καμμία λύση.*

(2) *Να βρεθεί για ποιες τιμές του* α*, ο χώρος λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος του* (Σ) *έχει διάσταση* 2*.*

Άσκηση 14. *Για ποιες τιμές των* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$*, το ακόλουθο σύστημα είναι συμβιβαστό;*

$$\begin{cases} x + y + 2z = \alpha \\ 3x + 4y + 7z = \beta \\ x + 2y + 3z = \gamma \end{cases}$$

Άσκηση 15. *Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος :*

$$\begin{cases} 4x_1 + 12x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

Άσκηση 16. *Για τις διάφορες τιμές του* $\lambda \in \mathbb{R}$*, να λυθεί το σύστημα:*

$$\begin{cases} (\lambda + 1)x + y + z = \lambda^2 + 3\lambda \\ x + (\lambda + 1)y + z = \lambda^3 + 3\lambda^2 \\ x + y + (\lambda + 1)z = \lambda^4 + 3\lambda^3 \end{cases}$$

Άσκηση 17. *Για τις διάφορες τιμές του* $\lambda \in \mathbb{R}$*, να λυθεί το σύστημα:*

$$\begin{cases} \lambda x + y + z + w = 1 \\ x + \lambda y + z + w = 1 \\ x + y + \lambda z + w = 1 \\ x + y + z + \lambda w = 1 \end{cases}$$

Άσκηση 18. *Για τις διάφορες τιμές του* $\lambda \in \mathbb{R}$*, να λυθεί το σύστημα:*

$$\begin{cases} 2x - y + 3z + 4w = 5 \\ 4x - 2y + 5z + 6w = 7 \\ 6x - 3y + 7z + 8w = 9 \\ \lambda x - 4y + 9z + 10w = 11 \end{cases}$$

Άσκηση 19. *Για τις διάφορες τιμές του* $\lambda \in \mathbb{R}$*, να λυθεί το σύστημα:*

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}$$

Άσκηση 20. *Για τις διάφορες τιμές του* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$*, να λυθεί το σύστημα:*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$