ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ **Β′** (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ **2**

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:
http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI/LAI2019/LAI2019.html

Παρασκευή 1 Νοεμβρίου 2019

Άσκηση 1. *Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$, όπου $n \geq 2$.*

Χρησιμοποιώντας ότι η ορίζουσα του A μπορεί να υπολογιστεί ως το ανάπτυγμα της κατά τα στοιχεία τυχούσας στήλης ή γραμμής και ότι η ορίζουσα του πίνακα δεν αλλάζει αν σε μια γραμμή ή στήλη προσθέσουμε πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής ή στήλης αντίστοιχα, να δειχθούν τα ακόλουθα:

(1) *Αν ο πίνακας A έχει δύο διαδοχικές στήλες ίσες ή δύο γραμμές ίσες, τότε $|A| = 0$.*

(2) *Αν στον πίνακα A εναλλάξουμε αμοιβαία δύο διαδοχικές στήλες ή γραμμές, τότε η ορίζουσα του πίνακα A αλλάζει πρόσημο. Δηλαδή, αν $1 \leq k \leq n-1$,τότε:*

$$A \xmapsto{\Sigma_k \leftrightarrow \Sigma_{k+1}} A' \quad \Longrightarrow \quad |A'| = -|A|$$

(3) *Αν ο πίνακας A έχει δύο στήλες ίσες ή δύο γραμμές ίσες, τότε $|A| = 0$.*

Λύση. Εργαζόμαστε με στήλες (η διαδικασία για γραμμές είναι ανάλογη).

Χάριν ευκολίας, θα θεωρούμε τον πίνακα A ως το σύνολο των n το πλήθος στηλών του και θα γράφουμε:

$$A = \Big(\Sigma_1 \cdots \Sigma_i \cdots \Sigma_j \cdots \Sigma_n\Big), \quad \text{όπου} \quad \Sigma_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \;\; 1 \leq j \leq n$$

(1) Υποθέτουμε ότι οι διαδοχικές στήλες Σ_k και Σ_{k+1} είναι ίσες: $\Sigma_k = \Sigma_{k+1}$. Θα δείξουμε με επαγωγή στο n ότι: $|A| = 0$.

- Αν $n = 2$, τότε $\Sigma_1 = \Sigma_2$ και ο πίνακας A θα είναι της μορφής $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{12} & a_{12} \end{pmatrix}$. Προφανώς τότε θα έχουμε $|A| = a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12} = 0$.

- Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι κάθε $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας, όπου $n \geq 3$, με δύο διαδοχικές στήλες ίσες, έχει ορίζουσα ίση με μηδέν.

- Έστω τώρα ο $n \times n$ πίνακας A με $\Sigma_k = \Sigma_{k+1} = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$. Τότε θα έχουμε:

$$|A| = \Big|\Sigma_1 \cdots \Sigma_k \; \Sigma_k \cdots \Sigma_n\Big| \; \xlongequal[\text{της } k\text{-γραμμής}]{\text{Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}} \; a_{k1}A_{k\,1} + a_{k2}A_{k\,2} + \cdots + a_{kn}A_{k\,n}$$

Επειδή οι ελάσσονες ορίζουσες $\Delta_{k1}, \Delta_{k2}, \cdots, \Delta_{k\,k-1}, \Delta_{k\,k+2}, \cdots \Delta_{k\,n}$ είναι ορίζουσες $(n-1) \times (n-1)$ πινάκων με δύο στήλες ίσες, την k-στήλη και την $(k+1)$-στήλη, από την επαγωγική υπόθεση προκύπτει ότι $\Delta_{k1} = \Delta_{k2} = \cdots = \Delta_{k\,k-1} = \Delta_{k\,k+2} = \cdots = \Delta_{k\,n} = 0$. Επομένως $A_{k1} = A_{k2} = \cdots = A_{k\,k-1} = A_{k\,k+2} = \cdots = A_{k\,n} = 0$. Τότε η ορίζουσα του πίνακα A θα είναι:

$$|A| = a_{k\,k}A_{k\,k} + a_{k\,k+1}A_{k\,k+1} = a_{k\,k}A_{k\,k} + a_{k\,k}A_{k\,k+1} = a_{kk}\big(A_{k\,k} + A_{k\,k+1}\big)$$

Επειδή οι πίνακες οι οποίοι προκύπτουν μετά τη διαγραφή της k-στήλης και της k-γραμμής, και τη διαγραφή της $(k+1)$-στήλης και της k-γραμμής, είναι ίσοι, έπεται ότι $\Delta_{k\,k} = \Delta_{k\,k+1}$. Τότε θα έχουμε:

$$|A| = a_{kk}\big(A_{k\,k} + A_{k\,k+1}\big)a_{kk}\big((-1)^{k+k}\Delta_{k\,k} + (-1)^{k+k+1}\Delta_{k\,k+1} =$$

$$= a_{kk}\big((-1)^{k+k}\Delta_{k\,k} + (-1)^{k+k+1}\Delta_{k\,k}\big) = a_{k\,k}\Delta_{k\,k}\big((-1)^{k+k} + (-1)^{k+k+1}\big) = 0$$

Επομένως δείξαμε, για τον $n \times n$ πίνακα A με δύο διαδοχικές στήλες ίσες, ότι ισχύει $|A| = 0$. Άρα, σύμφωνα με την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής, κάθε τετραγωνικός πίνακας με δύο διαδοχικές στήλες ίσες έχει ορίζουσα ίση με μηδέν.

(2) Υποθέτουμε ότι

$$A = \big(\Sigma_1 \cdots \Sigma_k\ \Sigma_{k+1} \cdots \Sigma_n\big) \xmapsto{\Sigma_k \leftrightarrow \Sigma_{k+1}} A' = \big(\Sigma_1 \cdots \Sigma_{k+1}\ \Sigma_k \cdots \Sigma_n\big)$$

Τότε, χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες οριζουσών και το μέρος (1), θα έχουμε:

$$|A'| = \Big|\Sigma_1 \cdots \Sigma_{k+1}\ \Sigma_k \cdots \Sigma_n\Big| \xlongequal{\Sigma_k \to \Sigma_k + \Sigma_{k+1}} \Big|\Sigma_1 \cdots \Sigma_{k+1} + \Sigma_k\ \Sigma_k \cdots \Sigma_n\Big| \xlongequal{\Sigma_{k+1} \to \Sigma_{k+1} - \Sigma_k}$$

$$\Big|\Sigma_1 \cdots \Sigma_{k+1} + \Sigma_k\ \Sigma_k - \Sigma_{k+1} - \Sigma_k \cdots \Sigma_n\Big| = \Big|\Sigma_1 \cdots \Sigma_{k+1} + \Sigma_k\ \ -\Sigma_{k+1} \cdots \Sigma_n\Big| =$$

$$= \Big|\Sigma_1 \cdots \Sigma_{k+1}\ \ -\Sigma_{k+1} \cdots \Sigma_n\Big| + \Big|\Sigma_1 \cdots \Sigma_k\ \ -\Sigma_{k+1} \cdots \Sigma_n\Big| =$$

$$= -\Big|\Sigma_1 \cdots \Sigma_{k+1}\ \Sigma_{k+1} \cdots \Sigma_n\Big| - \Big|\Sigma_1 \cdots \Sigma_k\ \Sigma_{k+1} \cdots \Sigma_n\Big| = 0 - |A| = -|A|$$

Επομένως: $|A'| = -|A|$.

(3) Υποθέτουμε ότι $1 \leq i < j \leq n$ και έστω ότι $\Sigma_i = \Sigma_j$. Τότε με διαδοχικές αμοιβαίες εναλλαγές δύο διαδοχικών στηλών μπορούμε να μετατρέψουμε τον πίνακα A σε έναν πίνακα B στον οποίο οι δύο ίσες στήλες Σ_i και Σ_j είναι διαδοχικές. Τότε όμως από το μέρος (1) προκύπτει ότι $|B| = 0$. Επειδή ο πίνακας B έχει προκύψει από τον A με διαδοχικές αμοιβαίες εναλλαγές στηλών του, έπεται ότι $0 = |B| = (-1)^k|A|$, όπου k είναι το πλήθος των αμοιβαίων αναλλαγών στηλών του A. Τότε όμως $|A| = 0$. Άρα κάθε πίνακας με δύο στήλες ίσες έχει ορίζουσα ίση με μηδέν. ■

Άσκηση 2. *Έστω* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *ένας* 2×2 *πίνακας με στοιχεία από το σώμα* $\mathbb{K}$. *Να δειχθεί ότι:*

$$|A| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{είτε υπάρχει } \lambda \in \mathbb{K}: \ a = \lambda c \text{ και } b = \lambda d \quad \text{είτε υπάρχει } \mu \in \mathbb{K}: \ c = \mu a \text{ και } d = \mu b$$

Με άλλα λόγια, η ορίζουσα ενός 2×2 *πίνακα είναι ίση με μηδέν αν και μόνον αν μία από τις δύο γραμμές είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο της άλλης*[1].

Λύση. (1) "$\Longleftarrow$" Αν $a = \lambda c$ και $b = \lambda d$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{K}$, τότε $|A| = \begin{vmatrix} \lambda c & \lambda d \\ c & d \end{vmatrix} = \lambda cd - \lambda cd = 0$.

Παρόμοια αν $c = \mu a$ και $d = \mu b$ για κάποιο $\mu \in \mathbb{K}$, τότε: $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ \mu a & \mu b \end{vmatrix} = \mu ab - \mu ab = 0$.

(2) "$\Longrightarrow$" Έστω ότι $|A| = 0$ και επομένως $ad = bc$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α΄) Υποθέτουμε ότι $d \neq 0$.

(i) Αν $c \neq 0$, τότε ορίζονται τα κλάσματα $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} := \lambda \in \mathbb{K}$ και τότε προφανώς θα έχουμε $a = \lambda c$ και $b = \lambda d$.

[1] Το συμπέρασμα της Άσκησης εξακολουθεί να ισχύει αν αντικαταστήσουμε τις γραμμές με τις στήλες, δηλαδή: η ορίζουσα ενός 2×2 πίνακα είναι ίση με μηδέν αν και μόνον αν μία από τις δύο στήλες του είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο της άλλης.

(ii) Αν $c = 0$, τότε $ad = 0$ και επειδή $d \neq 0$, θα έχουμε $a = 0$. Επειδή $d \neq 0$, ορίζεται το κλάσμα $\frac{b}{d} := \lambda \in \mathbb{K}$ και τότε θα έχουμε $b = \lambda d$ και $a = 0 = \lambda \cdot 0 = \lambda c$.

Άρα αν $d \neq 0$, υπάρχει πάντα $\lambda \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $a = \lambda c$ και $b = \lambda d$.

(β΄) Υποθέτουμε ότι $d = 0$.

(i) Αν $b \neq 0$, τότε επειδή $0 = ad = bc$, θα έχουμε $c = 0$. Θέτοντας $\mu = 0$, θα έχουμε: $\mu \cdot a = 0 = c$ και $\mu \cdot b = 0 = d$.

(ii) Αν $b = 0$, τότε διακρίνουμε περιπτώσεις:

(Α΄) Αν $c = 0$, τότε θέτοντας $\mu = 0$, θα έχουμε $\mu a = 0 = c$ και $\mu b = 0 = d$.

(Β΄) Αν $c \neq 0$, τότε εξετάζουμε το στοιχείο a. Αν $a = 0$, τότε θέτοντας $\mu = 0$, θα έχουμε: $\mu \cdot a = 0 = c$ και $\mu \cdot b = 0 = d$. Αν $a \neq 0$, τότε ορίζεται το κλάσμα $\frac{c}{a} := \mu$ και τότε: $\mu \cdot a = c$ και $\mu \cdot b = 0 = d$.

Άρα αν $d = 0$, υπάρχει πάντα $\mu \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $\mu a = c$ και $\mu b = d$. ■

Άσκηση 3. *Χωρίς να υπολογιστεί, να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα:*

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$$

Λύση. Θεωρούμε τον ανάστροφο πίνακα ${}^tA$ του A και υπολογίζουμε τον πίνακα $A \cdot {}^tA$:

$$A \cdot {}^tA = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας ότι $|{}^tA| = |A|$, θα έχουμε:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^4 = |A \cdot {}^tA| = |A| \cdot |{}^tA| = |A| \cdot |A| = |A|^2 \quad \Longrightarrow \quad |A| = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$ ■

Άσκηση 4. *Να υπολογίσετε την ορίζουσα του ακόλουθου πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Λύση. Θα έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & 12 & -16 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{της πρώτης γραμμής}]{\text{Ανάπτυξη κατά τα στοιχεία}} \begin{vmatrix} -5 & 12 & -16 \\ -2 & 5 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 2\Gamma_3} \begin{vmatrix} -5 & 12 & -16 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{της δεύτερης γραμμής}]{\text{Ανάπτυξη κατά τα στοιχεία}} (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -5 & -16 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -15 + 16 = 1$$

■

Άσκηση 5. *Να υπολογίσετε την ορίζουσα του ακόλουθου πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Λύση. Αναπτύσσοντας κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής θα έχουμε:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+6} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+6} \cdot (-1)^{1+5} \cdot 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+6} \cdot (-1)^{1+5} \cdot 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+6} \cdot (-1)^{1+5} \cdot 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot 4 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+6} \cdot (-1)^{1+5} \cdot 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot 4 \cdot (-1) \cdot 5 \cdot 6 = -6!$$

■

Άσκηση 6. *Χωρίς να υπολογιστούν οι ορίζουσες, να δειχθεί ότι*

$$\begin{vmatrix} 1 & 11 & 111 \\ 2 & 22 & 222 \\ 3 & 33 & 333 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -11 & 111 \\ -2 & 22 & -222 \\ 3 & -33 & 333 \end{vmatrix}$$

Λύση. Θα έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1 & -11 & 111 \\ -2 & 22 & -222 \\ 3 & -33 & 333 \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_2 \to -\Gamma_2} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -11 & 111 \\ 2 & -22 & 222 \\ 3 & -33 & 333 \end{vmatrix} \xlongequal{\Sigma_2 \to -\Sigma_2} (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 11 & 111 \\ 2 & 22 & 222 \\ 3 & 33 & 333 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 111 \\ 2 & 22 & 222 \\ 3 & 33 & 333 \end{vmatrix}$$

■

Άσκηση 7. *Να υπολογιστεί η ορίζουσα*

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1+b & 1+c \\ 1+2a & 1+2b & 1+2c \\ 1+3a & 1+3b & 1+3c \end{vmatrix}$$

Λύση. Θα έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1+b & 1+c \\ 1+2a & 1+2b & 1+2c \\ 1+3a & 1+3b & 1+3c \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{vmatrix} 1+a & 1+b & 1+c \\ 1+2a & 1+2b & 1+2c \\ a & b & c \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{vmatrix} 1+a & 1+b & 1+c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

διότι ο τελευταίος πίνακας έχει δύο γραμμές ίσες. ■

Άσκηση 8. *Να υπολογίσετε την ορίζουσα* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

Λύση. Έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_2 \to \Gamma_2+\Gamma_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha+\beta+\gamma & \beta+\gamma+\alpha & \gamma+\alpha+\beta \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha+\beta+\gamma) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma) \cdot 0 = 0$$

όπου η προτελευταία ισότητα προέκυψε διότι ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{pmatrix}$ έχει δύο γραμμές ίσες. ∎

Άσκηση 9. *Αν α, β και γ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε να δείξετε ότι*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) \qquad (\textit{ορίζουσα } \textsc{Vandermonde} \textit{ τρίτης τάξης})$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} \xlongequal{\Sigma_1 \to \Sigma_1-\Sigma_2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha-\beta & \beta & \gamma \\ \alpha^2-\beta^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\alpha-\beta)\cdot 0 & 1 & 1 \\ (\alpha-\beta)\cdot 1 & \beta & \gamma \\ (\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta) & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha-\beta) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \beta & \gamma \\ \alpha+\beta & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} \xlongequal{\Sigma_2 \to \Sigma_2-\Sigma_3} (\alpha-\beta) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \beta-\gamma & \gamma \\ \alpha+\beta & \beta^2-\gamma^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha-\beta) \cdot \begin{vmatrix} 0 & (\beta-\gamma)\cdot 0 & 1 \\ 1 & (\beta-\gamma)\cdot 1 & \gamma \\ \alpha+\beta & (\beta-\gamma)\cdot(\beta+\gamma) & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)\cdot(\beta-\gamma) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \gamma \\ \alpha+\beta & \beta+\gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} =$$

$$\xlongequal[\text{της πρώτης γραμμής}]{\text{Ανάπτυξη κατά τα στοιχεία}} (\alpha-\beta)\cdot(\beta-\gamma) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha+\beta & \beta+\gamma \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)\cdot(\beta-\gamma)\cdot(\beta+\gamma-\alpha-\beta) =$$

$$= (\alpha-\beta)\cdot(\beta-\gamma)\cdot(\gamma-\alpha)$$ ∎

Άσκηση 10. *Να υπολογίσετε την ορίζουσα* $\begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & 1+\alpha_1\beta_2 & 1+\alpha_1\beta_3 \\ 1+\alpha_2\beta_1 & 1+\alpha_2\beta_2 & 1+\alpha_2\beta_3 \\ 1+\alpha_3\beta_1 & 1+\alpha_3\beta_2 & 1+\alpha_3\beta_3 \end{vmatrix}$.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & 1+\alpha_1\beta_2 & 1+\alpha_1\beta_3 \\ 1+\alpha_2\beta_1 & 1+\alpha_2\beta_2 & 1+\alpha_2\beta_3 \\ 1+\alpha_3\beta_1 & 1+\alpha_3\beta_2 & 1+\alpha_3\beta_3 \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_2 \to \Gamma_2-\Gamma_1} \begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & 1+\alpha_1\beta_2 & 1+\alpha_1\beta_3 \\ (\alpha_2-\alpha_1)\beta_1 & (\alpha_2-\alpha_1)\beta_2 & (\alpha_2-\alpha_1)\beta_3 \\ (\alpha_3-\alpha_1)\beta_1 & (\alpha_3-\alpha_1)\beta_2 & (\alpha_3-\alpha_1)\beta_3 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1) \begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & 1+\alpha_1\beta_2 & 1+\alpha_1\beta_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι η ορίζουσα ενός πίνακα με δύο ίσες γραμμές είναι ίση με μηδέν. ∎

Άσκηση 11. *Να υπολογίσετε την ορίζουσα* $\Delta = \begin{vmatrix} \sin^2(x) & 1 & \cos^2(x) \\ \sin^2(y) & 1 & \cos^2(y) \\ \sin^2(z) & 1 & \cos^2(z) \end{vmatrix}$

Λύση. Έχουμε:

$$\begin{vmatrix} \sin^2(x) & 1 & \cos^2(x) \\ \sin^2(y) & 1 & \cos^2(y) \\ \sin^2(z) & 1 & \cos^2(z) \end{vmatrix} \xlongequal{\Sigma_1 \to \Sigma_1 + \Sigma_3} \begin{vmatrix} \sin^2(x)+\cos^2(x) & 1 & \cos^2(x) \\ \sin^2(y)+\cos^2(y) & 1 & \cos^2(y) \\ \sin^2(z)+\cos^2(z) & 1 & \cos^2(z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cos^2(x) \\ 1 & 1 & \cos^2(y) \\ 1 & 1 & \cos^2(z) \end{vmatrix} = 0$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι η ορίζουσα ενός πίνακα με δύο ίσες στήλες είναι ίση με μηδέν. ■

Άσκηση 12. *Αν* $\lambda \in \mathbb{R}$, *να υπολογισθεί η ορίζουσα* $|A|$ *του* 4×4 *πίνακα πραγματικών αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-\lambda^2 \end{vmatrix} \xlongequal[\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_3]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda^2 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{της τέταρτης γραμμής}]{\text{ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}}$$

$$= (4-\lambda^2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{της δεύτερης γραμμής}]{\text{ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}} (4-\lambda^2)(1-\lambda^2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3(1-\lambda^2)(4-\lambda^2)$$

■

Άσκηση 13. *Θεωρούμε έναν πίνακα* $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{K})$ *ο οποίος ικανοποιεί την σχέση:*

$$A^2 + 2 \cdot A = O$$

Να δείξετε ότι ο πίνακας $A + I_3$ *είναι αντιστρέψιμος, να βρείτε τον* $(A+I_3)^{-1}$, *και να υπολογίσετε την ορίζουσα* $|A|$ *του* A.

Λύση. Στην ισότητα 3×3 πινάκων $A^2 + 2 \cdot A = \mathbb{O}$ προσθέτουμε και στα δύο μέλη τον μοναδιαίο 3×3 πίνακα I_3 και θα έχουμε:

$$A^2 + 2 \cdot A = O \implies A^2 + 2 \cdot A + I_3 = O + I_3 = I_3 \implies (A+I_3) \cdot (A+I_3) = I_3$$

Επομένως $(A+I_3) \cdot (A+I_3) = I_3 = (A+I_3) \cdot (A+I_3)$ και άρα ο πίνακας $A + I_3$ είναι αντιστρέψιμος και

$$(A+I_3)^{-1} = A + I_3$$

Από τη σχέση $A^2 + 2 \cdot A = O$ έπεται ότι

$$A \cdot (A+2I_3) = O \implies |A \cdot (A+2I_3)| = |O| \implies |A| \cdot |A+2I_3| = 0 \implies |A| = 0 \;\text{ ή }\; |A+2I_3| = 0$$

Αν $|A| \neq 0$, τότε γνωρίζουμε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και επομένως υπάρχει ο αντίστροφός του A^{-1}. Πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά τη σχέση $A^2 + 2A = O$ με τον πίνακα A^{-1} θα έχουμε:

$$A^{-1} \cdot (A^2 + 2A) = A^{-1} \cdot O \implies A^{-1} \cdot A \cdot (A+2I_3) = O \implies I_3 \cdot (A+2I_3) = O \implies A + 2I_3 = O$$
$$\implies A = -2I_3$$

Θεωρώντας ορίζουσες και στα δύο μέλη θα έχουμε:

$$|A| = |-2I_3| = (-2)^3 |I_3| = -8$$

Συνοψίζοντας δείξαμε ότι:

$$|A| = \begin{cases} 0, & \text{αν ο πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος} \\ -8, & \text{αν ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος} \end{cases}$$

■

Άσκηση 14. *Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$.*

(1) *Αν ο n είναι περιττός και $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι δεν υπάρχουν πίνακες $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ έτσι ώστε: $A^2 + I_n = O$.*
(2) *Αν ο n είναι περιττός και $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, να δειχθεί ότι υπάρχουν πίνακες $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ έτσι ώστε: $A^2 + I_n = O$.*
(3) *Αν ο n είναι άρτιος και $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι υπάρχουν πίνακες $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ έτσι ώστε: $A^2 + I_n = O$.*

Λύση. (1) Έστω ότι ο n είναι περιττός και υπάρχει πίνακας $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ έτσι ώστε $A^2 + I_n = O$. Τότε $A^2 = -I_n$ και επομένως χρησιμοποιώντας ότι ο n είναι περιττός, θα έχουμε:

$$|A^2| = |-I_n| \implies |A|^2 = (-1)^n |I_n| \implies |A|^2 = (-1)^n \implies |A|^2 = -1$$

Επειδή $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$, θα έχουμε $|A| \in \mathbb{R}$ και επομένως η παραπάνω σχέση είναι αδύνατη. Άρα δεν υπάρχει πίνακας $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ έτσι ώστε $A^2 + I_n = O$.

(2) Θεωρούμε τον διαγώνιο 3×3 πίνακα μιγαδικών αριθμών

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Τότε

$$A^2 = \begin{pmatrix} i^2 & 0 & 0 \\ 0 & i^2 & 0 \\ 0 & 0 & i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3 \implies A^2 + I_2 = O$$

(3) Θεωρούμε τον διαγώνιο 2×2 πίνακα πραγματικών αριθμών

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Τότε

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2 \implies A^2 + I_2 = O$$

■

Άσκηση 15. *Θεωρούμε 2×2 πίνακες A και B με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$ και υποθέτουμε ότι:*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} y & x-1 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$$

όπου $x, y \in \mathbb{K}$. Να βρεθούν οι αριθμοί x, y. Αν ο πίνακας A είναι γνωστός, μπορεί να προσδιοριστεί ο πίνακας B;

Λύση. Γνωρίζουμε ότι, για τυχόντες $n \times n$ πίνακες A και B, ισχύει ότι:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = |B| \cdot |A| = |B \cdot A|$$

και

$$\mathsf{Tr}(AB) = \mathsf{Tr}(BA)$$

Επομένως θα έχουμε:

$$4 = |A \cdot B| = |B \cdot A| = y + x(x-1) \quad \text{και} \quad 5 = \mathsf{Tr}(AB) = \mathsf{Tr}(BA) = y + 1$$

Επομένως

$$y = 4 \quad \text{και} \quad x(x-1) = 0 \implies y = 4 \quad \text{και} \quad x = \begin{cases} 0 \\ \text{ή} \\ 1 \end{cases}$$

Έτσι θα έχουμε

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ή} \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Αν ο πίνακας A είναι γνωστός: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, τότε έστω $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. Επομένως θα έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}$$

δηλαδή

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} ax+bz = 1 \\ ay+bw = 0 \\ cx+dz = 2 \\ cy+dw = 4 \end{cases}$$

Το (Σ) είναι ένα γραμμικό σύστημα με αγνώστους x, y, z, w και ο πίνακας των συντελεστών του (Σ) είναι ο

$$C = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

Έτσι το σύστημα (Σ) γράφεται

$$(\Sigma) \quad C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του πίνακα C κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης, εύκολα βλέπουμε ότι:

$$|C| = (ad-bc)^2 = |A|^2$$

Επειδή $4 = |AB| = |A| \cdot |B|$, προκύπτει ότι $|A| \neq 0$ και επομένως $|C| \neq 0$. Τότε ο πίνακας C είναι αντιστρέψιμος και άρα το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Επομένως ο πίνακας B προσδιορίζεται μοναδικά αν γνωρίζουμε τον πίνακα A. ■

Άσκηση 16. *Έστω A ένας αντισυμμετρικός $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ή $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Αν ο n είναι περιττός, να δειχθεί ότι $|A| = 0$. Ακολούθως να δοθούν παραδείγματα αντισυμμετρικών 2×2 και 4×4 πινάκων με μη μηδενική ορίζουσα.*

Λύση. Από τον ορισμό αντισυμμετρικού πίνακα, έχουμε ${}^tA = -A$. Επομένως, επειδή οι πίνακες ${}^tA$ και A έχουν τιν ίδια ορίζουσα, θα έχουμε:

$$|A| = |{}^tA| = |-A| = (-1)^n |A|$$

Αν ο n είναι περιττός, τότε $|A| = -|A|$ απ' όπου $2|A| = 0$, δηλαδή $|A| = 0$.

Οι ακόλουθοι πίνακες είναι αντισυμμετρικοί με μη-μηδενική ορίζουσα:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■

Άσκηση 17. *Να λυθεί η εξίσωση* $\begin{vmatrix} 2-x & 1 & i \\ 1 & 2-x & i \\ -i & -i & 2-x \end{vmatrix} = 0,$ *όπου* $i^2 = -1$.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{vmatrix} 2-x & 1 & i \\ 1 & 2-x & i \\ -i & -i & 2-x \end{vmatrix} \overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1-x & -1+x & 0 \\ 1 & 2-x & i \\ -i & -i & 2-x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2-x & i \\ -i & -i & 2-x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\Sigma_2 \to \Sigma_2 + \Sigma_1}{=\!=\!=\!=} (1-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3-x & i \\ -i & -2i & 2-x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 3-x & i \\ -2i & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)(x^2 - 5x + 4)$$

’ρα, έπεται ότι

$$(1-x)(x^2 - 5x + 4) = 0 \implies (1-x)(x-1)(x-4) = 0 \implies \begin{cases} x = 1, & \text{πολλαπλότητας 2.} \\ x = 4, & \text{απλή.} \end{cases}$$

■

Άσκηση 18. *Να υπολογισθεί η* $n \times n$ *ορίζουσα* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

Λύση. Αφαιρώντας διαδοχικά την πρώτη γραμμή από τις υπόλοιπες γραμμές, έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \underset{\cdots,\, \Gamma_n \to \Gamma_n - \Gamma_1}{\overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1,\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}{=\!=\!=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι η ορίζουσα ενός άνω τριγωνικού πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του. ■

Άσκηση 19. *Να υπολογισθεί η* $n \times n$ *ορίζουσα* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

Λύση. Προσθέτοντας την πρώτη γραμμής σε όλες τις υπόλοιπες θα έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \underset{\cdots,\, \Gamma_n \to \Gamma_n + \Gamma_1}{\overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_1,\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_1}{=\!=\!=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 2 & 2 \cdot 3 & \cdots & 2 \cdot n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2 \cdot n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n = n!$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι η ορίζουσα ενός άνω τριγωνικού πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του. ■

Άσκηση 20. *Να υπολογιστεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

Λύση. Θα έχουμε:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{vmatrix} \underset{2 \leq k \leq n}{\overset{\Sigma_k \to \Sigma_k - k\Sigma_{k-1}}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & \cdots & -(n-2) & -(n-1) \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & -(n-3) & -(n-2) \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -(n-4) & -(n-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{της τελευταίας γραμμής}}{\overset{\text{Ανάπτυγμα κατα τα στοιχεία}}{=\!=\!=\!=}} (-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & \cdots & -(n-1) \\ 0 & -1 & \cdots & -(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^{2n} = 1$$

■

Άσκηση 21. *Να υπολογισθεί η $n \times n$ ορίζουσα* $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$.

Λύση. Θέτουμε

$$A_n = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{pmatrix}$$

Αν $n = 1$, τότε $|A_1| = 3 = 2^{1+1} - 1$.

Αν $n = 2$, τότε $|A_2| = 9 - 2 = 7 = 2^{2+1} - 1$.

Αν $n = 3$, τότε με τον κανόνα του Sarrus, υπολογίζουμε εύκολα ότι $|A_3| = 15 = 2^{3+1} - 1$.

Με χρήση της Αρχής Μαθηματικής Επαγωγής, θα δείξουμε ότι:

$$|A_n| = 2^{n+1} - 1 \tag{1}$$

Από την παραπάνω ανάλυση, έπεται ότι η σχέση (1) ισχύει οταν $n = 1, 2, 3$.

Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι:

$$|A_k| = 2^{k+1} - 1, \quad \text{για κάθε} \quad 1 \leq k \leq n$$

Έστω $n \geq 3$. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του πίνακα A_n κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής, θα έχουμε:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix} = 3|A_{n-1}| - 2|A_{n-2}|$$

Να σημειώσουμε ότι οι ορίζουσες μετά την δεύτερη ισότητα είναι $(n-1) \times (n-1)$, και η ορίζουσα $|A_{n-2}|$ προέκυψε αναπτύσσοντας την ορίζουσα πριν την τελευταία ισότητα κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης. Επομένως, χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, θα έχουμε:

$$|A_{n+1}| = 3|A_n| - 2|A_{n-1}| = 3 \cdot (2^{n+1} - 1) - 2 \cdot (2^n - 1) = 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 2^n - 3 + 2 = 3 \cdot 2^{n+1} - 2^{n+1} - 1 = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 =$$

$$= 2^{n+2} - 1 = 2^{(n+1)+1} - 1$$

Επομένως η σχέση (1) είναι αληθής και για $k = n+1$. Τότε από την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, έπεται ότι η σχέση (1) είναι αληθής για κάθε $n \geq 1$. ■

Άσκηση 22. *Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Λύση. • Αν $n = 1$, τότε

$$|A_1| = 9 = 25 - 16 = 5^{1+1} - 4^{1+1}$$

- Αν $n = 2$, τότε

$$|A_2| = 61 = 125 - 64 = 5^{2+1} - 4^{2+1}$$

- Αν $n = 3$, τότε με τον κανόνα του Sarrus, υπολογίζουμε εύκολα ότι

$$|A_3| = 369 = 549 - 180\frac{609}{3} = 5^{3+1} - 4^{3+1}$$

Με χρήση της Αρχής Μαθηματικής Επαγωγής, θα δείξουμε ότι:

$$|A_n| = 5^{n+1} - 4^{n+1} \tag{2}$$

<u>Επαγωγική Υπόθεση</u>: Υποθέτουμε ότι:

$$|A_k| = 5^{k+1} - 4^{k+1} \quad \text{για κάθε} \quad 1 \leq k < n$$

Θα προσδιορίσουμε στη συνέχεια έναν αναδρομικό τύπο ο οποίος συνδέει την ορίζουσα του πίνακα A_n με τις ορίζουσες των πινάκων A_{n-1} και A_{n-2}.

Θα έχουμε:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{της πρώτης στήλης}]{\text{Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}}$$

$$= 9 \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{πρώτης γραμμής της δεύτερης ορίζουσας}]{\text{Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}}$$

$$= 9|A_{n-1}| - 4 \cdot 5 \begin{vmatrix} 9 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 9|A_{n-1}| - 20|A_{n-2}|$$

Άρα, $\forall n \geq 1$:

$$|A_n| = 9|A_{n-1}| - 20|A_{n-2}| \tag{3}$$

Τότε χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, θα έχουμε:

$$|A_n| = 9|A_{n-1}| - 20|A_{n-2}| = 9\big(5^{n-1+1} - 4^{n-1+1}\big) - 20\big(5^{n-2+1} - 4^{n-2+1}\big) = 9\big(5^n - 4^n\big) - 20\big(5^{n-1} - 4^{n-1}\big) =$$

$$= 9 \cdot 5^n - 9 \cdot 4^n - 4 \cdot 5^n + 5 \cdot 4^n = 5 \cdot 5^n - 4 \cdot 4^n = 5^{n+1} - 4^{n+1}$$

Άρα με χρήση της Αρχής Μαθηματικης Επαγωγής έπεται ότι, $\forall n \geq 1$:

$$|A_n| = 5^{n+1} - 4^{n+1}$$

■

Άσκηση 23. *Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Λύση. • Αν $n = 1$, τότε

$$|A_1| = 7 = \frac{21}{3} = \frac{5^{1+1} - 2^{1+1}}{5 - 2}$$

• Αν $n = 2$, τότε

$$|A_2| = 39 = \frac{117}{3} = \frac{5^{2+1} - 2^{2+1}}{5 - 2}$$

- Αν $n=3$, τότε με τον κανόνα του Sarrus, υπολογίζουμε εύκολα ότι

$$|A_3| = 203 = \frac{609}{3} = \frac{5^{3+1}-2^{3+1}}{5-2}$$

Με χρήση της Αρχής Μαθηματικής Επαγωγής, θα δείξουμε ότι:

$$|A_n| = \frac{5^{n+1}-2^{n+1}}{5-2} = \frac{5^{n+1}-2^{n+1}}{3} \tag{4}$$

Από την παραπάνω ανάλυση, έπεται ότι η σχέση (4) ισχύει οταν $n=1,2,3$.

Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι:

$$|A_k| = \frac{5^{k+1}-2^{k+1}}{3} \qquad \text{για κάθε} \quad 1 \leq k < n$$

Θα προσδιορίσουμε στη συνέχεια έναν αναδρομικό τύπο ο οποίος συνδέει την ορίζουσα του πίνακα A_n με τις ορίζουσες των πινάκων A_{n-1} και A_{n-2}.

Θα έχουμε:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{πρώτης στήλης}]{\text{Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}}$$

$$= 7\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{πρώτης γραμμής της δεύτερης ορίζουσας}]{\text{Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}}$$

$$= 7|A_{n-1}| - 2\cdot 5\begin{vmatrix} 7 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 7|A_{n-1}| - 10|A_{n-2}|$$

Άρα, $\forall n \geq 1$:

$$|A_n| = 7|A_{n-1}| - 10|A_{n-2}| \tag{5}$$

Τότε χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, θα έχουμε:

$$|A_n| = 7|A_{n-1}| - 10|A_{n-2}| = 7\frac{5^{n-1+1}-2^{n-1+1}}{3} - 10\frac{5^{n-2+1}-2^{n-2+1}}{3} = 7\frac{5^n-2^n}{3} - 10\frac{5^{n-1}-2^{n-1}}{3} =$$

$$= \frac{7\cdot 5^n - 7\cdot 2^n - 2\cdot 5\cdot 5^{n-1} + 5\cdot 2\cdot 2^{n-1}}{3} = \frac{7\cdot 5^n - 7\cdot 2^n - 2\cdot 5^n + 5\cdot 2^n}{3} = \frac{5\cdot 5^n - 2\cdot 2^n}{3} = \frac{5^{n+1}-2^{n+1}}{3}$$

Άρα με χρήση της Αρχής Μαθηματικης Επαγωγής έπεται ότι, $\forall n \geq 1$:

$$|A_n| = \frac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{3} \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 24. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{pmatrix}$$

Λύση. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα $|A_n|$ κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής, έχουμε:

$$|A_n| = (\alpha+\beta) \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} - \alpha\beta \begin{vmatrix} 1 & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

Να σημειώσουμε ότι οι παραπάνω ορίζουσες είναι $(n-1) \times (n-1)$. Παρατηρούμε ότι η πρώτη ορίζουσα είναι η αρχική που ξεκινήσαμε αλλά μεγέθους $(n-1) \times (n-1)$ και αν αναπτύξουμε την δεύτερη ορίζουσα ως προς την πρώτη στήλη, τότε καταλήγουμε στην αναδρομική σχέση:

$$|A_n| = (\alpha+\beta)|A_{n-1}| - \alpha\beta|A_{n-2}| \tag{6}$$

Για να καταλάβουμε ποια είναι η τιμή της ορίζουσας $|A_n|$, ξεκινάμε πρώτα υπολογίζοντας τις παρακάτω ορίζουσες:

$$|A_1| = \alpha + \beta$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3$$

Με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς θα δείξουμε με Μαθηματική Επαγωγή ότι:

$$|A_k| = \alpha^k + \alpha^{k-1}\beta + \alpha^{k-2}\beta^2 + \cdots + \alpha^2\beta^{k-2} + \alpha\beta^{k-1} + \beta^k\ , \ k \geq 1. \tag{$*$}$$

1. Για $k = 1$, η ζητούμενη σχέση $(*)$ ισχύει αφού $|A_1| = \alpha + \beta$.
2. Υπόθεση Επαγωγής: Έστω ότι η ζητούμενη σχέση $(*)$ ισχύει για $k \leq n$, δηλαδή δεχόμαστε ότι:

$$|A_k| = \alpha^k + \alpha^{k-1}\beta + \alpha^{k-2}\beta^2 + \cdots + \alpha^2\beta^{k-2} + \alpha\beta^{k-1} + \beta^k$$

3. Θα δείξουμε ότι η ζητούμενη σχέση $(*)$ ισχύει για $k = n + 1$. Έχουμε

$$\begin{aligned} |A_{n+1}| &\overset{(6)}{=} (\alpha+\beta)|A_n| - \alpha\beta|A_{n-1}| = (\alpha+\beta)(\alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n) \\ &\qquad -\alpha\beta(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}) \\ &= \alpha^{n+1} + \alpha^n\beta + \cdots + \alpha\beta^n + \beta^{n+1} \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε, $\forall n \geq 1$:

$$|A_n| = \alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \alpha^{n-2}\beta^2 + \cdots + \alpha^2\beta^{n-2} + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n$$ ■

Άσκηση 25. *Να υπολογισθεί η* $2n \times 2n$ *ορίζουσα* $\begin{vmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \cdots & \beta & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \beta & \cdots & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{vmatrix}$.

Λύση. Αν αναπτύξουμε την ορίζουσα $|A_{2n}|$ ως προς την πρώτη στήλη, τότε έχουμε:

$$|A_{2n}| = \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 0 & \cdots & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta & 0 & \cdots & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta \\ \alpha & 0 & \cdots & \beta & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & 0 & \cdots & \alpha & 0 \end{vmatrix}$$

Να σημειώσουμε ότι οι παραπάνω ορίζουσες είναι $(2n-1)\times(2n-1)$. Αν αναπτύξουμε την πρώτη ορίζουσα ως προς τη τελευταία γραμμή και τη δεύτερη ορίζουσα ως προς τη πρώτη γραμμή, τότε καταλήγουμε

$$|A_{2n}| = \alpha^2|A_{2n-2}| - \beta^2|A_{2n-2}| = (\alpha^2-\beta^2)|A_{2n-2}| \tag{7}$$

Για να καταλάβουμε ποια είναι η τιμή της ορίζουσας $|A_{2n}|$, ξεκινάμε πρώτα υπολογίζοντας τις παρακάτω ορίζουσες:

$$|A_2| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - \beta^2$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha^2-\beta^2)^2$$

$$|A_6| = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha^2-\beta^2)^3$$

Με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς θα δείξουμε με Μαθηματική Επαγωγή ότι:

$$|A_{2k}| = (\alpha^2-\beta^2)^k\ ,\ k \geq 1. \tag{$*$}$$

1. Για $k=1$, η ζητούμενη σχέση $(*)$ ισχύει αφού $|A_2| = \alpha^2-\beta^2$.
2. Υπόθεση Επαγωγής: Έστω ότι ισχύει για $k<n$, δηλαδή δεχόμαστε ότι:

$$|A_{2k}| = (\alpha^2-\beta^2)^k$$

3. Θα δείξουμε ότι η ζητούμενη σχέση $(*)$ ισχύει για $k=n$. Έχουμε

$$|A_{2n}| \overset{(7)}{=} (\alpha^2-\beta^2)|A_{2n-2}| = (\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)^{n-1} = (\alpha^2-\beta^2)^n$$

'ρα, έχουμε $|A_{2n}| = (\alpha^2-\beta^2)^n\ ,\ \forall n \geq 1.$ ■

Άσκηση 26. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα του ακόλουθου $n \times n$ πίνακα A, όπου $x \in \mathbb{R}$:*

$$A = \begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix}.$$

Λύση. Αν αναπτύξουμε την ορίζουσα $|A_n|$ ως προς την πρώτη γραμμή, τότε έχουμε:

$$|A_n| = (1+x^2)\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} x & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1+x^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Να σημειώσουμε ότι οι παραπάνω ορίζουσες είναι $(n-1)\times(n-1)$. Παρατηρούμε ότι η πρώτη ορίζουσα είναι η αρχική που ξεκινήσαμε αλλά διάστασης $(n-1)\times(n-1)$ και αν αναπτύξουμε την δεύτερη ορίζουσα ως προς την πρώτη στήλη, τότε έχουμε

$$|A_n| = (1+x^2)|A_{n-1}| - x^2|A_{n-2}| \tag{8}$$

Για να καταλάβουμε ποια είναι η τιμή της ορίζουσας $|A_n|$, ξεκινάμε πρώτα υπολογίζοντας τις παρακάτω ορίζουσες:

$$|A_1| = 1+x^2$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1+x^2+x^4$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 \\ x & 1+x^2 & x \\ 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1+x^2+x^4+x^6$$

Με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς θα δείξουμε με Μαθηματική Επαγωγή ότι:

$$|A_k| = 1+x^2+x^4\cdots+x^{2k}\ ,\ k\geq 1. \tag{$*$}$$

1. Για $k=1$, η ζητούμενη σχέση $(*)$ ισχύει αφού $|A_1| = 1+x^2$.
2. Υπόθεση Επαγωγής: Έστω ότι ισχύει για $k \leq n$, δηλαδή δεχόμαστε ότι:

$$|A_k| = 1+x^2+\cdots+x^{2k}$$

3. Θα δείξουμε ότι η ζητούμενη σχέση $(*)$ ισχύει για $k=n+1$. Έχουμε

$$|A_{n+1}| \overset{(8)}{=} (1+x^2)|A_n| - x^2|A_{n-1}| = (1+x^2)(1+x^2+\cdots+x^{2n}) - x^2(1+x^2+\cdots+x^{2(n-1)})$$
$$= 1+x^2+\cdots+x^{2n+2}$$

Επομένως, έχουμε $|A_n| = 1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}\ ,\ \forall n\geq 1.$ ■

Άσκηση 27. *Να υπολογιστεί η ορίζουσα του $n\times n$ πίνακα:*

$$A_n=\begin{pmatrix} 1-n & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n & 1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1-n \end{pmatrix}.$$

Λύση. Θα έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n & 1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1-n \end{vmatrix} \overset{\Gamma_n\to\Gamma_n+\Gamma_1+\Gamma_2+\cdots+\Gamma_{n-1}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}$$

$$\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n & 1\\ n-n & n-n & n-n & \cdots & n-n & n-n & n-n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

■

Άσκηση 28. *Να λυθεί η εξίσωση ως προς x: $|A|=0$, όπου A είναι ο ακόλουθος $n\times n$ πίνακας:*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2-x & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-2-x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n-1-x & 1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & n-x \end{pmatrix}.$$

Λύση. Αφαιρώντας την πρώτη γραμμή από όλες τις υπόλοιπες, θα έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2-x & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-2-x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n-1-x & 1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & n-x \end{vmatrix} \underset{\cdots,\,\Gamma_n\to\Gamma_n-\Gamma_1}{\overset{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1,\ \Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_1}{=\!=\!=\!=\!=\!=}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2-x & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & n-1-x \end{vmatrix} = (-x)(1-x)(2-x)\cdots(n-1-x)$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι η ορίζουσα ενός άνω τριγωνικού πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του. Επομένως

$$|A| = 0 \implies (-x)(1-x)(2-x)\cdots(n-1-x) = 0 \implies x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } \cdots \text{ ή } x = n-1$$

Δηλαδή οι ρίζες της εξίσωσης $|A| = 0$ είναι οι αριθμοί: 0, 1, 2, $\cdots$, $n-1$. ■

Άσκηση 29. *Πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να έχει η ορίζουσα ενός 5×5 πίνακα τής μορφής*

$$A = \begin{pmatrix} \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star \end{pmatrix};$$

(Με «$\star$» συμβολίζουμε αυθαίρετες τιμές στοιχείων του $\mathbb{K}$).

Λύση. Θεωρουμε το πέμπτο στοιχείο τής τέταρτης γραμμής του πίνακα A.

(1) Πρώτη Περίπτωση Αν το πέμπτο στοιχείο τής τέταρτης γραμμής είναι μηδέν, τότε ο πίνακας A έχει την μορφή

$$A = \begin{pmatrix} \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα κατά τα στοιχεία τής πρώτης γραμμής βλέπουμε ότι οφείλουμε να υπολογίσουμε δύο ορίζουσες 4×4 πινάκων που και οι δυό τους έχουν τη μορφή

$$A = \begin{pmatrix} \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & 0 \\ \star & \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

Οι τελευταίοι 4×4 πίνακες είναι κάτω τριγωνικοί με μηδενικό στοιχείο στην κύρια διαγώνιό τους και συνεπώς η ορίζουσά τους ισούται με μηδέν. Ώστε, σε αυτή την περίπτωση έχουμε:

$$|A| = 0$$

(2) Δεύτερη Περίπτωση Αν το πέμπτο στοιχείο τής τέταρτης γραμμής δεν είναι μηδέν, τότε αφαιρώντας ένα κατάλληλο πολλαπλάσιο τής τέταρτης γραμμής από την πέμπτη, μπορούμε να μηδενίσουμε το πέμπτο στοιχείο τής πέμπτης γραμμής. Έτσι προκύπτει ο πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & 0 \end{pmatrix}$$

και εκ' κατασκευής έχουμε $|A| = |B|$.

Στον πίνακα B εναλλάσσουμε την πέμπτη με την τέταρτη γραμμή. Έτσι προκύπτει ένας πίνακας τής μορφής

$$C = \begin{pmatrix} \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

και εκ' κατασκευής έχουμε $|C| = -|B|$.

Όμως ο πίνακας C είναι της μορφής που μελετήσαμε στην πρώτη περίπτωση, και επομένως έχουμε $|C| = 0$. Συμπεραίνουμε ότι καιμστην δεύτερη περίπτωση έχουμε:

$$|A| = |B| = -|C| = 0$$

Άρα σε κάθε περίπτωση, έχουμε: $|A| = 0$. ■

Η **ακολουθία Fibonacci** F_n, $n \geq 0$, είναι η ακολουθία φυσικών αριθμών η οποία ορίζεται ως εξής:

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 2, \quad F_3 = 3, \quad F_4 = 5, \quad F_5 = 8, \quad F_6 = 13, \quad F_7 = 21, \quad F_8 = 34, \quad F_9 = 55$$

και κάθε όρος της, εκτός του μηδενικού, είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενων, δηλαδή, $\forall n \geq 1$:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Άσκηση 30. *Να δειχθεί ότι για κάθε $n \geq 1$, η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

συμπίπτει με τον n-οστό όρο της ακολουθίας Fibonacci, δηλαδή: $|A_n| = F_n$, $\forall n \geq 1$.

Λύση. Για $n = 1$, έχουμε $|A_1| = 1 = F_1$.

Για $n = 2$, έχουμε $|A_2| = 1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 = F_2$.

Για κάθε $n \geq 3$, θα έχουμε:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{της πρώτης στήλης}]{\text{Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Στο παραπάνω άθροισμα οριζουσών, οι ορίζουσες είναι μεγέθους $(n-1)\times(n-1)$, και η πρώτη είναι προφανώς η ορίζουσα του πίνακα A_{n-1}. Αναπτύσσοντας την δεύτερη ορίζουσα κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής, η ορίζουσα η οποία θα προκύψει είναι μεγέθους $(n-2)\times(n-2)$ και προφανώς συμπίπτει με την ορίζουσα του πίνακα A_{n-2}. Επομένως, από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$$|A_n| = |A_{n-1}| + |A_{n-2}|$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, έχουμε $|A_3| = |A_2| + |A_1| = 2 + 1 = 3 = F_3$. Έτσι, οι τρεις πρώτες ορίζουσες, συμπίπτουν με τους τρεις πρώτους όρους της ακολουθίας Fibonacci, και κάθε μια από τις υπόλοιπες ορίζουσες προκύπτει ως το άθροισμα των δύο προηγούμενων. Αυτό σημαίνει ότι $|A_n| = F_n$. ■

Άσκηση 31. *Έστω ότι x, y είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{pmatrix}$$

Λύση. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του A_n κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης, έχουμε:

$$|A|_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = x \underbrace{\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}}_{\text{ορίζουσα τάξης } n-1} + (-1)^{1+n} y \underbrace{\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}}_{\text{ορίζουσα τάξης } n-1} =$$

$$= x \cdot x^{n-1} + (-1)^{n+1} y \cdot y^{n-1} = x^n + (-1)^{n+1} y^n$$

Επομένως:

$$|A_n| = x^n + (-1)^{n+1} y^n$$

■

Άσκηση 32. *Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{pmatrix}$$

Λύση. Θα έχουμε:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix} \overset{\Gamma_i \to \Gamma_i - \Gamma_n}{\underset{1 \le i \le n-1}{=\!=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1-n & 0 \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Ορίζουσα } (n-1)\times(n-1)}{\underset{\text{κάτω τριγωνικού πίνακα}}{=\!=\!=\!=\!=}} \quad n(-1)(-2)\cdots(3-n)(2-n)(1-n) =$$

$$= (-1)^{n-1} 1 \cdot 2 \cdots (n-3)\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n = (-1)^{n-1} n!$$

Επομένως

$$|A| = (-1)^{n-1} n!$$

■

Άσκηση 33. *Έστω ότι x είναι ένας πραγματικός αριθμός. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} a & x & x & \cdots & x & x \\ x & a & x & \cdots & x & x \\ x & x & a & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a & x \\ x & x & x & \cdots & x & a \end{pmatrix}$$

Λύση. Θα έχουμε:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} a & x & x & \cdots & x & x \\ x & a & x & \cdots & x & x \\ x & x & a & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a & x \\ x & x & x & \cdots & x & a \end{vmatrix} \overset{\Sigma_1 \to \Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots + \Sigma_n}{=\!=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} a+(n-1)x & x & x & \cdots & x & x \\ a+(n-1)x & a & x & \cdots & x & x \\ a+(n-1)x & x & a & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a+(n-1)x & x & x & \cdots & a & x \\ a+(n-1)x & x & x & \cdots & x & a \end{vmatrix} =$$

$$= \big(a+(n-1)x\big) \begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x & x \\ 1 & a & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & a & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & a & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & a \end{vmatrix} \overset{\Gamma_{i+1} \to \Gamma_{i+1} - \Gamma_i}{\underset{1 \le i \le n-1}{=\!=\!=\!=\!=}}$$

$$\big(a+(n-1)x\big) \begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x & x \\ 0 & a-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x-a & a-x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a & a-x \end{vmatrix} \overset{\text{Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}}{\underset{\text{της πρώτης στήλης}}{=\!=\!=\!=\!=}}$$

$$\big(a+(n-1)x\big)\begin{vmatrix} a-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x-a & a-x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-x & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x-a & a-x \end{vmatrix} \overset{\text{Ορίζουσα } (n-1)\times(n-1)}{\underset{\text{κάτω τριγωνικοί πίνακα}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}}$$

$$= \big(a+(n-1)x\big)(a-x)^{n-1}$$

Επομένως

$$|A_n| = \big(a+(n-1)x\big)(a-x)^{n-1} \qquad \blacksquare$$

Η επόμενη Άσκηση αποτελεί γενίκευση της Άσκησης 33.

Άσκηση 34. *Έστω ότι $x, a_1, a_2, \cdots, a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_{n-1} & x \\ x & x & x & \cdots & x & a_n \end{pmatrix}$$

Λύση. Η τελευταία στήλη του πίνακα A μπορεί να γραφεί

$$\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ \vdots \\ x \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ \vdots \\ x \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_n - x \end{pmatrix}$$

Γνωρίζουμε ότι αν μια στήλη Σ_j ενός πίνακα A είναι ίση με το άθροισμα $\Sigma_j' + \Sigma_j''$ δύο στηλών Σ_j' και Σ_j'', τότε η ορίζουσα του πίνακα A είναι ίση με το άθροισμα των οριζουσών $|A'| + |A''|$ δύο πινάκων A' και A'', οι οποίοι προκύπτουν από τον A αντικαθιστώντας την j-στήλη του A με τις στήλες Σ_j' και Σ_j'' αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω ιδιότητα στην τελευταία στήλη του πίνακα A έχουμε:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_{n-1} & x \\ x & x & x & \cdots & x & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_{n-1} & x \\ x & x & x & \cdots & x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & 0 \\ x & a_2 & x & \cdots & x & 0 \\ x & x & a_3 & \cdots & x & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ x & x & x & \cdots & x & a_n - x \end{vmatrix}$$

- Αναπτύσσοντας την δεύτερη ορίζουσα κατά τα στοιχεία της τελευταίας στήλης, έχουμε:

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & 0 \\ x & a_2 & x & \cdots & x & 0 \\ x & x & a_3 & \cdots & x & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ x & x & x & \cdots & x & a_n - x \end{vmatrix} = (a_n - x)\cdot \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_{n-1} & x \\ x & x & x & \cdots & x & a_n \end{vmatrix} = (a_n - x)|A_{n-1}|$$

όπου η τελευταία ισότητα προέκυψε διότι η τελευταία ορίζουσα είναι μεγέθους $(n-1)\times(n-1)$ και άρα ταυτίζεται με την ορίζουσα του πίνακα A_{n-1}.

- Για την πρώτη ορίζουσα εργαζόμαστε ως εξής: αφαιρούμε την τελευταία στήλη από όλες τις υπόλοιπες και έχουμε:

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_{n-1} & x \\ x & x & x & \cdots & x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1-x & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 0 & a_2-x & 0 & \cdots & 0 & x \\ 0 & 0 & a_3-x & \cdots & 0 & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}-x & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x)$$

όπου η τελευταία ισότητα προέκυψε διότι ο πίνακας πριν την ισότητα είναι άνω τριγωνικός.

Συνοψίζοντας δείξαμε ότι:

$$|A_n| = (a_n - x)|A_{n-1}| + x(a_1 - x)(a_2 - x)\cdots(a_{n-1} - x) \tag{9}$$

<u>Ισχυρισμός</u>: Η ορίζουσα του πίνακα A_n είναι ίση με:

$$\begin{aligned} |A_n| &= x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-2}-x)(a_{n-1}-x) \\ &+ x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-2}-x)(a_n-x) \\ &\vdots \\ &+ x(a_2-x)(a_3-x)\cdots(a_{n-1}-x)(a_n-x) \\ &+ (a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x)(a_n-x) \end{aligned} \tag{$*$}$$

- Αν $n = 1$, τότε προφανώς $|A_1| = a_1 = x + (a_1 - x)$, και επομένως ο παραπάνω τύπος (*) ισχύει.

- Αν $n = 2$, τότε προφανώς

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_1 & x \\ x & a_2 \end{vmatrix} a_1a_2 - x^2 = x(a_1 - x) + x(a_2 - x) + (a_1 - x)(a_2 - x)$$

και επομένως ο παραπάνω τύπος $(*)$ ισχύει.

- <u>Επαγωγική Υπόθεση</u> Υποθέτουμε ότι ο παραπάνω τύπος (*) ισχύει για $k = n$.

Θα δείξουμε ότι ο παραπάνω τύπος ισχύει για $k = n + 1$. Πράγματι θα έχουμε:

$$|A_{n+1}| \overset{(9)}{=} (a_{n+1} - x)|A_n| + x(a_1 - x)(a_2 - x)\cdots(a_{n-1} - x)(a_n - x)$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση την ορίζουσα $|A_n|$ από τη σχέση (*), εύκολα βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} |A_{n+1}| &= x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-2}-x)(a_{n-1}-x)(a_{n+1}-x) \\ &+ x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-2}-x)(a_n-x)(a_{n+1}-x) \\ &\vdots \\ &+ x(a_2-x)(a_3-x)\cdots(a_{n-1}-x)(a_n-x)(a_{n+1}-x) \\ &+ x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x)(a_n-x) \\ &+ (a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x)(a_n-x)(a_{n+1}-x) \end{aligned}$$

δηλαδή ο παραπάνω τύπος (*) ισχύει και για $k = n + 1$.

Σύμφωνα με την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, ο τύπος (*) ισχύει για κάθε $n \geq 1$. ■

Σχόλιο 1. *Αν στην παραπάνω Άσκηση 34, έχουμε $x \neq a_i$, $1 \leq i \leq n$, τότε η ορίζουσα του πίνακα A_n μπορεί να γραφεί ως εξής:*

$$|A_n| = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\left(1+\frac{x}{x-a_1}+\frac{x}{x-a_2}+\cdots+\frac{x}{x-a_n}\right)$$

Άσκηση 35. *Έστω $r_1, r_2, \cdots, r_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1+r_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+r_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+r_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+r_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+r_n \end{pmatrix}$$

Λύση. Θέτουμε στην Άσκηση 34: $x = 1$, και $a_i = 1 + r_i$, $1 \leq i \leq n$, και τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} |A_n| &= x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-2}-x)(a_{n-1}-x) \\ &+ x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-2}-x)(a_n-x) \\ &\vdots \qquad\qquad (*) \\ &+ x(a_2-x)(a_3-x)\cdots(a_{n-1}-x)(a_n-x) \\ &+ (a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x)(a_n-x) \\ &= (1+r_1-1)(1+r_2-1)\cdots(1+r_{n-2}-1)(1+r_{n-1}-1) \\ &+ (1+r_1-1)(1+r_2-1)\cdots(1+r_{n-2}-1)(1+r_n-1) \\ &\vdots \qquad\qquad (*) \\ &+ (1+r_2-1)(1+r_3-1)\cdots(1+r_{n-1}-1)(1+r_n-1) \\ &+ (1+r_1-1)(1+r_2-1)\cdots(1+r_{n-1}-1)(1+r_n-1) \\ &= r_1r_2\cdots r_{n-2}r_{n-1} \\ &+ r_1r_2\cdots r_{n-2}r_n \\ &\vdots \qquad\qquad (*) \\ &+ r_2r_3\cdots r_{n-1}r_n \\ &+ r_1r_2\cdots r_{n-1}r_n \end{aligned}$$

Επειδή $r_i > 0$, $1 \leq i \leq n$, η παραπάνω σχεση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$|A_n| = (r_1+r_2+\cdots+r_n)\left(1+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots+\frac{1}{r_n}\right)$$

■

Άσκηση 36. *Έστω ότι $x, a_1, a_2, \cdots, a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x+a_n \end{pmatrix}$$

Λύση. Για καλύτερη εποπτεία, συμβολίζουμε τον δοθέντα πίνακα με $A_n(x; a_1, \cdots, a_n)$.

- Αν $n = 1$, τότε ο δοθείς πίνακας είναι ο 1×1 πίνακας $A_1(x; a_1) = (x+a_1)$ και άρα $|A_1(x; a_1)| = x+a_1$.

- Αν $n = 2$, τότε ο δοθείς πίνακας είναι ο 2×2 πίνακας $A_2(x; a_1, a_2) = \begin{pmatrix} x+a_1 & a_2 \\ a_2 & x+a_2 \end{pmatrix}$ και άρα

$$|A_2(x; a_1, a_2)| = (x + a_1)(x + a_2) - a_1a_2 = x^2 + xa_1 + xa_2 = x(x + a_1 + a_2)$$

Ισχυρισμός: Η ορίζουσα του πίνακα A_n είναι ίση με:

$$|A_n(x; a_1, \cdots, a_n)| = x^{n-1}(x + a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \tag{10}$$

Οι παραπάνω υπολογισμοί δείχνουν ότι ο ισχυρισμός (10) είναι αληθής, όταν $n = 1$ ή $n = 2$.

- Επαγωγική Υπόθεση Υποθέτουμε ότι ο παραπάνω τύπος (10) ισχύει για $k = n - 1$, δηλαδή υποθέτουμε ότι:

$$|A_{n-1}(x; a_2, \cdots, a_n)| = x^{n-2}(x + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) \tag{$*$}$$

Θα δείξουμε ότι ο παραπάνω τύπος ισχύει για $k = n$.

Παρατηρούμε ότι η πρώτη στήλη του πίνακα $A_n(x; a_1, \cdots a_n)|$ μπορεί να γραφεί

$$\begin{pmatrix} x+a_1 \\ a_1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_1 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Γνωρίζουμε ότι αν μια στήλη Σ_j ενός πίνακα A είναι ίση με το άθροισμα $\Sigma_j' + \Sigma_j''$ δύο στηλών Σ_j' και Σ_j'', τότε η ορίζουσα του πίνακα A είναι ίση με το άθροισμα των οριζουσών $|A'| + |A''|$ δύο πινάκων A' και A'', οι οποίοι προκύπτουν από τον A αντικαθιστώντας την j-στήλη του A με τις στήλες Σ_j' και Σ_j'' αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω ιδιότητα στην τελευταία στήλη του πίνακα A έχουμε:

$$|A_n(x; a_1, \cdots a_n)| = \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x+a_n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x+a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x+a_n \end{vmatrix}$$

Αναπτύσσοντας την πρώτη ορίζουσα στο παραπάνω άθροισμα κατά τα στοιχεία της πρώτηξξ στήλης, θα έχουμε:

$$\begin{vmatrix} x & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x+a_n \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x+a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & x+a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & x+a_4 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & x+a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-1} & x+a_n \end{vmatrix}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\begin{vmatrix} x & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x+a_n \end{vmatrix} = x|A_{n-1}(x; a_2, \cdots, a_n)| \tag{$\dagger$}$$

Για την δεύτερη ορίζουσα στο πατραπάνω άθροισμα, αφαιρούμε την πρώτη γραμμή από όλες τις υπόλοιπες και έχουμε:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[\cdots, \Gamma_n \to \Gamma_n - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1,\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 x^{n-1} \tag{$\dagger\dagger$}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις ($\dagger$) και ($\dagger\dagger$) έπεται ότι

$$|A_n(x; a_1, \cdots, a_n)| = x|A_{n-1}(x; a_2, \cdots, a_n)| + a_1 x^{n-1}$$

Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση ($*$): $|A_{n-1}(x; a_2, \cdots, a_n)| = x^{n-2}(x + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$, θα έχουμε:

$$|A_n(x; a_1, \cdots, a_n)| = x|A_{n-1}(x; a_2, \cdots, a_n)| + a_1 x^{n-1} = x\big(x^{n-2}(x + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)\big) + a_1 x^{n-1} =$$

$$x^{n-1}(x + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + a_1 x^{n-1} = x^{n-1}(x + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$$

Δηλαδή ο παραπάνω τύπος (10) ισχύει και για $k = n$. Επομένως, σύμφωνα με την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής, θα έχουμε, $\forall n \geq 1$:

$$|A_n(x; a_1, \cdots, a_n)| = x^{n-1}(x + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 37. *Έστω ότι x, y είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & x & x & \cdots & x & x \\ y & 0 & x & \cdots & x & x \\ y & y & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & 0 & x \\ y & y & y & \cdots & y & 0 \end{pmatrix}$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι η τελευταία στήλη του πίνακα A_n μπορεί να γραφεί

$$\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ \vdots \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ \vdots \\ x \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}$$

Γνωρίζουμε ότι αν μια στήλη Σ_j ενός πίνακα A είναι ίση με το άθροισμα $\Sigma_j' + \Sigma_j''$ δύο στηλών Σ_j' και Σ_j'', τότε η ορίζουσα του πίνακα A είναι ίση με το άθροισμα των οριζουσών $|A'| + |A''|$ δύο πινάκων A' και A'', οι οποίοι προκύπτουν από τον A αντικαθιστώντας την j-στήλη του A με τις στήλες Σ_j' και Σ_j'' αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω ιδιότητα στην τελευταία στήλη του πίνακα A_n έχουμε:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 0 & x & x & \cdots & x & x \\ y & 0 & x & \cdots & x & x \\ y & y & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & 0 & x \\ y & y & y & \cdots & y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & x & \cdots & x & x \\ y & 0 & x & \cdots & x & x \\ y & y & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & 0 & x \\ y & y & y & \cdots & y & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & x & x & \cdots & x & 0 \\ y & 0 & x & \cdots & x & 0 \\ y & y & 0 & \cdots & x & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & 0 & 0 \\ y & y & y & \cdots & y & -x \end{vmatrix}$$

Θέτουμε

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & x & x & \cdots & x & x \\ y & 0 & x & \cdots & x & x \\ y & y & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & 0 & x \\ y & y & y & \cdots & y & x \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad C_n = \begin{pmatrix} 0 & x & x & \cdots & x & 0 \\ y & 0 & x & \cdots & x & 0 \\ y & y & 0 & \cdots & x & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & 0 & 0 \\ y & y & y & \cdots & y & -x \end{pmatrix}$$

και τότε:

$$|A_n| = |B_n| + |C_n|$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του πίνακα C_n κατά τα στοιχεία της τελευταίας στήλης, έχουμε:

$$|C_n| = (-x) \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & x & x & \cdots & x & 0 \\ y & 0 & x & \cdots & x & 0 \\ y & y & 0 & \cdots & x & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & 0 & 0 \\ y & y & y & \cdots & y & -x \end{vmatrix}}_{\text{ορίζουσα τάξης } n-1} = (-x)|A_{n-1}|$$

Για την ορίζουσα του πίνακα B_n, έχουμε:

$$|B_n| = \begin{vmatrix} 0 & x & x & \cdots & x & x \\ y & 0 & x & \cdots & x & x \\ y & y & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & 0 & x \\ y & y & y & \cdots & y & x \end{vmatrix} \overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2, \cdots,}{\underset{\Gamma_{n-1} \to \Gamma_{n-1} - \Gamma_n}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} -y & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -y & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -y & 0 \\ y & y & y & \cdots & y & x \end{vmatrix} \overset{\text{ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία της}}{\underset{\text{τελευταίας στήλης}}{=\!=\!=\!=}}$$

$$= (-1)^{n+n} x (-y)^{n-1} = x(-y)^{n-1}$$

διότι ο πίνακας ο οποίος θα προκύψει είναι άνω τριγωνικός. Επομένως, $\forall n \geq 2$:

$$|A_n| = |B_n| + |C_n| = x(-y)^{n-1} + (-x)|A_{n-1}| \tag{$*$}$$

Για να υπολογίζουμε την ορίζουσα $|A_n|$, υπολογίζουμε την $|A_n|$ για μικρές τιμές του n ($n = 1, 2, 3, 4$) για να μαντέψουμε την τιμή της $|A_n|$, και ακολούθως με τη βοήθεια του αναδρομικού τύπου επαληθεύουμε την τιμής που έχουμε μαντέψει.

- Προφανώς $A_0 = (0)$ και επομένως $|A_0| = 0$.
- Προφανώς $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$ και επομένως[2] $|A_2| = -xy$.
- Με τη βοήθεια του αναδρομικού τύπου $(*)$, έχουμε:

$$|A_3| = x(-y)^{3-1} + (-x)|A_{3-1}| = x(-y)^2 + (-x)(-xy) = xy^2 + x^2y = xy(x+y)$$

- Με τη βοήθεια του αναδρομικού τύπου $(*)$, έχουμε:

$$|A_4| = x(-y)^{4-1} + (-x)|A_{4-1}| = x(-y)^3 + (-x)(xy(x+y)) = -xy^3 + (-x)(x^2y + xy^2) = -xy^3 - x^3y - x^2y^2 =$$

$$= -(xy)(x^2y + xy + xy^2)$$

Ισχυρισμός: Η ορίζουσα του πίνακα A_n είναι ίση με:

$$|A_n| = (-1)^{n-1}xy\big(x^{n-2} + x^{n-3}y + \cdots + xy^{n-3} + y^{n-2}\big) \tag{$\dagger$}$$

Οι παραπάνω υπολογισμοί δείχνουν ότι ο ισχυρισμός (†) είναι αληθής, όταν $1 \leq n \leq 4$.

- Επαγωγική Υπόθεση Υποθέτουμε ότι $n \geq 3$, και ότι ο παραπάνω τύπος (†) ισχύει για $k = n-1$, δηλαδή υποθέτουμε ότι:

$$|A_{n-1}| = (-1)^{n-2}xy\big(x^{n-3} + x^{n-4}y + \cdots + xy^{n-4} + y^{n-3}\big) \tag{$\dagger\dagger$}$$

Θα δείξουμε ότι ο παραπάνω τύπος ισχύει για $k = n$.

Χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό τύπο $(*)$, θα έχουμε:

$$|A_n| = x(-y)^{n-1} + (-x)|A_{n-1}| = x(-y)^{n-1} + (-x)(-1)^{n-2}xy\big(x^{n-3} + x^{n-4}y + \cdots + xy^{n-4} + y^{n-3}\big) =$$

$$= (-1)^{n-1}xy^{n-1} + (-1)^{n-1}x(xy)\big(y^{n-2}\big)\big(x^{n-3} + x^{n-4}y + \cdots + xy^{n-4} + y^{n-3}\big) =$$

$$= (-1)^{n-1}xy\big(y^{n-2} + x^{n-2} + x^{n-3}y + \cdots + xy^{n-3}\big)$$

Επομένως η τύπος $(\dagger)$ ισχύει και για $k = n$. Από την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής, έπεται ότι ο τύπος $(\dagger)$ ισχύει για κάθε $n \geq 1$, και επομένως[3]:

$$|A_n| = (-1)^{n-1}xy\big(x^{n-2} + x^{n-3}y + \cdots + xy^{n-3} + y^{n-2}\big)$$

■

[2]Ο υπολογισμός προκύπτει και από τον αναδρομικό τύπο $(*)$: $|A_2| = x(-y)^{2-1} + (-x)|A_{2-1}| = -xy + (-x)\cdot 0 = -xy$.

[3]Αν $x \neq y$, τότε ο τύπος $(\dagger)$ γράφεται και ως:

$$|A_n| = (-1)^{n-1}xy\frac{x^{n-1} - y^{n-1}}{x - y}$$

Άσκηση 38. *Να υπολογιστεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$*

$$V(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Η ορίζουσα $|V(x_1, x_2, \cdots, x_n)|$ καλείται **ορίζουσα Vandermonde τάξης** *n.*

Λύση. Υπολογίζουμε πρώτα την ορίζουσα Vandermonde για μικρές τιμές του n, ξεκινλωντας από την πρώτη μη-τετριμένη περίπτωση $n = 2$.

- Αν $n = 2$, τότε $V(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ και επομένως:

$$|V(x_1, x_2)| = x_2 - x_1$$

- Αν $n = 3$, τότε $V(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}$ και επομένως:

$$|V(x_1, x_2, x_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} \xlongequal[\Sigma_3 \to \Sigma_3 - \Sigma_1]{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - \Sigma_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_1^2 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 1 \\ x_1^2 & x_2 + x_1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix} =$$

$$\xlongequal[\text{της πρωτης γραμμής}]{\text{ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}} (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 + x_1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 + x_1 - x_2 - x_1) =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

Ισχυρισμός: Για n το πλήθος τυχόντα στοιχεία $y_1, y_2, \cdots, y_n \in \mathbb{K}$, η ορίζουσα του πίνακα $V(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ είναι ίση με:

$$|V(y_1, y_2, \cdots, y_n| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (y_j - y_i) \qquad (\dagger)$$

δηλαδή:

$$\begin{aligned} |V(y_1, y_2, y_3| &= (y_2 - y_1) \\ &\cdot \ (y_3 - y_1) \cdot (y_3 - y_2) \\ &\cdot \ (y_4 - y_1) \cdot (y_4 - y_2)(y_4 - y_3) \\ &\vdots \\ &\cdot \ (y_n - y_1) \cdot (y_n - y_2) \cdots (y_{n-1} - y_{n-1}) \end{aligned}$$

Οι παραπάνω υπολογισμοί δείχνουν ότι ο ισχυρισμός (†) είναι αληθής, όταν $2 \leq n \leq 3$.

• <u>Επαγωγική Υπόθεση</u> Υποθέτουμε ότι $n \geq 3$, και ότι ο παραπάνω τύπος (†) ισχύει για $k = n$. Θα δείξουμε ότι ο παραπάνω τύπος ισχύει για $k = n + 1$. δηλαδή θα δείξουμε ότι, για $n + 1$ το πλήθος τυχόντα στοιχεία $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1} \in \mathbb{K}$:

$$|V(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}| = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i) \tag{††}$$

$$|V(x_1, x_2, \cdots x_{n+1})| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 & x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x_{n+1}^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n & x_{n+1}^n \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_{n+1} \to \Gamma_{n+1} - x_1 \Gamma_n}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 & x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x_{n+1}^{n-1} \\ 0 & x_2^n - x_1 x_2^{n-1} & x_3^n - x_1 x_3^{n-1} & \cdots & x_n^n - x_1 x_n^{n-1} & x_{n+1}^n - x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_n \to \Gamma_n - x_1 \Gamma_{n-1}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 & x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} & x_3^{n-1} - x_1 x_3^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^n - x_1 x_n^{n-2} & x_{n+1}^{n-1} - x_{n+1}^{n-2} \\ 0 & x_2^n - x_1 x_2^{n-1} & x_3^n - x_1 x_3^{n-1} & \cdots & x_n^n - x_1 x_n^{n-1} & x_{n+1}^n - x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία εκτελώντας τις πράξεις $\Gamma_{i+1} - x_1 \Gamma_i$, $1 \leq i \leq n$, προκύπτει ότι θα έχουμε

$$|V(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 & x_{n+1} - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_1 x_2 & x_3^2 - x_1 x_3 & \cdots & x_n^2 - x_1 x_n & x_{n+1}^2 - x_1 x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} & x_3^{n-1} - x_1 x_3^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^n - x_1 x_n^{n-2} & x_{n+1}^{n-1} - x_{n+1}^{n-2} \\ 0 & x_2^n - x_1 x_2^{n-1} & x_3^n - x_1 x_3^{n-1} & \cdots & x_n^n - x_1 x_n^{n-1} & x_{n+1}^n - x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{της πρωτης στήλης}]{\text{ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 & x_{n+1} - x_1 \\ x_2^2 - x_1 x_2 & x_3^2 - x_1 x_3 & \cdots & x_n^2 - x_1 x_n & x_{n+1}^2 - x_1 x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} & x_3^{n-1} - x_1 x_3^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^n - x_1 x_n^{n-2} & x_{n+1}^{n-1} - x_{n+1}^{n-2} \\ x_2^n - x_1 x_2^{n-1} & x_3^n - x_1 x_3^{n-1} & \cdots & x_n^n - x_1 x_n^{n-1} & x_{n+1}^n - x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) \cdot 1 & (x_3 - x_1) \cdot 1 & \cdots & (x_n - x_1) \cdot 1 & (x_{n+1} - x_1) \cdot 1 \\ (x_2 - x_1) \cdot x^2 & (x_3 - x_1) \cdot x_3 & \cdots & (x_n - x_1) \cdot x_n & (x_{n+1} - x_1) \cdot x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (x_2 - x_1) \cdot x_2^{n-2} & (x_3 - x_1) \cdot x_3^{n-2} & \cdots & (x_n - x_1) \cdot x_n^{n-2} & (x_{n+1} - x_1) \cdot x_{n+1}^{n-2} \\ (x_2 - x_1) \cdot x_2^{n-1} & (x_3 - x_1) \cdot x_3^{n-1} & \cdots & (x_n - x_1) \cdot x_n^{n-1} & (x_{n+1} - x_1) \cdot x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)(x_{n+1} - x_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & x_{n+1}^{n-2} \\ x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)(x_{n+1} - x_1) \cdot |V(x_2, x_3, \cdots, x_{n+1})|$$

Επομένως:

$$|V(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})| = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)(x_{n+1} - x_1) \cdot |V(x_2, x_3, \cdots, x_{n+1})|$$

Από την επαγωγική υπόθεση, έχουμε ότι:

$$|V(x_2, x_3, \cdots, x_{n+1})| = \prod_{2 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i)$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, έπετυαι ότι:

$$|V(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})| = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)(x_{n+1} - x_1) \cdot \prod_{2 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i)$$

Δηλαδή δείξαμε ότι

$$|V(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})| = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i)$$

Σύμφωνα με την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής, έπεται ότι, $\forall n \geq 2$:

$$|V(x_1, x_2, \cdots, x_n)| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \qquad \blacksquare$$