

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β'

(Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebra/LAI2019/LAI2019.html>

Παρασκευή 8 Νοεμβρίου 2019

Υπενθυμίζουμε ότι για τις στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών ενός $m \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$, ισχύουν τα εξής:

- (1) Η εκτέλεση της στοιχειώδους πράξης $\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i + \lambda \Gamma_j$, $\lambda \in \mathbb{K}$, στον A ισοδυναμεί με την εκτέλεση του πολλαπλασιασμού $E_{ij}(\lambda) \cdot A$, δηλαδή:

$$A \xrightarrow{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i + \lambda \Gamma_j} E_{ij}(\lambda) \cdot A$$

όπου $E_{ij}(\lambda)$ είναι ο $m \times m$ στοιχειώδης πίνακας

$$E_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος έχει προκύψει από τον μοναδιαίο $m \times m$ πίνακα I_m προσθέτοντας στην i -γραμμή λ φορές την j -γραμμή.

- (2) Η εκτέλεση της στοιχειώδους πράξης $\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$ στον A ισοδυναμεί με την εκτέλεση του πολλαπλασιασμού $E_{ij} \cdot A$, δηλαδή:

$$A \xrightarrow{\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j} E_{ij} \cdot A$$

όπου E_{ij} είναι ο $m \times m$ στοιχειώδης πίνακας

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος έχει προκύψει από τον μοναδιαίο $m \times m$ πίνακα I_m με αμοιβαία εναλλαγή της i -γραμμής με την j -γραμμή.

- (3) Η εκτέλεση της στοιχειώδους πράξης $\Gamma_i \rightarrow \lambda\Gamma_j$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, στον A ισοδυναμεί με την εκτέλεση του πολλαπλασιασμού $E_{ij} \cdot A$, δηλαδή:

$$A \xrightarrow{\Gamma_i \leftrightarrow \lambda\Gamma_j} E_{ij}(\lambda) \cdot A$$

όπου $E_{ij}(\lambda)$ είναι ο $m \times m$ στοιχειώδης πίνακας

$$E_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος έχει προκύψει από τον μοναδιαίο $m \times m$ πίνακα I_m πολλαπλασιάζοντας την i -γραμμή με λ .

Υπενθυμίζουμε ότι ορίζονται και οι στοιχειώδεις πράξεις επί των στηλών ενός $m \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$:

- (1) Αντικατάσταση της i -στήλης Σ_i του πίνακα A με τη στήλη $\Sigma_i + \lambda\Sigma_j$:

$$A \xrightarrow{\Sigma_i \rightarrow \Sigma_i + \lambda\Sigma_j} A'$$

- (2) Αμοιβαία εναλλαγή της i -στήλης Σ_i με την j -στήλη Σ_j :

$$A \xrightarrow{\Sigma_i \leftrightarrow \Sigma_j} A''$$

- (3) Αντικατάσταση της i -στήλης Σ_i του πίνακα A με τη στήλη $\lambda\Sigma_i$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$:

$$A \xrightarrow{\Sigma_i \rightarrow \lambda\Sigma_i} A'''$$

Άσκηση 1. Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Να δειχθούν τα εξής:

- (1)

$$A \xrightarrow{\Sigma_i \rightarrow \Sigma_i + \lambda\Sigma_j} A \cdot {}^t E_{ij}(\lambda)$$

όπου ${}^t E_{ij}(\lambda)$ είναι ο ανάστροφος του στοιχειώδους $n \times n$ πίνακα $E_{ij}(\lambda)$

- (2)

$$A \xrightarrow{\Sigma_i \leftrightarrow \Sigma_j} A \cdot E_{ij}$$

όπου ο στοιχειώδης πίνακας $E_{ij} = {}^t E_{ij}$ είναι μεγέθους $n \times n$.

- (3)

$$A \xrightarrow{\Sigma_i \rightarrow \lambda\Sigma_i} A \cdot E_i(\lambda)$$

όπου ο στοιχειώδης πίνακας $E_i(\lambda) = {}^t E_i(\lambda)$ είναι μεγέθους $n \times n$.

Λύση. (1) Θα έχουμε:

$$A \cdot {}^t E_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} + \lambda a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} + \lambda a_{ij} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} + \lambda a_{jj} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} + \lambda a_{mj} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας προφανώς έχει προκύψει από τον A με εκτέλεση της στοιχειώδους πράξης $\Sigma_i \rightarrow \Sigma_i + \lambda \Sigma_j$ και άρα:

$$A \xrightarrow{\Sigma_i \rightarrow \Sigma_i + \lambda \Sigma_j} A \cdot {}^t E_{ij}(\lambda)$$

(2) Θα έχουμε:

$$A \cdot E_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας προφανώς έχει προκύψει από τον A με εκτέλεση της στοιχειώδους πράξης $\Sigma_i \leftrightarrow \Sigma_j$ και άρα:

$$A \xrightarrow{\Sigma_i \leftrightarrow \Sigma_j} A \cdot E_{ij}$$

(3) Θα έχουμε:

$$A \cdot E_i(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \lambda a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \lambda a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & \lambda a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mi} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας προφανώς έχει προκύψει από τον A με εκτέλεση της στοιχειώδους πράξης $\Sigma_i \leftarrow \lambda \Sigma_i$ και άρα:

$$A \xrightarrow{\Sigma_i \leftarrow \lambda \Sigma_i} A \cdot E_{ij} \quad \blacksquare$$

Άσκηση 2. Έστω A ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας. Να εξεταστεί πως θα μετασχηματισθεί ο πίνακας A^{-1} όταν στις γραμμές του πίνακα A εκτελέσουμε τις ακόλουθες πράξεις, όπου $1 \leq i, j \leq n$, $\lambda \in \mathbb{K}$, και $k \in \mathbb{K}$, $k \neq 0$:

- (1) $\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i + \lambda \Gamma_j$,
- (2) $\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$.
- (3) $\Gamma_i \rightarrow k \Gamma_i$.

Λύση. (1) Εφαρμόζοντας τη στοιχειώδη πράξη $\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i + \lambda \Gamma_j$ στις γραμμές του πίνακα A , πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα A από τα αριστερά με τον στοιχειώδη πίνακα $E_{ij}(\lambda)$, δηλαδή έχουμε:

$$A \xrightarrow{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i + \lambda \Gamma_j} E_{ij}(\lambda)A$$

Επειδή οι πίνακες $E_{ij}(\lambda)$ και A είναι αντιστρέψιμοι και ισχύει ότι $E_{ij}(\lambda)^{-1} = E_{ij}(-\lambda)$, έπεται ότι ο πίνακας $E_{ij}(\lambda)A$ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει ότι

$$(E_{ij}(\lambda)A)^{-1} = A^{-1}E_{ij}(\lambda)^{-1} = A^{-1}E_{ij}(-\lambda)$$

Σύμφωνα με την Άσκηση 1, έχουμε

$$A^{-1} \xrightarrow{\Sigma_j \rightarrow \Sigma_j - \lambda \Sigma_i} A^{-1} E_{ji}(-\lambda) = A^{-1} \cdot E_{ij}(-\lambda)$$

Επομένως, εφαρμόζοντας τη στοιχειώδη πράξη $\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i + \lambda \Gamma_j$ στις γραμμές του πίνακα A , στον αντίστροφο A^{-1} του πίνακα A εφαρμόζουμε τη στοιχειώδη πράξη $\Sigma_j \rightarrow \Sigma_j - \lambda \Sigma_i$ στις στήλες του πίνακα A^{-1} .

- (2) Εφαρμόζοντας τη στοιχειώδη πράξη $\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$ στις γραμμές του πίνακα A , πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα A από τα αριστερά με τον στοιχειώδη πίνακα E_{ij} , δηλαδή έχουμε:

$$A \xrightarrow{\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j} E_{ij}A$$

Επειδή οι πίνακες E_{ij} και A είναι αντιστρέψιμοι και ισχύει ότι $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$, έπεται ότι ο πίνακας $E_{ij}A$ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει ότι

$$(E_{ij}A)^{-1} = A^{-1}E_{ij}^{-1} = A^{-1}E_{ij}$$

Σύμφωνα με την Άσκηση 1, έχουμε

$$A^{-1} \xrightarrow{\Sigma_i \leftrightarrow \Sigma_j} A^{-1} \cdot E_{ij}$$

Επομένως, εφαρμόζοντας τη στοιχειώδη πράξη $\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$ στις γραμμές του πίνακα A , στον αντίστροφο A^{-1} του πίνακα A εφαρμόζουμε τη στοιχειώδη πράξη $\Sigma_i \leftrightarrow \Sigma_j$ στις στήλες του πίνακα A^{-1} .

- (3) Εφαρμόζοντας τη στοιχειώδη πράξη $\Gamma_i \rightarrow \lambda\Gamma_i$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, στις γραμμές του πίνακα A , πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα A από τα αριστερά με τον στοιχειώδη πίνακα $E_i(\lambda)$, δηλαδή έχουμε:

$$A \xrightarrow{\Gamma_i \rightarrow \lambda\Gamma_i} E_i(\lambda)A$$

Επειδή οι πίνακες $E_i(\lambda)$ και A είναι αντιστρέψιμοι και ισχύει ότι $E_i(\lambda)^{-1} = E_i(\lambda^{-1})$, έπεται ότι ο πίνακας $E_i(\lambda)A$ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει ότι

$$(E_i(\lambda)A)^{-1} = A^{-1}E_i(\lambda)^{-1} = A^{-1}E_i(\lambda^{-1})$$

Σύμφωνα με την Άσκηση 1, έχουμε

$$A^{-1} \xrightarrow{\Sigma_i \rightarrow \lambda^{-1}\Sigma_i} A^{-1} \cdot E_i(\lambda^{-1})$$

Επομένως, εφαρμόζοντας τη στοιχειώδη πράξη $\Gamma_i \rightarrow \lambda\Gamma_i$ στις γραμμές του πίνακα A , στον αντίστροφο A^{-1} του πίνακα A εφαρμόζουμε τη στοιχειώδη πράξη $\Sigma_i \rightarrow \lambda^{-1}\Sigma_i$ στις στήλες του πίνακα A^{-1} . ■

Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Ο πίνακας A καλείται **αριστερά αντιστρέψιμος** αν και μόνον αν υπάρχει $n \times m$ πίνακας Y έτσι ώστε $YA = I_n$, και τότε ο πίνακας Y καλείται ένας **αριστερός αντίστροφος** του A . Παρόμοια, ο πίνακας A καλείται **δεξιά αντιστρέψιμος** αν και μόνον αν υπάρχει $n \times m$ πίνακας X έτσι ώστε $AX = I_m$, και τότε ο πίνακας X καλείται ένας **δεξιός αντίστροφος** του A .

Άσκηση 3 (Βλέπε την Άσκηση 7 για ένα ελαφρώς γενικότερο αποτέλεσμα). Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Ναδειχθεί ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ο A είναι τετραγωνικός και είναι αριστερά και δεξιά αντιστρέψιμος.

Λύση. Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε προφανώς $m = n$, υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας του A^{-1} ο οποίος είναι μεγέθους $n \times n$ και ισχύει ότι $AA^{-1} = I_n$ και $A^{-1}A = I_n$. Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας A είναι δεξιά και αριστερά αντιστρέψιμος.

Αντίστροφα, έστω ότι ο πίνακας A είναι δεξιά και αριστερά αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει ένας $n \times m$ πίνακας Y έτσι ώστε $YA = I_n$ και υπάρχει $n \times m$ πίνακας X έτσι ώστε $AX = I_m$. Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη σχέση με τον πίνακα X θα έχουμε $(YA)X = I_n X = X$, δηλαδή $Y(AX) = X \implies YI_m = X$ και επομένως $Y = X$. Επειδή ο A είναι τετραγωνικός, έπεται ότι $n = m$, ο πίνακας X είναι τετραγωνικός και $AX = I_n = XA$. Αυτό σημαίνει ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και $X = A^{-1}$. ■

Για παράδειγμα, έστω ο 2×1 πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Τότε θέτοντας $Y = (1 \ a)$, όπου $a \in \mathbb{K}$, θα έχουμε: $YA = (1) = I_1$, δηλαδή ο πίνακας Y είναι ένας αριστερός αντίστροφος του A . Παρατηρούμε ότι ο A έχει άπειρο πλήθος αριστερών αντίστροφων πινάκων και δεν είναι αντιστρέψιμος. Παρόμοια, έστω ο 1×2 πίνακας $A = (1 \ 0)$. Τότε θέτοντας $X = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$, όπου $a \in \mathbb{K}$, έχουμε $AX = (1) = I_1$, δηλαδή ο πίνακας X είναι ένας δεξιός αντίστροφος του A . Παρατηρούμε ότι ο A έχει άπειρο πλήθος δεξιών αντίστροφων πινάκων και δεν είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 4. Θεωρούμε τον 3×2 πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Να εξετασθεί αν ο πίνακας A έχει δεξιούς ή αριστερούς αντίστροφους πίνακες.

Λύση. Έστω

$$Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

έναν δεξιό αντίστροφο του A . Τότε θα έχουμε

$$I_3 = AY \implies \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ -a+d & -b+e & -c+f \\ a & b & c \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \begin{cases} a+d=1, & b+e=0, & c+f=0 \\ -a+d=0, & -b+e=1, & -c+f=0 \\ a=0, & b=0, & c=1 \end{cases}$$

Οι παραπάνω σχέσεις μας οδηγούν στην αντίφαση $0 = 1$, και επομένως δεν υπάρχει πίνακας 2×3 πίνακας Y έτσι ώστε $AY = I_3$. Έτσι ο πίνακας A δεν έχει δεξιό αντίστροφο.

Έστω

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

έναν αριστερό αντίστροφο του A . Τότε θα έχουμε

$$I_2 = XA \implies \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b+c & a+b \\ d-e+f & d+e \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} a-b+c=1, & a+b=0 \\ d-e+f=0, & d+e=1 \end{cases}$$

Τότε θα έχουμε $b = -a$ και $e = 1 - d$ και επομένως

$$X = \begin{pmatrix} a & -a & 1-2a \\ d & 1-d & 1-2d \end{pmatrix}$$

Εύκολα επαληθεύουμε ότι για τυχόντα στοιχεία $a, d \in \mathbb{K}$, έχουμε

$$\begin{pmatrix} a & -a & 1-2a \\ d & 1-d & 1-2d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Επομένως ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος και έχει άπειρο πλήθος αριστερών αντίστροφων. ■

Υπενθυμίζουμε ότι η ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή ενός πίνακα $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ είναι μοναδική και συμβολίζεται με $\Gamma(A)$. Η **βαθμίδα γραμμών** του πίνακα A ορίζεται να είναι το πλήθος των μη-μηδενικών γραμμών της ισχυρά γ -κλιμακωτής μορφής $\Gamma(A)$ του πίνακα A και συμβολίζεται με $\gamma(A)$. Προφανώς: $\gamma(A) \leq m$.

Παρόμοια η ισχυρά σ -κλιμακωτή μορφή ενός πίνακα $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ είναι μοναδική και συμβολίζεται με $\Sigma(A)$. Η **βαθμίδα στηλών** του πίνακα A ορίζεται να είναι το πλήθος των μη-μηδενικών γραμμών της ισχυρά σ -κλιμακωτής μορφής $\Sigma(A)$ του πίνακα A και συμβολίζεται με $\sigma(A)$. Προφανώς: $\sigma(A) \leq n$.

Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι, για κάθε πίνακα $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, ισχύει ότι: $\gamma(A) = \sigma(A)$ και η κοινή αυτή τιμή καλείται η **βαθμίδα** του πίνακα A και συμβολίζεται με:

$$\mathbf{r}(A) = \sigma(A) = \gamma(A)$$

Παρατηρούμε ότι η βαθμίδα $\mathbf{r}(A)$ ενός πίνακα $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ ικανοποιεί την ανισότητα

$$\mathbf{r}(A) \leq \min \{m, n\} \quad (*)$$

Άσκηση 5. Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Να δειχθεί ότι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

- (1) $\gamma(A) = m$.
- (2) Υπάρχει πίνακας $B \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$ έτσι ώστε: $AB = I_m$.

Επιπλέον να δειχθεί ότι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(3) $\sigma(A) = n$.

(4) Υπάρχει πίνακας $C \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$ έτσι ώστε: $CA = I_n$.

Λύση. (1) \implies (2) Έστω $\gamma(A) = m$. Τότε $\mathbf{r}(A) = m$ και τότε από τη σχέση (*) έπεται ότι $m \leq n$. Τότε η ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή $\Gamma(A)$ του A έχει m το πλήθος μη-μηδενικές γραμμές. Επειδή ο πίνακας A έχει m το πλήθος γραμμές, έπεται ότι ο πίνακας $\Gamma(A)$ θα είναι της μορφής:

$$\Gamma(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_{1m+1} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_{2m+1} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{mm+1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε τον $n \times m$ πίνακα

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

όπου οι m στήλες και οι πρώτες m γραμμές σχηματίζουν τον μοναδιαίο $m \times m$ πίνακα I_m . Προφανώς τότε θα έχουμε

$$\Gamma(A)X = I_m \quad (1)$$

Για την ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή $\Gamma(A)$ του A γνωρίζουμε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας P έτσι ώστε: $PA = \Gamma(A)$. Τότε, λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση (1), θα έχουμε

$$PA = \Gamma(A) \implies PAX = \Gamma(A)X = I_m \implies AX = P^{-1} \implies AXP = I_m$$

Θέτοντας $B = XP$ αποκτούμε έναν $n \times m$ πίνακα για τον οποίο ισχύει ότι $AB = I_m$.

(2) \implies (1) Έστω B ένας $n \times m$ πίνακας για τον οποίο ισχύει ότι $AB = I_m$. Τότε χρησιμοποιώντας τη σχέση $PA = \Gamma(A)$, όπου ο $m \times m$ πίνακας P είναι αντιστρέψιμος, θα έχουμε:

$$PAB = P \implies \Gamma(A)B = P \implies \Gamma(A)BP^{-1} = I_m$$

Αν μια από τις m γραμμές του πίνακα $\Gamma(A)$ είναι η μηδενική γραμμή, έστω για παράδειγμα ότι αυτή είναι η γραμμή Γ_i , τότε από τον ορισμό πολλαπλασιασμού πινάκων έπεται ότι η i -γραμμή του πίνακα $\Gamma(A)BP^{-1}$ θα πρέπει να είναι η μηδενική. Αυτό είναι άτοπο διότι από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η i -γραμμή του πίνακα $\Gamma(A)BP^{-1}$ συμπίπτει με την i -γραμμή του πίνακα I_m η οποία είναι προφανώς μη-μηδενική. Επομένως όλες οι γραμμές του πίνακα $\Gamma(A)$ είναι μη-μηδενικές και αυτό σημαίνει ότι $\gamma(A) = m$. ■

Άσκηση 6. Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Να δειχθεί ότι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(1) $\sigma(A) = n$.

(2) Υπάρχει πίνακας $C \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$ έτσι ώστε: $CA = I_n$.

Λύση. Θεωρούμε τον $n \times m$ πίνακα tA . Τότε $\gamma({}^tA) = \sigma(A)$. Επομένως χρησιμοποιώντας την Άσκηση 5, θα έχουμε:

$$\sigma(A) = n \iff \gamma({}^tA) = n \iff \text{υπάρχει } m \times n \text{ πίνακας } B \text{ έτσι ώστε: } {}^tAB = I_n$$

Επειδή $I_n = {}^tI_n = {}^t({}^tAB) = {}^tB({}^tA) = {}^tBA$, θέτοντας $C = {}^tB \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$, από τις παραπάνω ισοδυναμίες προκύπτει ότι:

$$\sigma(A) = n \iff \text{υπάρχει } n \times m \text{ πίνακας } C \text{ έτσι ώστε: } CA = I_n \quad \blacksquare$$

Άσκηση 7. Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} . Ναδειχθεί ότι, αν ο A έχει έναν αριστερό αντίστροφο X και έναν δεξιό αντίστροφο Y , τότε $m = n$, $X = Y$, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = X = Y$.

Ιδιαίτερα ισχύει ότι: ένας πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν έχει δεξιό και αριστερό αντίστροφο.

Λύση. Επειδή ο πίνακας X είναι ένας αριστερός αντίστροφος του A , έπεται ότι το μέγεθός του είναι $n \times m$ και θα έχουμε $XA = I_n$. Από την Άσκηση 6 προκύπτει τότε ότι $\sigma(A) = n$.

Επειδή ο πίνακας Y είναι ένας δεξιός αντίστροφος του A , έπεται ότι το μέγεθός του είναι $n \times m$ και θα έχουμε $AY = I_m$. Από την Άσκηση 5 προκύπτει τότε ότι $\gamma(A) = m$.

Επειδή για κάθε πίνακα $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ ισχύει ότι $\gamma(A) = \sigma(A)$, έπεται ότι $n = m$. Επιπλέον θα έχουμε:

$$XA = I_n \implies XAY = Y \implies X = Y$$

Άρα θα έχουμε $XA = I_n = AX$ και επομένως ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και $X = A^{-1}$. ■

Μέθοδος εύρεσης αντίστροφου ενός αντιστρέψιμου πίνακα με χρήση στοιχειωδών πράξεων

Υπενθυμίζουμε ότι αν

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

είναι ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} , τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τον $n \times 2n$ πίνακα

$$(A | I_n) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right)$$

Εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του πίνακα $(A | I_n)$ με σκοπό να προσδιορίσουμε την ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή $\Gamma(A)$ του πίνακα A . Τότε ο πίνακας $(A | I_n)$ θα μετατραπεί σε έναν πίνακα της μορφής

$$(\Gamma(A) | X)$$

1. Αν $\Gamma(A) = I_n$, τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = X$.
2. Αν $\Gamma(A) \neq I_n$, τότε ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 8. Να βρεθεί η ισχυρά κλιμακωτή μορφή του πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ακολουθώντας, αν ο A είναι αντιστρέψιμος, να βρεθεί ο A^{-1} με χρήση πράξεων επί των γραμμών του.

Λύση. Θα υπολογίσουμε ταυτόχρονα την ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή του πίνακα A και τον αντίστροφο A^{-1} του πίνακα A , αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του A .

$$\begin{aligned} (A | I_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 2\Gamma_2} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{4}\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 2\Gamma_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \right) & \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_3} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \right) = (I_3 | X) \end{aligned}$$

όπου

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Επομένως η ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή του πίνακα A είναι ο μοναδιαίος πίνακας I_3 . Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ο αντιστροφός του είναι ο πίνακας

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Άσκηση 9. Αν $a \in \mathbb{K}$, να βρεθεί η ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή του πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ a & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

και ακολούθως να βρεθεί η τιμή του a για τις οποίες ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Ποιός είναι τότε ο αντιστροφός του A ;

Λύση. Θα έχουμε:

$$(A | I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - a\Gamma_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 9 & -a & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow -\frac{1}{3}\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1-a & 9 & -a & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + (a-1)\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{28-a}{3} & -\frac{2a-1}{3} & -\frac{a+1}{3} & 1 \end{array} \right) \quad (*)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(1) Αν $a = 28$, τότε εργαζόμενοι στον πίνακα (*), θα έχουμε:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -19 & -9 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -19 & -9 & 1 \end{array} \right) = (B | A')$$

Ο πίνακας B είναι ισχυρά γ -κλιμακωτός και επειδή $B \neq I_n$, έπεται ότι ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος, και η ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή του A είναι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Αν $a \neq 28$, τότε εργαζόμενοι στον πίνακα (*), θα έχουμε:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{28-a}{3} & -\frac{2a-1}{3} & -\frac{a+1}{3} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \frac{3}{28-a}\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3(2a+1)}{3(28-a)} & \frac{3(-a+1)}{3(28-a)} & \frac{3}{28-a} \end{array} \right) = \\ & = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2a+1}{a-28} & \frac{a-1}{a-28} & \frac{3}{28-a} \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \frac{1}{3}\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-9}{a-28} & \frac{9}{a-28} & \frac{-1}{a-28} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2a+1}{a-28} & \frac{a-1}{a-28} & \frac{3}{28-a} \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_2} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-19}{a-28} & \frac{-9}{a-28} & \frac{1}{a-28} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-9}{a-28} & \frac{9}{a-28} & \frac{-1}{a-28} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2a+1}{a-28} & \frac{a-1}{a-28} & \frac{-3}{a-28} \end{array} \right) = (I_3 | A'') \end{aligned}$$

όπου

$$A'' = \begin{pmatrix} \frac{-19}{a-28} & \frac{-9}{a-28} & \frac{1}{a-28} \\ \frac{a-9}{a-28} & \frac{9}{a-28} & \frac{-1}{a-28} \\ \frac{2a+1}{a-28} & \frac{a-1}{a-28} & \frac{-3}{a-28} \end{pmatrix} = \frac{1}{a-28} \begin{pmatrix} -19 & -9 & 1 \\ a-9 & 9 & -1 \\ 2a+1 & a-1 & -3 \end{pmatrix}$$

Επομένως ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι ο πίνακας

$$A^{-1} = \frac{1}{a-28} \begin{pmatrix} -19 & -9 & 1 \\ a-9 & 9 & -1 \\ 2a+1 & a-1 & -3 \end{pmatrix}$$

Συνοψίζοντας δείξαμε ότι ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν $a \neq 28$ και τότε ο αντίστροφός του είναι ο πίνακας που δίνεται παραπάνω. ■

Άσκηση 10. Να βρεθεί η ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή των πινάκων

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ακολουθώντας, αν οι πίνακες είναι αντιστρέψιμοι, να βρεθούν οι αντίστροφοί τους με χρήση πράξεων επί των γραμμών τους.

Λύση. Για τον πίνακα A θα έχουμε:

$$\begin{aligned} (A | I_4) &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_4} \\ & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = (I_4 | X) \end{aligned}$$

Άρα η ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή του πίνακα A είναι ο μοναδιαίος 4×4 πίνακας I_4 , ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Παρόμοια για τον πίνακα B θα έχουμε:

$$(B|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_4} \\ \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = (I_4|Y)$$

Άρα η ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή του πίνακα B είναι ο μοναδιαίος 4×4 πίνακας I_4 , ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος και

$$B^{-1} = Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Άσκηση 11. Να βρεθεί η ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή των πινάκων

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ακολουθώντας, αν οι πίνακες είναι αντιστρέψιμοι, να βρεθούν οι αντίστροφοί τους με χρήση πράξεων επί των γραμμών τους.

Λύση. Για τον πίνακα A θα έχουμε:

$$(A|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_3]{\Gamma_1 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \\ \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) = (I_4|X)$$

Άρα η ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή του πίνακα A είναι ο μοναδιαίος 4×4 πίνακας I_4 , ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Παρόμοια για τον πίνακα B θα έχουμε:

$$(B|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_2, \Gamma_4 \rightarrow \frac{1}{4}\Gamma_4]{\Gamma_1 \rightarrow -\Gamma_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_4]{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3} \\ \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = (I_4|Y)$$

Άρα η ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή του πίνακα B είναι ο μοναδιαίος 4×4 πίνακας I_4 , ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος και

$$B^{-1} = Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Άσκηση 12. Να βρεθεί η ισχυρή γ -κλιμακωτή μορφή των πινάκων

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ακολουθώντας, αν οι πίνακες είναι αντιστρέψιμοι, να βρεθούν οι αντίστροφοί τους με χρήση πράξεων επί των γραμμών τους.

Λύση. Για τον πίνακα A θα έχουμε:

$$(A | I_n) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_2, \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_3, \dots \\ \dots, \Gamma_{n-1} \rightarrow \Gamma_{n-1} - \Gamma_n}} (I_n | X)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right) = (I_n | X)$$

Άρα η ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή του πίνακα A είναι ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας I_n , ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Παρόμοια για τον πίνακα B θα έχουμε:

$$(B | I_n) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1}$$

$$\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_2} \\
\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - \Gamma_3} \\
\vdots \\
\vdots \\
\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & (-1)^{n-1} & (-1)^{n-2} & (-1)^{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & (-1)^n & (-1)^{n-1} & (-1)^{n-2} & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{array} \right) = (I_n | X)
\end{array}$$

Άρα η ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή του πίνακα B είναι ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας I_n , ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος και

$$B^{-1} = X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n-1} & (-1)^{n-2} & (-1)^{n-3} & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ (-1)^n & (-1)^{n-1} & (-1)^{n-2} & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ (-1)^{n+1} & (-1)^n & (-1)^{n-1} & \cdots & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Άσκηση 13. Να δείχθει ότι οι παρακάτω πίνακες είναι αντιστρέψιμοι και να βρεθούν οι αντίστροφοι τους:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

Λύση. Για τον πίνακα A θα έχουμε

$$\begin{aligned}
(A | I_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 2\Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow -\frac{1}{3}\Gamma_2} \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 6\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{9}\Gamma_3} \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_3]{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 2\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{5}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 2\Gamma_2}
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -9 & 9 \end{array} \right) = (A|X)$$

Άρα η ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή του πίνακα A είναι ο μοναδιαίος 3×3 πίνακας I_3 , ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 9 & -9 \\ 9 & -9 & 9 \end{pmatrix}$$

Για τον πίνακα B θα έχουμε:

$$\begin{aligned} (B|I_4) &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1, \Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \\ & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -6 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -10 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow -\Gamma_2} \\ & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -10 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 + 2\Gamma_2]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{3}\Gamma_3} \\ & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - 5\Gamma_3} \\ & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_4 \rightarrow 3\Gamma_4} \\ & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \frac{1}{3}\Gamma_4]{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 4\Gamma_4} \\ & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & -15 & 4 & 20 & -12 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -22 & 5 & 30 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 3\Gamma_3]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 5\Gamma_3} \\ & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -12 & 4 & 14 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -17 & 5 & 20 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 2\Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 22 & -6 & -26 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -17 & 5 & 20 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{array} \right) = (B|Y) \end{aligned}$$

Άρα η ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή του πίνακα B είναι ο μοναδιαίος 4×4 πίνακας I_4 , ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος και

$$B^{-1} = Y = \begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Άσκηση 14. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 11 & 0 & -4 & 8 \\ -1 & 2 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί η ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή $\Gamma(A)$ του A και ένας αντιστρέψιμος 4×4 πίνακας P έτσι ώστε: $PA = \Gamma(A)$. Ποιά είναι η βαθμίδα του A ;

Λύση. Θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 11 & 0 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 2\Gamma_1, \Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 + \Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 3\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -10 & 10 & -15 & -5 \\ 0 & 5 & 4 & -12 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow -\frac{1}{10}\Gamma_2} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 5 & 4 & -12 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - 5\Gamma_2]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 5\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 9 & -\frac{39}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & -\frac{13}{2} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{9}\Gamma_3} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 9 & -\frac{39}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & -\frac{13}{2} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \Gamma_3, \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + 2\Gamma_3]{\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - 3\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 3\Gamma_2} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma(A)
 \end{aligned}$$

Η ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή $\Gamma(A)$ έχει 3 μη-μηδενικές γραμμές και επομένως η βαθμίδα του A είναι ίση με $r(A) = \gamma(A) = 3$.

Ερμηνεύοντας τις προηγηθείσες στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του A ως διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς από τα αριστερά του πίνακα A με τους αντίστοιχους στοιχειώδεις πίνακες, προκύπτει ότι θέτοντας:

$$P = E_{12}(-3) E_{13}(2) E_{23}(1) E_{43}(-3) E_3\left(\frac{1}{9}\right) E_{42}(-5) E_{32}(-5) E_2\left(-\frac{1}{10}\right) E_{41}(1) E_{32}(-2) E_{21}(-3)$$

απόκτούμε έναν 4×4 αντιστρέψιμο πίνακα P έτσι ώστε $PA = \Gamma(A)$. ■

Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{K})$, υπάρχει αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας P και αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας Q έτσι ώστε

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O_{r \times (n-r)} \\ \hline O_{(m-r) \times r} & O_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right)$$

όπου $r = \sigma(A) = \gamma(A)$ είναι η κοινή τιμή της βαθμίδας γραμμών και της βαθμίδας στηλών του πίνακα A , και $O_{r \times (n-r)}$ είναι ο μηδενικός $r \times (n-r)$ πίνακας, $O_{(m-r) \times r}$ είναι ο μηδενικός $(m-r) \times r$ πίνακας, $O_{(m-r) \times (n-r)}$ είναι ο μηδενικός $(m-r) \times (n-r)$ πίνακας, και τέλος I_r είναι ο μοναδιαίος $r \times r$ πίνακας. Ο παραπάνω πίνακας γράφεται πιο απλά ως

$$K(A) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right)$$

και καλείται η **κανονική μορφή** του πίνακα A . Με άλλα λόγια, κάθε $m \times n$ πίνακας A μπορεί να μετατραπεί, μετά την εκτέλεση πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές **και** στις στήλες του, σε έναν κανονικό πίνακα, ο οποίος καλείται η **κανονική μορφή** του A , και συμβολίζεται με $K(A)$. Σημειώνουμε ότι ο πίνακας $K(A)$ καθορίζεται πλήρως από το μέγεθος και τη βαθμίδα του πίνακα A .

Παρατήρηση 1. Περιγράφουμε μια μέθοδο για την εύρεση της βαθμίδας ενός $m \times n$ πίνακα A , του αντιστρέψιμου $m \times m$ πίνακα P , και του αντιστρέψιμου $n \times n$ πίνακα Q , έτσι ώστε:

$$PAQ = K(A) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right), \quad \text{όπου } r = \mathbf{r}(A)$$

- (1) Εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του A προσδιορίζουμε πρώτα την ισχυρή γ -κλιμακωτή μορφή $\Gamma(A)$. Ισοδύναμα βρίσκουμε στοιχειώδεις πίνακες $E_k E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$ έτσι ώστε, θέτοντας $P = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1$, να έχουμε:

$$PA = \Gamma(A)$$

Τότε ο $m \times m$ αντιστρέψιμος πίνακας που ζητάμε είναι ο P .

- (2) Το πλήθος των μη-μηδενικών γραμμών του πίνακα $\Gamma(A)$ είναι η βαθμίδα του A .
 (3) Στη συνέχεια, εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις στις στήλες του $\Gamma(A)$ προσδιορίζουμε την ισχυρή σ -κλιμακωτή μορφή $\Sigma(\Gamma(A))$. Ισοδύναμα βρίσκουμε στοιχειώδεις πίνακες $E'_1, E'_2, \dots, E'_{l-1}, E'_l$ έτσι ώστε, θέτοντας $Q = E'_1 E'_2 \cdots E'_{l-1} E'_l$, να έχουμε:

$$\Gamma(A)Q = \Sigma(\Gamma(A)) \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad PAQ = \Sigma(\Gamma(A))$$

Τότε ο $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας που ζητάμε είναι ο Q .

- (4) Ο πίνακας $\Sigma(\Gamma(A))$ είναι ισχυρά γ -κλιμακωτός και ισχυρά σ -κλιμακωτός. Επομένως η κανονική μορφή $K(A)$ του A που ζητάμε $K(A) = \Sigma(\Gamma(A))$.

Θα μπορούσαμε πρώτα να προσδιορίσουμε την ισχυρά σ -κλιμακωτή μορφή του πίνακα A και ακολούθως την ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή $\Gamma(\Sigma(A))$ του πίνακα $\Sigma(A)$. Τότε θα έχουμε

$$K(A) = \Sigma(\Gamma(A)) = \Gamma(\Sigma(A))$$

Σημειώνουμε ότι οι αντιστρέψιμοι πίνακες δεν είναι μοναδικοί.

Άσκηση 15. Να βρεθεί η κανονική μορφή του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 11 & 0 & -4 & 8 \\ -1 & 2 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

της Άσκησης 14. Επιπλέον να βρεθεί ένας αντιστρέψιμος 4×4 πίνακας P και ένας αντιστρέψιμος 5×5 πίνακας Q έτσι ώστε

$$PAQ = K(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Λύση. Από την Άσκηση 14 γνωρίζουμε ότι η ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή του A είναι ο πίνακας

$$\Gamma(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Τότε θα έχουμε:

$$\Gamma(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Sigma_5 \rightarrow \Sigma_5 - \frac{1}{3}\Sigma_1]{\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_4 - \frac{5}{3}\Sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Sigma_5 \rightarrow \Sigma_5 - \frac{2}{3}\Sigma_2]{\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_4 + \frac{2}{3}\Sigma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Sigma_5 \rightarrow \Sigma_5 - \frac{1}{6}\Sigma_3]{\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_4 + \frac{13}{6}\Sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Sigma(\Gamma(A)) = \mathbf{K}(A)$$

Ερμηνεύοντας τις προηγούμενες στοιχειώδεις πράξεις στις στήλες του $\Gamma(A)$ ως διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς από τα δεξιά του πίνακα $\Gamma(A)$ με τους αντίστοιχους στοιχειώδεις πίνακες, προκύπτει ότι θέτοντας:

$$Q = {}^tE_{41} \left(-\frac{5}{3} \right) {}^tE_{51} \left(-\frac{1}{3} \right) {}^tE_{42} \left(\frac{2}{3} \right) {}^tE_{52} \left(-\frac{2}{3} \right) {}^tE_{43} \left(\frac{13}{6} \right) {}^tE_{53} \left(-\frac{1}{6} \right)$$

απόκτούμε έναν 5×5 αντιστρέψιμο πίνακα P έτσι ώστε $\Gamma(A)Q = \mathbf{K}(A)$. Θεωρώντας τον αντιστρέψιμο πίνακα P ο οποίος προσδιορίστηκε στην Άσκηση 14, και για τον οποίο ισχύει $PA = \Gamma(A)$, έεται ότι θα έχουμε"

$$PAQ = \Gamma(A)Q = \mathbf{K}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Άσκηση 16. Να βρεθεί η ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή του πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 6 & 5 & 13 \\ -3 & -9 & 0 & -6 & -6 & -18 \end{pmatrix}$$

και ακολούθως να βρεθεί η κανονική μορφή του πίνακα A .

Λύση. Θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 6 & 5 & 13 \\ -3 & -9 & 0 & -6 & -6 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 6 & 5 & 13 \\ -3 & -9 & 0 & -6 & -6 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 1 & 9 \\ -3 & -9 & 0 & -6 & -6 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 3\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & 0 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{3}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \frac{1}{3}\Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 2\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + \Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} := B$$

Ο πίνακας B είναι ισχυρά γ -κλιμακωτός και είναι η ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή του A : $\Gamma(A) = B$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Sigma_4 \rightarrow \frac{1}{2}\Sigma_4]{\Sigma_2 \rightarrow \frac{1}{3}\Sigma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_4 - \Sigma_1, \Sigma_2 \leftrightarrow \Sigma_3}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_3 - \Sigma_2]{\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_4 - \Sigma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Sigma_4 \leftrightarrow \Sigma_6]{\Sigma_3 \leftrightarrow \Sigma_5} \\
& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_4 - 12\Sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_4 - 4\Sigma_2} \\
& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_4 + 3\Sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} := C
\end{aligned}$$

Ο πίνακας C είναι ισχυρά γ -κλιμακωτός και ισχυρά σ -κλιμακωτός. Επομένως ο πίνακας C είναι η κανονική μορφή του πίνακα A : $C = \mathcal{K}(A)$. ■

Άσκηση 17. Να βρεθεί η ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή και η κανονική μορφή του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & a \end{pmatrix}$$

όπου $a \in \mathbb{K}$.

Λύση. Θα έχουμε

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & a+4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & a+7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{5}\Gamma_2} \\
& \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & a+7 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(1) Έστω $a = -7$.

Τότε θα έχουμε ότι ο παραπάνω πίνακας είναι

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{17}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma(A)$$

Για την κανονική μορφή του A , θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\Gamma(A) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{17}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_4 + \frac{3}{5}\Sigma_3]{\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_4 - \frac{17}{5}\Sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2 - 2\Sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Sigma(\Gamma(A)) = \mathcal{K}(A)
\end{aligned}$$

Επομένως, αν $a = -7$, τότε η βαθμίδα του πίνακα A είναι

$$\mathbf{r}(A) = 2$$

(2) Έστω $a \neq -7$.

Τότε $a + 7 \neq 0$ και για τον παραπάνω πίνακα θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & a+7 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{a+7}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \frac{17}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 4\Gamma_3 \\ \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \frac{3}{5}\Gamma_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Gamma(A) \end{aligned}$$

Για την κανονική μορφή του A , θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \Gamma(A) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2 - 2\Sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Sigma_2 \leftrightarrow \Sigma_3} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Sigma_3 \leftrightarrow \Sigma_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Sigma(\Gamma(A)) = \mathcal{K}(A) \end{aligned}$$

Επομένως, αν $a \neq -7$, τότε η βαθμίδα του πίνακα A είναι

$$r(A) = 3 \quad \blacksquare$$

Δύο $m \times n$ πίνακες A και B καλούνται **γ -ισοδύναμοι** αν ο B προκύπτει από τον A μετά την εκτέλεση πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές του A . Γνωρίζουμε τότε ότι: οι πίνακες A και B είναι γ -ισοδύναμοι αν υπάρχουν στοιχειώδεις $m \times m$ πίνακες E_1, E_2, \dots, E_p έτσι ώστε: $E_p E_{p-1} \dots E_2 E_1 A = B$.

Ορίζουμε μια σχέση « \sim_γ » στο σύνολο $M_{m \times n}(\mathbb{K})$, ως εξής: $\forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$: $A \sim_\gamma B$ αν και μόνον αν οι πίνακες A και B είναι γ -ισοδύναμοι, δηλαδή, $\forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$:

$$A \sim_\gamma B \iff \text{υπάρχουν στοιχειώδεις } m \times m \text{ πίνακες } E_1, E_2, \dots, E_p : E_p E_{p-1} \dots E_2 E_1 A = B$$

Θέτοντας $P = E_p E_{p-1} \dots E_2 E_1$, αποκτούμε τότε έναν αντιστρέψιμο $m \times m$ πίνακα P για τον οποίο ισχύει ότι: $PA = B$. Επειδή κάθε αντιστρέψιμος πίνακας P είναι γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων, έπεται ότι:

$$A \sim_\gamma B \iff \text{υπάρχει αντιστρέψιμος } m \times m \text{ πίνακας } P : PA = B$$

Άσκηση 18. (1) Να δειχθεί ότι η σχέση « \sim_γ » στο σύνολο $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

(2) Να δειχθεί ότι ένας πίνακας A είναι γ -ισοδύναμος με τον μηδενικό πίνακα αν και μόνον αν $A = O$.

(3) Να δειχθεί ότι ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν είναι γ -ισοδύναμος με τον I_n .

(4) Να δειχθεί ότι δύο τυχόντες $n \times n$ αντιστρέψιμοι πίνακες είναι πάντα γ -ισοδύναμοι.

(5) Να δειχθεί ότι ένας αντιστρέψιμος πίνακας A είναι γ -ισοδύναμος με τον πίνακα A^n , $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Λύση. (1) Για να δείξουμε ότι η σχέση « \sim_γ » είναι σχέση ισοδυναμίας, πρέπει να δείξουμε ότι είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

(α) Έστω $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Επειδή ο μοναδιαίος $m \times m$ πίνακας I_m είναι αντιστρέψιμος και $I_m A = A$, έπεται ότι $A \sim_\gamma A$, και άρα η σχέση « \sim_γ » είναι ανακλαστική.

(β) Έστω $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ και υποθέτουμε ότι $A \sim_\gamma B$. Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας P έτσι ώστε $PA = B$. Τότε $A = P^{-1}B$ και προφανώς ο πίνακας P^{-1} είναι αντιστρέψιμος. Αυτό σημαίνει ότι $B \sim_\gamma A$ και άρα η σχέση \sim_γ είναι συμμετρική.

(γ) Έστω $A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ και υποθέτουμε ότι $A \sim_\gamma B$ και $B \sim_\gamma C$. Τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας P_1 έτσι ώστε $P_1 A = B$, και ένας αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας P_2 έτσι ώστε $P_2 B = C$. Τότε θα έχουμε $P_2(P_1 A) = P_2 B = C$ ή ισοδύναμα $(P_2 P_1) A = C$. Επειδή ο πίνακας $P_2 P_1$ είναι αντιστρέψιμος, έπεται ότι $A \sim_\gamma C$ και επομένως η σχέση « \sim_γ » είναι μεταβατική.

- (2) Αν ο πίνακας $A = O$, τότε προφανώς ο A είναι γ -ισοδύναμος με τον εαυτό του. Αντίστροφα, έστω ότι $A \sim_\gamma O$. Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε $PA = O$. Τότε $A = P^{-1}O = O$.
- (3) Γνωρίζουμε ότι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν η ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή $\Gamma(A)$ του A είναι ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας I_n , δηλαδή αν και μόνον αν $\Gamma(A) = I_n$. Επειδή υπάρχει αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας P έτσι ώστε $PA = \Gamma(A)$, έπεται ότι $PA = I_n$, δηλαδή ο A είναι ισοδύναμος με τον I_n . Επομένως ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν είναι γ -ισοδύναμος με τον I_n .
- (4) Αν A, B είναι δύο αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες, τότε από το μέρος (3) έπεται ότι $A \sim_\gamma I_n$ και $B \sim_\gamma I_n$ ή ισοδύναμα $I_n \sim_\gamma B$, επειδή η σχέση « \sim_γ » είναι συμμετρική. Επειδή η σχέση « \sim_γ » είναι μεταβατική, θα έχουμε $A \sim_\gamma B$.
- (5) Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε ορίζεται ο αντίστροφός του A^{-1} και επομένως ορίζονται και οι πίνακες $A^{-n} = (A^{-1})^n, \forall n \geq 1$. Θέτοντας $A^0 = I_n$, έπεται ότι ορίζονται οι πίνακες $A^n, \forall n \in \mathbb{Z}$, οι οποίοι είναι αντιστρέψιμοι με αντίστροφο $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$. Από το μέρος (4) έπεται ότι $A \sim_\gamma A^n, \forall n \in \mathbb{Z}$. ■

Δύο $m \times n$ πίνακες A και B καλούνται σ -ισοδύναμοι αν ο B προκύπτει από τον A μετά την εκτέλεση πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πράξεων στις στήλες του A . Γνωρίζουμε τότε ότι: οι πίνακες A και B είναι σ -ισοδύναμοι αν υπάρχουν στοιχειώδεις $n \times n$ πίνακες E_1, E_2, \dots, E_q έτσι ώστε: $B = AE_1E_2 \cdots E_{q-1}E_q$.

Ορίζουμε μια σχέση « \sim_σ » στο σύνολο $M_{m \times n}(\mathbb{K})$, ως εξής: $\forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$: $A \sim_\sigma B$ αν και μόνον αν οι πίνακες A και B είναι σ -ισοδύναμοι, δηλαδή, $\forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$:

$$A \sim_\sigma B \iff \text{υπάρχουν στοιχειώδεις } m \times m \text{ πίνακες } E_1, E_2, \dots, E_q : AE_1E_2 \cdots E_{q-1}E_q = B$$

Θέτοντας $Q = E_1E_2 \cdots E_{q-1}E_q$, αποκτούμε τότε έναν αντιστρέψιμο $n \times n$ πίνακα Q για τον οποίο ισχύει ότι: $B = AQ$. Επειδή κάθε αντιστρέψιμος πίνακας Q είναι γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων, έπεται ότι:

$$A \sim_\sigma B \iff \text{υπάρχει αντιστρέψιμος } n \times n \text{ πίνακας } Q : B = AQ$$

Άσκηση 19. (1) Να δειχθεί ότι η σχέση « \sim_σ » στο σύνολο $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

- (2) Να δειχθεί ότι ένας πίνακας A είναι σ -ισοδύναμος με τον μηδενικό πίνακα αν και μόνον αν $A = O$.
- (3) Να δειχθεί ότι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν είναι σ -ισοδύναμος με τον I_n .
- (4) Να δειχθεί ότι δύο τυχόντες $n \times n$ αντιστρέψιμοι πίνακες είναι πάντα σ -ισοδύναμοι.
- (5) Να δειχθεί ότι ένας αντιστρέψιμος πίνακας A είναι σ -ισοδύναμος με τον πίνακα $A^n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Λύση. Από τον ορισμό έπεται ότι $\forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$:

$$A \sim_\sigma B \iff \text{υπάρχει αντιστρέψιμος } n \times n \text{ πίνακας } Q : B = AQ$$

Τότε, αν $A \sim_\sigma B$ έπεται ότι υπάρχει αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας Q έτσι ώστε $B = AQ$. Θεωρώντας ανάστροφους πίνακες, έπεται ότι για τους $n \times m$ πίνακες tA και tB υπάρχει αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας tQ έτσι ώστε: ${}^tB = {}^tQ{}^tA$, δηλαδή προκύπτει ότι ${}^tA \sim_\gamma {}^tB$. Αντίστροφα, αν ${}^tA \sim_\gamma {}^tB$, τότε εξ' ορισμού υπάρχει αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας P έτσι ώστε ${}^tB = P{}^tA$. Θεωρώντας ανάστροφους πίνακες έπεται ότι για τους $m \times n$ πίνακες ${}^t({}^tA) = A$ και ${}^t({}^tB) = B$ υπάρχει αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας tP έτσι ώστε: $B = A{}^tP$, δηλαδή προκύπτει ότι $A \sim_\sigma B$. Επομένως:

$$A \sim_\sigma B \iff {}^tA \sim_\gamma {}^tB$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω ισοδυναμία με τα αποτελέσματα της Άσκησης 18 προκύπτουν άμεσα οι ισχυρισμοί της παρούσας Άσκησης.

Διαφορετικά:

- (1) Για να δείξουμε ότι η σχέση « \sim_σ » είναι σχέση ισοδυναμίας, πρέπει να δείξουμε ότι είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

- (α) Έστω $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Επειδή ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας I_n είναι αντιστρέψιμος και $AI_n = A$, έπεται ότι $A \sim_\sigma A$, και άρα η σχέση « σ » είναι ανακλαστική.
- (β) Έστω $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ και υποθέτουμε ότι $A \sim_\sigma B$. Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας Q έτσι ώστε $AQ = B$. Τότε $A = BQ^{-1}$ και προφανώς ο πίνακας Q^{-1} είναι αντιστρέψιμος. Αυτό σημαίνει ότι $B \sim_\sigma A$ και άρα η σχέση \sim_σ είναι συμμετρική.
- (γ) Έστω $A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ και υποθέτουμε ότι $A \sim_\sigma B$ και $B \sim_\sigma C$. Τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας Q_1 έτσι ώστε $AQ_1 = B$, και ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας Q_2 έτσι ώστε $BQ_2 = C$. Τότε θα έχουμε $(AQ_1)Q_2 = BQ_2 = C$ ή ισοδύναμα $A(Q_1Q_2) = C$. Επειδή ο πίνακας Q_1Q_2 είναι αντιστρέψιμος, έπεται ότι $A \sim_\sigma C$ και επομένως η σχέση « \sim_σ » είναι μεταβατική.
- (2) Αν ο πίνακας $A = O$, τότε προφανώς ο A είναι σ -ισοδύναμος με τον εαυτό του. Αντίστροφα, έστω ότι $A \sim_\sigma O$. Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας Q έτσι ώστε $AQ = O$. Τότε $A = OQ^{-1} = O$.
- (3) Γνωρίζουμε ότι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν η ισχυρά σ -κλιμακωτή μορφή $\Sigma(A)$ του A είναι ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας I_n , δηλαδή αν και μόνον αν $\Sigma(A) = I_n$. Επειδή υπάρχει αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας Q έτσι ώστε $AQ = \Sigma(A)$, έπεται ότι $AQ = I_n$, δηλαδή ο A είναι σ -ισοδύναμος με τον I_n . Επομένως ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν είναι σ -ισοδύναμος με τον I_n .
- (4) Αν A, B είναι δύο αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες, τότε από το μέρος (3) έπεται ότι $A \sim_\sigma I_n$ και $B \sim_\sigma I_n$ ή ισοδύναμα $I_n \sim_\sigma B$, επειδή η σχέση « \sim_σ » είναι συμμετρική. Επειδή η σχέση « \sim_σ » είναι μεταβατική, θα έχουμε $A \sim_\sigma B$.
- (5) Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε ορίζεται ο αντίστροφός του A^{-1} και επομένως ορίζονται και οι πίνακες $A^{-n} = (A^{-1})^n, \forall n \geq 1$. Θέτοντας $A^0 = I_n$, έπεται ότι ορίζονται οι πίνακες $A^n, \forall n \in \mathbb{Z}$, οι οποίοι είναι αντιστρέψιμοι με αντίστροφο $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$. Από το μέρος (4) έπεται ότι $A \sim_\sigma A^n, \forall n \in \mathbb{Z}$. ■

Δύο $m \times n$ πίνακες A και B καλούνται **ισοδύναμοι** αν ο B προκύπτει από τον A μετά την εκτέλεση πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές και στις στήλες του A . Γνωρίζουμε τότε ότι: οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι αν υπάρχουν στοιχειώδεις $n \times n$ πίνακες E'_1, E'_2, \dots, E'_q , και στοιχειώδεις $m \times m$ πίνακες E_1, E_2, \dots, E_p έτσι ώστε:

$$E_p E_{p-1} \cdots E_2 E_1 A E'_1 E'_2 \cdots E'_{q-1} E'_q = B$$

Επειδή ένας τετραγωνικός πίνακας είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων, έπεται ότι οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι αν και μόνον αν υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας P και ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας Q έτσι ώστε: $PAQ = B$.

Ορίζουμε μια σχέση « \sim » στο σύνολο $M_{m \times n}(\mathbb{K})$, ως εξής: $\forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$: $A \sim B$ αν και μόνον αν οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι, δηλαδή, $\forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$:

$$A \sim B \iff \text{υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες } P \in M_m(\mathbb{K}) \text{ και } Q \in M_n(\mathbb{K}) \text{ έτσι ώστε : } PAQ = B$$

Άσκηση 20. (1) Ναδειχθεί ότι η σχέση « \sim » στο σύνολο $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

- (2) Ναδειχθεί ότι ένας πίνακας A είναι ισοδύναμος με τον μηδενικό πίνακα αν και μόνον αν $A = O$.
- (3) Ναδειχθεί ότι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν είναι ισοδύναμος με τον I_n .
- (4) Ναδειχθεί ότι δύο τυχόντες $n \times n$ αντιστρέψιμοι πίνακες είναι πάντα ισοδύναμοι.
- (5) Ναδειχθεί ότι ένας αντιστρέψιμος πίνακας A είναι ισοδύναμος με τον πίνακα $A^n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Λύση. (1) Για να δείξουμε ότι η σχέση « \sim » είναι σχέση ισοδυναμίας, πρέπει να δείξουμε ότι είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

- (α) Έστω $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Επειδή ο μοναδιαίος $m \times m$ πίνακας I_m είναι αντιστρέψιμος, ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας I_n είναι αντιστρέψιμος, και ισχύει ότι $I_m A I_n = A$, έπεται ότι $A \sim A$, και άρα η σχέση « \sim » είναι ανακλαστική.

- (β) Έστω $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ και υποθέτουμε ότι $A \sim B$. Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας P και αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας Q έτσι ώστε $PAQ = B$. Τότε $A = P^{-1}BQ^{-1}$ και προφανώς οι πίνακες P^{-1} και Q^{-1} είναι αντιστρέψιμοι. Αυτό σημαίνει ότι $B \sim A$ και άρα η σχέση \sim είναι συμμετρική.
- (γ) Έστω $A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ και υποθέτουμε ότι $A \sim B$ και $B \sim C$. Τότε: (α) υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας P_1 και ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας Q_1 έτσι ώστε $P_1AQ_1 = B$, και (β) υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας P_2 και ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας Q_2 έτσι ώστε $P_2BQ_2 = C$. Τότε θα έχουμε $(P_2P_1)A(Q_1Q_2) = P_2BQ_2 = C$. Επειδή οι πίνακες P_2P_1 και Q_1Q_2 είναι αντιστρέψιμοι, έπεται ότι $A \sim C$ και επομένως η σχέση « \sim » είναι μεταβατική.
- (2) Αν ο πίνακας $A = O$, τότε προφανώς ο A είναι ισοδύναμος με τον εαυτό του. Αντίστροφα, έστω ότι $A \sim O$. Τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας P και ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας Q έτσι ώστε $PAQ = O$ και επομένως $A = P^{-1}OQ^{-1} = O$.
- (3) Έστω ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει ο πίνακας A^{-1} και θα έχουμε $A^{-1}AI_n = I_n$. Θέτοντας $P = A^{-1}$ και $Q = I_n$, έπεται ότι $A \sim I_n$. Αντίστροφα, έστω $A \sim I_n$. Τότε υπάρχουν αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες P και Q έτσι ώστε $PAQ = I_n$, και επομένως $A = P^{-1}Q^{-1}$. Δηλαδή ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος ως γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων.
- (4) Αν A, B είναι δύο αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες, τότε από το μέρος (3) έπεται ότι $A \sim_\gamma I_n$ και $B \sim I_n$ ή ισοδύναμα $I_n \sim B$, επειδή η σχέση « \sim » είναι συμμετρική. Επειδή η σχέση « \sim » είναι μεταβατική, θα έχουμε $A \sim B$.
- (5) Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε ορίζεται ο αντίστροφός του A^{-1} και επομένως ορίζονται και οι πίνακες $A^{-n} = (A^{-1})^n, \forall n \geq 1$. Θέτοντας $A^0 = I_n$, έπεται ότι ορίζονται οι πίνακες $A^n, \forall n \in \mathbb{Z}$, οι οποίοι είναι αντιστρέψιμοι με αντίστροφο $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$. Από το μέρος (4) έπεται ότι $A \sim A^n, \forall n \in \mathbb{Z}$. ■

Άσκηση 21. Έστω $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$.

- (1) Ναδειχθεί ότι:

$$A \sim_\gamma B \implies A \sim B$$

Ισχύει η αντίστροφη συνεπαγωγή;

- (2) Ναδειχθεί ότι:

$$A \sim_\sigma B \implies A \sim B$$

Ισχύει η αντίστροφη συνεπαγωγή;

Λύση. (1) Έστω ότι $A \sim_\gamma B$. Τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας P έτσι ώστε $PA = B$. Τότε θέτοντας $Q = I_n$, θα έχουμε $PAQ = PAI_n = PA = B$. Άρα $A \sim B$, και επομένως

$$A \sim_\gamma B \implies A \sim B$$

Η αντίστροφη συνεπαγωγή δεν είναι αληθής. Πραγματικά, θεωρούμε τον 2×3 πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 2\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Gamma(A)$$

Επιπλέον:

$$\Gamma(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2 - 2\Sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Sigma_2 \leftrightarrow \Sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{K}(A)$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$A \sim \mathbf{K}(A)$$

Αν $A \sim_\gamma K(A)$, τότε υπάρχει αντιστρέψιμος 2×2 πίνακας $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ έτσι ώστε: $PA = K(A)$.

Όμως

$$PA = K(A) \implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a & 2a & a+b \\ c & 2c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

δηλαδή καταλήγουμε στο άτοπο $a = 1$ και $2a = 0$. Άρα ο πίνακας A δεν είναι γ -ισοδύναμος με τον $K(A)$. Επομένως

$$A \sim B \not\Rightarrow A \sim_\gamma B$$

(2) Έστω ότι $A \sim_\sigma B$. Τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας Q έτσι ώστε $AQ = B$. Τότε θέτοντας $P = I_m$, θα έχουμε $PAQ = I_m AQ = AQ = B$. Άρα $A \sim B$, και επομένως

$$A \sim_\sigma B \implies A \sim B$$

Η αντίστροφη συνεπαγωγή δεν είναι αληθής. Πραγματικά, θεωρούμε τον 3×2 πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1 - \Sigma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = K(B)$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$B \sim K(B)$$

Αν $B \sim_\sigma K(B)$, τότε υπάρχει αντιστρέψιμος 2×2 πίνακας $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ έτσι ώστε: $BQ = K(B)$.

Όμως

$$BQ = K(B) \implies \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 2b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

δηλαδή καταλήγουμε στο άτοπο $a = 1$ και $2a = 0$. Άρα ο πίνακας B δεν είναι σ -ισοδύναμος με τον $K(B)$. Επομένως γενικά

$$A \sim B \not\Rightarrow A \sim_\sigma B$$

■

Άσκηση 22. Ναδειχθεί ότι δύο $m \times n$ πίνακες είναι ισοδύναμοι αν και μόνον αν έχουν την ίδια βαθμίδα¹:

$$\forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K}) : \quad \mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(B) \implies A \sim B$$

Λύση. Γνωρίζουμε ότι κάθε πίνακας είναι ισοδύναμος με την κανονική του μορφή. Επομένως θα έχουμε:

$$A \sim K(A) \quad \text{και} \quad B \sim K(B)$$

Επειδή

$$K(A) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right) \quad \text{και} \quad r = \mathbf{r}(A)$$

και

$$K(B) = \left(\begin{array}{c|c} I_{r'} & O \\ \hline O & O \end{array} \right) \quad \text{και} \quad r' = \mathbf{r}(B)$$

¹Θα δείξουμε αργότερα με χρήση γραμμικών απεικονίσεων ότι:

$$\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(B) \iff A \sim B$$

Επειδή $\mathbf{r}(A) = r = r' = \mathbf{r}(B)$, έπεται ότι $\mathbf{K}(A) = \mathbf{K}(B) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right)$ και επομένως θα έχουμε

$$A \sim \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right) \quad \text{και} \quad B \sim \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right)$$

Επειδή η σχέση “ \sim ”, ως σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των $m \times n$ πινάκων, είναι συμμετρική και μεταβατική, θα έχουμε:

$$A \sim \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right) \quad \text{και} \quad \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right) \sim B \quad \implies \quad A \sim B \quad \blacksquare$$

Άσκηση 23. Έστω $A \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ και υποθέτουμε ότι $\mathbf{r}(A) = r$. Να δειχθεί ότι υπάρχουν πίνακες $B \in \mathbf{M}_{m \times r}(\mathbb{K})$ και $C \in \mathbf{M}_{r \times n}(\mathbb{K})$ έτσι ώστε:

$$A = BC$$

Λύση. Γνωρίζουμε ότι ο πίνακας A είναι ισοδύναμος με την κανονική του μορφή $\mathbf{K}(A) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right)$, όπου $r = \mathbf{r}(A)$. Επομένως υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας P και ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας Q έτσι ώστε $PAQ = \mathbf{K}(A) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right)$. Θεωρούμε τους πίνακες

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{m \times r}(\mathbb{K}) \quad \text{και} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{r \times n}$$

και υπολογίζουμε εύκολα ότι:

$$XY = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right)$$

Τότε θα έχουμε

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right) = XY \quad \implies \quad A = P^{-1}XYQ^{-1} = (P^{-1}X)(YQ^{-1})$$

Θέτοντας

$$B = P^{-1}X \in \mathbf{M}_{m \times r}(\mathbb{K}) \quad \text{και} \quad C = YQ^{-1} \in \mathbf{M}_{r \times n}(\mathbb{K})$$

θα έχουμε

$$A = BC \quad \blacksquare$$

Άσκηση 24. Να λυθεί το σύστημα:

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Λύση. Έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Εκτελούμε στοιχιώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα του (Σ) :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{4}\Gamma_3]{\Gamma_2 \rightarrow -\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_2]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + 4\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ο επαυξημένος πίνακας του γραμμικού συστήματος

$$(\Sigma') \begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

το οποίο έχει προφανή λύση την $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Επειδή το (Σ') είναι ισοδύναμο με το (Σ) , έπεται ότι το (Σ) έχει μοναδική λύση την:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1$$

■

Άσκηση 25. Να λυθεί το σύστημα:

$$(\Sigma) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 - 6x_3 = 8 \end{cases}$$

Λύση. Έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -6 & 8 \end{array} \right)$$

Εκτελούμε στοιχιώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα του (Σ) :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -6 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 4\Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & -7 & 14 & 0 \\ 0 & -7 & 14 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & -7 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow -\frac{1}{7}\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 2\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ο επαυξημένος πίνακας του γραμμικού συστήματος

$$(\Sigma') \begin{cases} x_1 + 0x_2 - x_3 = 2 \\ 0x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}$$

Για το (Σ') έχουμε: $x_2 = 2x_3$ και $x_1 = 2 - x_3$. Θέτουμε $x_3 = \lambda$ (αυθαίρετη τιμή από το σώμα \mathbb{K}), και τότε έπεται ότι το σύστημα (Σ') έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες εξαρτώνται από μια παράμετρο $\lambda \in \mathbb{K}$, τις εξής: $x_1 = 2 + \lambda$, $x_2 = 2\lambda$, $x_3 = \lambda$. Επειδή το σύστημα (Σ') είναι ισοδύναμο με το (Σ) , έπεται ότι το σύστημα (Σ) έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες εξαρτώνται από μια παράμετρο $\lambda \in \mathbb{K}$, τις εξής:

$$x_1 = 2 + \lambda, \quad x_2 = 2\lambda, \quad x_3 = \lambda, \quad (\lambda \in \mathbb{K})$$

■

Άσκηση 26. Να λυθεί το σύστημα:

$$(\Sigma) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + -7x_4 = 0 \end{cases}$$

Λύση. Έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 8 & 12 & -9 & 8 \\ 4 & 6 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 9 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 12 & -9 & 8 & 0 \\ 4 & 6 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 9 & -7 & 0 \end{array} \right)$$

Επειδή ο πίνακας των σταθερών όρων είναι ο μηδενικός εργαζόμαστε Εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του πίνακα A των συντελεστών (Σ) :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 8 & 12 & -9 & 8 \\ 4 & 6 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 9 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 2\Gamma_1, \Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 4\Gamma_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 10 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 + 2\Gamma_2]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow -\frac{1}{5}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + \frac{1}{2}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ο επαυξημένος του συστήματος

$$(\Sigma') \begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + 0x_3 + \frac{1}{10}x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 - \frac{4}{5}x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \end{cases}$$

Για το (Σ') έχουμε: $x_3 = \frac{4}{5}x_4$ και $x_1 = -\frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{10}x_4$. Θέτοντας

$$x_2 = \lambda \quad \text{και} \quad x_4 = \mu \quad (\text{αυθαίρετες τιμές από το σώμα } \mathbb{K})$$

έπεται ότι το (Σ') έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες εξαρτώνται από δύο παραμέτρους $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $x_1 = -\frac{3}{2}\lambda - \frac{1}{10}\mu$, $x_2 = \lambda$, $x_3 = \frac{4}{5}\mu$, $x_4 = \mu$. Επειδή το σύστημα (Σ) είναι ισοδύναμο με το (Σ') , έπεται ότι το (Σ) έχει άπειρες λύσεις οι οποίες εξαρτώνται από δύο παραμέτρους $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, τις εξής:

$$x_1 = -\frac{3}{2}\lambda - \frac{1}{10}\mu, \quad x_2 = \lambda, \quad x_3 = \frac{4}{5}\mu, \quad x_4 = \mu \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{K})$$

■

Άσκηση 27. Να λυθεί το σύστημα:

$$(\Sigma) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = \lambda \\ -4x_1 + 4x_2 - 4x_3 - x_4 + x_5 = -\lambda \end{cases}$$

Λύση. Έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -4 & 4 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & \lambda \\ -4 & 4 & -4 & -1 & 1 & -\lambda \end{array} \right)$$

Εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα του (Σ) :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & \lambda \\ -4 & 4 & -4 & -1 & 1 & -\lambda \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \Gamma_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \lambda \\ -4 & 4 & -4 & -1 & 1 & -\lambda \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 + 4\Gamma_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & -\lambda \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 + \Gamma_2]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -\lambda \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 + 2\Gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array} \right)$$

και άρα καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \\ x_5 = \frac{\lambda}{2} \\ 0 = \lambda \end{cases}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- (1) Αν $\lambda \neq 0$ τότε έπεται ότι το σύστημα (Σ) είναι αδύνατο.
- (2) Αν $\lambda = 0$ τότε έχουμε $x_5 = 0$ και άρα $x_4 = 0$. Ακόμα, από την πρώτη εξίσωση έχουμε $x_1 = x_2 - x_3$. Θέτουμε $x_2 = \kappa$ και $x_3 = \nu$ με $\kappa, \nu \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε τη γενική λύση:

$$\begin{cases} x_1 = \kappa - \nu \\ x_2 = \kappa \\ x_3 = \nu \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \quad \kappa, \nu \in \mathbb{R}.$$

■

Άσκηση 28. Να λυθεί το σύστημα:

$$(\Sigma) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 - 2\lambda \\ x_2 + x_3 = -2\lambda \\ x_4 - x_5 = 1 - \lambda \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

Λύση. Έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1-2\lambda \\ -2\lambda \\ 1-\lambda \\ 2-2\lambda \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & 1-2\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 2-2\lambda \end{array} \right)$$

Εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα του (Σ) :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & 1-2\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 2-2\lambda \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & 1-2\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - \Gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & 1-2\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\lambda \end{array} \right)$$

και άρα καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 1-2\lambda \\ + x_2 + x_3 = -2\lambda \\ + x_4 - x_5 = 1-\lambda \\ = 1+\lambda \end{cases}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- (1) Αν $\lambda \neq -1$ τότε το σύστημα (Σ) είναι αδύνατο.
- (2) Για $\lambda = -1$ έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 3 \\ + x_2 + x_3 = 2 \\ + x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$

Συνεπώς έχουμε ότι $x_2 = 2 - x_3$, $x_4 = 2 + x_5$ και αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση βρίσκουμε $x_1 = -1 - x_3 + x_5$. Θέτουμε $x_3 = \nu$ και $x_5 = \kappa$ με $\kappa, \nu \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε τη γενική λύση:

$$\begin{cases} x_1 = -1 - \nu + \kappa \\ x_2 = 2 - \nu \\ x_3 = \nu \\ x_4 = 2 + \kappa \\ x_5 = \nu \end{cases} \quad \kappa, \nu \in \mathbb{R}.$$

■

Άσκηση 29. Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να λυθεί το ακόλουθο σύστημα:

$$(\Sigma) : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 + 0x_7 = 0 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 - x_6 + 0x_7 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 - 2x_6 + x_7 = 1 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 = -\lambda \end{cases}$$

Λύση. Ο πίνακας συντελεστών και ο πίνακας σταθερών όρων του συστήματος (Σ) είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -\lambda \end{pmatrix}$$

Εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στον επαυξημένο πίνακα $(A|B)$:

$$\begin{aligned} (A|B) &= \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - \Gamma_1]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -\lambda \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 + \Gamma_2]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_2} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \lambda \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_2} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \lambda \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ο επαυξημένος πίνακας ενός συστήματος (Σ') :

$$(\Sigma') : \begin{cases} x_1 + 0x_2 + x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 = -1 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 - x_6 + 0x_7 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - 0x_6 + x_7 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 1 - \lambda \end{cases}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το (Σ) .

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- (1) Αν $\lambda \neq 1$ τότε $1 - \lambda \neq 0$, ο τελευταίος πίνακας τότε η τελευταία εξίσωση του (Σ') είναι αδύνατη διότι θα έχουμε $0 = (1 - \lambda) \neq 0$. Επομένως το (Σ') και άρα και το (Σ) είναι αδύνατο.
- (2) Έστω $\lambda = 1$. Τότε το (Σ') είναι της μορφής (παραλείπουμε τους άγνωστους με μηδενικό συντελεστή):

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_2 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_7 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = -1 - x_3 - x_4 \\ x_2 = 1 - x_5 + x_6 \\ x_7 = 0 \end{cases}$$

Θέτουμε

$$x_3 = \kappa, \quad x_4 = \lambda, \quad x_5 = \mu, \quad x_6 = \nu$$

να είναι αυθαίρετες τιμές από το σώμα \mathbb{K} , έπεται ότι το σύστημα (Σ') , άρα και το ισοδύναμό του σύστημα (Σ) , έχει άπειρες λύσεις οι οποίες εξαρτώνται από 4 παραμέτρους:

Επομένως η γενική λύση του συστήματος (Σ) είναι

$$\begin{cases} x_1 = -1 - \kappa - \lambda \\ x_2 = 1 - \mu + \nu \\ x_3 = \kappa \\ x_4 = \lambda \\ x_5 = \mu \\ x_6 = \nu \\ x_7 = 0 \end{cases} \quad \kappa, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

■

Άσκηση 30. Να λυθεί το σύστημα ($\lambda \in \mathbb{R}$):

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{cases}$$

Λύση. Έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \end{array} \right)$$

Εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα του (Σ):

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 & \lambda - 3 \end{array} \right)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(1) Αν $\lambda + 1 = 0$, δηλαδή $\lambda = -1$, τότε ο τελευταίος πίνακας είναι της μορφής:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right)$$

ο οποίος είναι ο επαυξημένος ενός συστήματος (Σ') ισοδύναμου με το (Σ). Επειδή προφανώς το (Σ') είναι αδύνατο (η τελευταία εξίσωση του είναι της μορφής $0x + 0y + 0z = -4$), έπεται ότι το (Σ) είναι αδύνατο.

(2) Αν $\lambda + 1 \neq 0$, δηλαδή $\lambda \neq -1$, τότε εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του τελευταίου πίνακα:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 & \lambda - 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{\lambda+1}\Gamma_3]{\Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{\lambda-1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\lambda-3}{\lambda+1} \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_2]{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + \Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{\lambda+1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{\lambda-1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{-\lambda+1}{2} & \frac{2(\lambda-1)}{\lambda+1} \end{array} \right)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α) Αν $-\frac{\lambda+1}{2} = 0$, δηλαδή αν $\lambda = 1$, τότε ο τελευταίος πίνακας είναι της μορφής

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

και είναι ο επαυξημένος πίνακας του γραμμικού συστήματος

$$(\Sigma'') \quad \begin{cases} x + 0y + z = 2 \\ 0x + y + 0z = -1 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το σύστημα (Σ). Θέτοντας $z = \kappa$ να είναι μια αυθαίρετη τιμή από το σώμα \mathbb{K} , έπεται ότι το (Σ'') έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες εξαρτώνται από μια παράμετρο $\kappa \in \mathbb{K}$: $x = 2 - \kappa$, $y = -1$, $z = \kappa$. Επειδή το (Σ'') είναι ισοδύναμο με το (Σ), έπεται ότι το (Σ) έχει άπειρες λύσεις οι οποίες εξαρτώνται από μια παράμετρο, τις εξής:

$$x = 2 - \kappa, \quad y = -1, \quad z = \kappa \quad (\kappa \in \mathbb{K})$$

(β) Αν $-\frac{-\lambda+1}{2} \neq 0$, δηλαδή αν $\lambda \neq 1$, τότε ο τελευταίος πίνακας είναι της μορφής

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{\lambda+1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{\lambda-1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{-\lambda+1}{2} & \frac{2(\lambda-1)}{\lambda+1} \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \frac{2}{-\lambda+1}\Gamma_3]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{\lambda+1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\lambda-3}{\lambda+1} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{\lambda+1} \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \frac{\lambda+1}{2}\Gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\lambda-3}{\lambda+1} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{\lambda+1} \end{array} \right)$$

ο τελευταίος πίνακας είναι ο επαυξημένος πίνακας του γραμμικού συστήματος

$$(\Sigma''') \quad \begin{cases} x + 0y + z = 4 \\ 0x + y + 0z = \frac{\lambda-3}{\lambda+1} \\ 0x + 0y + z = -\frac{4}{\lambda+1} \end{cases}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το σύστημα (Σ) . Προφανώς το (Σ'') έχει μοναδική λύση την $x = 4$, $y = \frac{\lambda-3}{\lambda+1}$, $z = -\frac{4}{\lambda+1}$. Επειδή το (Σ''') είναι ισοδύναμο με το (Σ) , έπεται ότι το (Σ) έχει μοναδική λύση, την εξής:

$$x = 4, \quad y = \frac{\lambda-3}{\lambda+1}, \quad z = -\frac{4}{\lambda+1}$$

Συνοψίζοντας, δείξαμε ότι το σύστημα (Σ) είναι:

(1) Είναι **αδύνατο**, αν $\lambda = -1$.

(2) Έχει **άπειρες λύσεις**, αν: $\lambda \neq -1$ και $\lambda = 1$. Οι άπειρες λύσεις του (Σ) εξαρτώνται από μια παράμετρο και είναι οι εξής:

$$x = 2 - \kappa, \quad y = -1, \quad z = \kappa \quad (\kappa \in \mathbb{K})$$

(3) Έχει **μοναδική λύση**, αν $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$. Η μοναδική λύση του (Σ) είναι η εξής:

$$x = 4, \quad y = \frac{\lambda-3}{\lambda+1}, \quad z = -\frac{4}{\lambda+1}$$

■

Άσκηση 31. Αν $a, b \in \mathbb{R}$, να ληθεί το σύστημα:

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} 2x + y + z = -6a \\ 2x + y + (b+1)z = 4 \\ bx + 3y + 2z = 3a \end{cases}$$

Λύση. Έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & (b+1) \\ b & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -6a \\ 4 \\ 3a \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -6a \\ 2 & 1 & (b+1) & 4 \\ b & 3 & 2 & 3a \end{array} \right)$$

Εκτελούμε στοιχιώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα του (Σ) :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -6a \\ 2 & 1 & (b+1) & 4 \\ b & 3 & 2 & 3a \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -6a \\ 0 & 0 & b & 4+6a \\ b & 3 & 2 & 3a \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & 0 & b & 4+6a \\ b & 3 & 2 & 3a \end{array} \right)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(1) $b = 0$. Τότε ο τελευταίος πίνακας είναι ο

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 4+6a \\ 0 & 3 & 2 & 3a \end{array} \right)$$

ο οποίος είναι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$$(\Sigma') \begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = -3a \\ 0x + 0y + 0z = 4 + 6a \\ 0x + 3y + 2z = 3a \end{cases}$$

Από το οποίο βλέπουμε ότι:

(α) Αν $4 + 6a \neq 0$, δηλαδή αν $a \neq -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$, τότε το (Σ') είναι αδύνατο. Επειδή το (Σ) είναι ισοδύναμο με το (Σ') , έπεται ότι αν $a \neq -\frac{2}{3}$, τότε το (Σ) είναι αδύνατο.

(β) Αν $4 + 6a = 0$, δηλαδή αν $a = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$, τότε ο επαυξημένος πίνακας του (Σ') είναι

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{3}\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \frac{1}{2}\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$$(\Sigma'') \begin{cases} x + 0y + \frac{1}{6}z = \frac{7}{2} \\ 0x + y + \frac{2}{3}z = -\frac{2}{3} \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Από το οποίο βλέπουμε ότι: $y = -\frac{2}{3}(1 + z)$ και $x = \frac{1}{7} - \frac{1}{6}z$. Θέτοντας $z = \lambda$, (αυθαίρετη τιμή από το σώμα \mathbb{K}), έπεται ότι το σύστημα (Σ'') έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες εξαρτώνται από μια παράμετρο $\lambda \in \mathbb{K}$: $x = \frac{1}{7} - \frac{1}{6}\lambda$, $y = -\frac{2}{3}(1 + \lambda)$, $z = \lambda$. Επειδή το (Σ'') είναι ισοδύναμο με το (Σ') και το (Σ') είναι ισοδύναμο με το (Σ) , έπεται ότι το (Σ) έχει άπειρες λύσεις οι οποίες εξαρτώνται από μια παράμετρο $\lambda \in \mathbb{K}$, τις εξής:

$$x = \frac{1}{7} - \frac{1}{6}\lambda, \quad y = -\frac{2}{3}(1 + \lambda), \quad z = \lambda, \quad (\lambda \in \mathbb{K})$$

(2) Αν $b \neq 0$. Τότε:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & 0 & b & 4 + 6a \\ b & 3 & 2 & 3a \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ b & 3 & 2 & 3a \\ 0 & 0 & b & 4 + 6a \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{b}\Gamma_3]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - b\Gamma_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & 3 - \frac{b}{2} & 2 - \frac{b}{2} & 3a + 3ab \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4+6a}{b} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & \frac{6-b}{2} & \frac{4-b}{2} & 3a + 3ab \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4+6a}{b} \end{array} \right)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α) Αν $b = 6$, τότε έχουμε τον πίνακα:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & 0 & -1 & 21a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2+69a}{3} \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & 0 & -1 & 21a \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2+69a}{3} \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow -\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & 0 & 1 & -21a \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2+69a}{3} \end{array} \right)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(i) Αν $\frac{2+69a}{3} \neq 0$, δηλαδή αν $a \neq -\frac{2}{69}$, τότε το (Σ) είναι αδύνατο, καθώς ο παραπάνω πίνακας είναι ο επαυξημένος πίνακας ενός συστήματος το οποίο είναι ισοδύναμο με το (Σ) και είναι προφανώς αδύνατο.

(ii) Αν $\frac{2+69a}{3} = 0$, δηλαδή αν $a = -\frac{2}{69}$, τότε ο τελευταίος πίνακας είναι:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3 \cdot \left(-\frac{2}{69}\right) \\ 0 & 0 & 1 & -21 \cdot \left(-\frac{2}{69}\right) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2+69a}{3} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{23} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{14}{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ο πίνακας του επαυξημένου συστήματος

$$(\Sigma''') \begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = \frac{2}{23} \\ 0x + 0y + z = -\frac{14}{23} \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το (Σ) και το οποίο έχει άπειρες λύσεις: $z = -\frac{14}{23}$, και $x = -\frac{1}{2}\lambda + \frac{2}{23}$, όπου λ είναι μια αυθαίρετη παράμετρος από το σώμα \mathbb{K} . Επομένως το (Σ) έχει άπειρες λύσεις οι οποίες εξαρτώνται από μια παράμετρο $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$x = -\frac{1}{2}\lambda + \frac{2}{23}, \quad y = \lambda, \quad z = -\frac{14}{23}, \quad (\lambda \in \mathbb{K})$$

(β) Αν $b \neq 6$, τότε:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & \frac{6-b}{2} & \frac{4-b}{2} & 3a+3ab \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4+6a}{b} \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \frac{2}{6-b}\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & 1 & \frac{4-b}{6-b} & \frac{6a+6ab}{6-b} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4+6a}{b} \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \frac{1}{2}\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{6-b} & -\frac{42a}{6-b} \\ 0 & 1 & \frac{4-b}{6-b} & \frac{6a+6ab}{6-b} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4+6a}{b} \end{array} \right)$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ο πίνακας του επαυξημένου συστήματος

$$(\Sigma''''') \begin{cases} x + 0y + \frac{1}{6-b}z = -\frac{42a}{6-b} \\ 0x + y + \frac{4-b}{6-b}z = \frac{6a+6ab}{6-b} \\ 0x + 0y + z = \frac{4+6a}{b} \end{cases}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το (Σ) και έχει μοναδική λύση: $z = \frac{4+6a}{b}$, $y = \frac{6a+6ab}{6-b} - \frac{4-b}{6-b} \cdot \frac{4+6a}{b} = \frac{12ab+6ab^2+4b-24a-16}{b(6-b)}$, $x = -\frac{42a}{6-b} - \frac{1}{6-b} \cdot \frac{4+6a}{b} = \frac{-42ab-4-6a}{b(6-b)}$. Επειδή το (Σ''''') είναι ισοδύναμο με το (Σ) , έπεται ότι το (Σ) έχει μοναδική λύση

$$x = -\frac{42ab+6a+4}{b(6-b)}, \quad y = \frac{12ab+6ab^2+4b-24a-16}{b(6-b)}, \quad z = \frac{4+6a}{b}$$

Συνοψίζοντας, δείξαμε ότι το σύστημα (Σ) είναι:

(1) Είναι **αδύνατο**, αν:

$$\begin{cases} b = 0 \\ \text{και} \\ a \neq -\frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} b = 6 \\ \text{και} \\ a \neq -\frac{2}{69} \end{cases}$$

(2) Έχει **μοναδική λύση**, αν: $b \neq 0$ και $b \neq 6$. Τότε η μοναδική λύση του (Σ) είναι:

$$x = -\frac{42ab+6a+4}{b(6-b)}, \quad y = \frac{12ab+6ab^2+4b-24a-16}{b(6-b)}, \quad z = \frac{4+6a}{b}$$

(3) Έχει **άπειρες λύσεις**, αν:

(α) Είτε $b = 0$ και $a = -\frac{2}{3}$. Τότε οι λύσεις του (Σ) είναι της μορφής:

$$x = \frac{1}{7} - \frac{1}{6}\lambda, \quad y = -\frac{2}{3}(1+\lambda), \quad z = \lambda, \quad (\lambda \in \mathbb{K})$$

(β) Είτε $b = 6$ και $a = -\frac{2}{69}$. Τότε οι λύσεις του (Σ) είναι της μορφής:

$$x = -\frac{1}{2}\lambda + \frac{2}{23}, \quad y = \lambda, \quad z = -\frac{14}{23}, \quad (\lambda \in \mathbb{K})$$

■

Άσκηση 32. Να βρεθεί η ισχυρά γ -κλιμακωτή και η κανονική μορφή του πίνακα

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 4 & 2 \\ 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 1 \\ 5 & 8 & 9 & 10 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Ακολουθώς να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$AX = B, \quad \text{όπου} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 4 \\ 4 & 7 & 10 & 13 & 16 \\ 5 & 8 & 9 & 10 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Λύση. Για την ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή του πίνακα C , θα έχουμε

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 4 & 2 \\ 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 1 \\ 5 & 8 & 9 & 10 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1, \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 3\Gamma_1 \\ \Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - 4\Gamma_1, \Gamma_5 \rightarrow \Gamma_5 - 5\Gamma_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 & -11 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & -2 & -6 & -10 & -22 & -2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 + \Gamma_2 \\ \Gamma_5 \rightarrow \Gamma_5 + 2\Gamma_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 & -11 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\Gamma_2 \rightarrow -\Gamma_2 \\ \Gamma_3 \rightarrow -\Gamma_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 2\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -10 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Προφανώς ο τελευταίος πίνακας είναι η ισχυρή Γ -κλιμακωτή μορφή του πίνακα C :

$$\Gamma(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -10 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Για την κανονική μορφή του πίνακα C , θα έχουμε:

$$\Gamma(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -10 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\Sigma_5 \rightarrow \Sigma_5 - 4\Sigma_1 \\ \Sigma_6 \rightarrow \Sigma_6 + 7\Sigma_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -10 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Sigma_5 \rightarrow \Sigma_5 + 10\Sigma_2, \Sigma_6 \rightarrow \Sigma_6 - 7\Sigma_2]{\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_4 + \Sigma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Sigma_5 \rightarrow \Sigma_5 - 7\Sigma_3, \Sigma_6 \rightarrow \Sigma_6 + 2\Sigma_3]{\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_4 - 2\Sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Προφανώς ο τελευταίος πίνακας είναι η κανονική μορφή του πίνακα C :

$$K(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Για την επίλυση του γραμμικού συστήματος (Σ) : $AQ = B$, παρατηρούμε ότι ο πεαυξημένος πίνακας του συστήματος (Σ) είναι ο πίνακας C :

$$(A|B) = C$$

Επομένως θα έχουμε ότι η ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή του $(A|B)$ είναι ο πίνακας

$$\Gamma(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -10 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ο οποίος είναι ομειπωξημένος πίνακας ενός συστήματος (Σ') ισοδύναμου με το αρχικό:

$$(\Sigma') \begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 4x_5 = -7 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 + -x_4 + -10x_5 = 7 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 + 2x_4 + 7x_5 = -2 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0 \end{cases}$$

δηλαδή

$$(\Sigma') \begin{cases} x_1 + 4x_5 = -7 \\ x_2 - x_4 - 10x_5 = 7 \\ x_3 + 2x_4 + 7x_5 = -2 \end{cases}$$

και το οποίο έχει την ακόλουθη γενική λύση: θέτουμε

$$x_4 = r \quad \text{και} \quad x_5 = s$$

να είναι αυθαίρετα στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} και τότε:

$$\begin{cases} x_1 = -7 - 4s \\ x_2 = 7 + r + 10s \\ x_3 = -2 - 2r - 7s \\ x_4 = r \\ x_5 = s \end{cases} \quad r, s \in \mathbb{K}$$

Η παραπάνω είναι και η γενική λύση του αρχικού συστήματος (Σ) . Ιδιαίτερα προκύπτει ότι το (Σ) έχει άπειρες λύσεις οι οποίες εξαρτώνται από δύο αυθαίρετες παραμέτρους. ■

Άσκηση 33. Θεωρούμε τον 4×5 πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί ένας αντιστρέψιμος 4×4 πίνακας P και ένας αντιστρέψιμος 5×5 πίνακας Q έτσι ώστε ο πίνακας PAQ να είναι ισχυρά γ -κλιμακωτός και ισχυρά σ -κλιμακωτός, δηλαδή ο πίνακας PAQ είναι η κανονική μορφή του πίνακα A .

Ακολουθώντας να ληθεί το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$(\Sigma) \quad AX = O, \quad \text{όπου} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Λύση. **1.** Για την ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή του πίνακα A , θα έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_2} \\ &\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 4\Gamma_1, \Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - 5\Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 7 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 7 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 14 & -2 & 4 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - 2\Gamma_2]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_2} \\ &\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 7 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_4]{\Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{7}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + 2\Gamma_2} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{9}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \frac{10}{7}\Gamma_3]{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + \frac{1}{7}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{9}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι προφανώς η ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή του πίνακα A :

$$\Gamma(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{9}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ερμηνεύοντας τις προηγηθείσες στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του A ως διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς από τα αριστερά του πίνακα A με τους αντίστοιχους στοιχειώδεις πίνακες, προκύπτει ότι θέτοντας:

$$P = E_{13} \left(\frac{1}{7} \right) E_{23} \left(\frac{10}{7} \right) E_{12}(2) E_2 \left(\frac{1}{7} \right) E_{34} E_{32}(-1) E_{42}(-2) E_{21}(-2) E_{31}(-4) E_{41}(-5) E_{12}(-1) E_{12}$$

απόκτούμε έναν 4×4 αντιστρέψιμο πίνακα P έτσι ώστε $PA = \Gamma(A)$.

2. Για την κανονική μορφή του πίνακα A , θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \Gamma(A) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{9}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_4 + \frac{3}{7}\Sigma_1]{\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_3 + \frac{9}{7}\Sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_4 - \frac{2}{7}\Sigma_2]{\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_3 + \frac{1}{7}\Sigma_2} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Sigma_3 \leftrightarrow \Sigma_5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι προφανώς η κανονική μορφή του πίνακα A :

$$K(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ερμηνεύοντας τις προηγούμενες στοιχειώδεις πράξεις στις στήλες του $\Gamma(A)$ ως διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς από τα δεξιά του πίνακα A με τους αντίστοιχους στοιχειώδεις πίνακες, προκύπτει ότι θέτοντας:

$$Q = {}^t E_{31} \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} {}^t E_{41} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} {}^t E_{32} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} {}^t E_{42} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} {}^t E_{35}$$

απόκτούμε έναν 5×5 αντιστρέψιμο πίνακα Q έτσι ώστε $\Gamma(A)Q = K(A)$, και τότε θα έχουμε: $PAQ = K(A)$.

3. Για το ομογενές γραμμικό σύστημα (Σ) : $AQ = O$, θα έχουμε το ισοδύναμο ομογενές γραμμικό σύστημα $\Gamma(A)X = O$, δηλαδή:

$$(\Sigma') \quad \begin{cases} x_1 - \frac{9}{7}x_3 - \frac{3}{7}x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

και το οποίο έχει την ακόλουθη γενική λύση: θέτουμε

$$x_3 = r \quad \text{και} \quad x_4 = s$$

να είναι αυθαίρετα στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} και τότε:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{7}r + \frac{3}{7}s \\ x_2 = \frac{1}{7}r - \frac{2}{7}s \\ x_3 = r \\ x_4 = s \\ x_5 = 0 \end{cases} \quad r, s \in \mathbb{K}$$

Η παραπάνω είναι και η γενική λύση του αρχικού συστήματος (Σ) . Ιδιαίτερα προκύπτει ότι το (Σ) έχει άπειρες λύσεις οι οποίες εξαρτώνται από δύο αυθαίρετες παραμέτρους. ■