ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

$\boxed{\text{ΤΜΗΜΑ } \mathbf{B'}}$ (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ **4**

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:
http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI/LAI2019/LAI2019.html

Παρασκευή 22 Νοεμβρίου 2019

Άσκηση 1. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι:*

$$\kappa\vec{x} + \lambda\vec{y} = \lambda\vec{x} + \kappa\vec{y} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} \kappa = \lambda \\ \quad \text{ή} \\ \vec{x} = \vec{y} \end{cases}$$

Λύση. Θα έχουμε[1]:

$$\kappa\vec{x} + \lambda\vec{y} = \lambda\vec{x} + \kappa\vec{y} \quad\Longrightarrow\quad \kappa\vec{x} + \lambda\vec{y} - \lambda\vec{x} - \kappa\vec{y} = \vec{0} \quad\Longrightarrow\quad (\kappa-\lambda)\vec{x} - (\kappa-\lambda)\vec{y} = \vec{0} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad (\kappa-\lambda)(\vec{x}-\vec{y}) = \vec{0} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} \kappa - \lambda = 0 \\ \quad \text{ή} \\ \vec{x} - \vec{y} = \vec{0} \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} \kappa = \lambda \\ \quad \text{ή} \\ \vec{x} = \vec{y} \end{cases}$$

■

Άσκηση 2. *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ μια τριάδα η οποία αποτελείται από ένα σύνολο $\mathcal{E}$, μια εσωτερική πράξη «πρόσθεσης» $+$ και μια εξωτερική πράξη «βαθμωτού πολλαπλασιασμού» του $\mathbb{K}$ επί του $\mathcal{E}$:*

$$+\colon \mathcal{E}\times\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (\vec{x},\vec{y}) \longmapsto \vec{x}+\vec{y} \qquad \text{και} \qquad \cdot\colon \mathbb{K}\times\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (k,\vec{x}) \longmapsto k\cdot\vec{x}$$

Να δειχθεί ότι η τριάδα $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$ αν και μόνο αν η τριάδα $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ ικανοποιεί τα αξιώματα (1)-(7) ενός διανυσματικού χώρου υπεράνω του $\mathbb{K}$, και το ακόλουθο αξίωμα

$$(8') \quad \forall k \in \mathbb{K},\ \forall \vec{x} \in \mathcal{E}\colon\ k\cdot\vec{x} = \vec{0} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} k = 0 \\ \quad \text{ή} \\ \vec{x} = \vec{0} \end{cases}$$

Λύση. Αρκεί να δείξουμε ότι, γνωρίζοντας ότι ισχύουν τα αξιώματα (1)-(7), ισχύει, $\forall k \in \mathbb{K}$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$1\cdot\vec{x} = \vec{x} \quad\Longleftrightarrow\quad k\cdot\vec{x} = \vec{0} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} k = 0 \\ \quad \text{ή} \\ \vec{x} = \vec{0} \end{cases}$$

[1] Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, και $\kappa \in \mathbb{K}$ και $\vec{x} \in \mathcal{E}$, τότε:

$$\kappa\cdot\vec{x} = \vec{0} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} \kappa = 0 \\ \quad \text{ή} \\ \vec{x} = \vec{0} \end{cases}$$

«$\Longrightarrow$» Η κατεύθυνση αυτή είναι γνωστή από τη θεωρία. Χάριν ευκολίας δίνουμε την απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $k \neq 0$. Τότε υπάρχει ο αριθμός $k^{-1} \in \mathbb{K}$ και τότε, χρησιμοποιώντας τα αξιώματα και γνωστές ιδιότητες διανυσματικών χώρων, θα έχουμε:

$$k \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad k^{-1} \cdot (k \cdot \vec{x}) = k^{-1} \cdot \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad (k^{-1} \cdot k) \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad 1 \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} = \vec{0}$$

Άρα είτε $k = 0$ είτε $\vec{x} = \vec{0}$.

«$\Longleftarrow$» Υποθέτουμε ότι ισχύουν τα αξιώματα (1)-(7) και το αξίωμα (8′). Θεωρούμε το διάνυσμα $1 \cdot \vec{x} - \vec{x}$ και θα δείξουμε ότι είναι το μηδενικό διάνυσμα. Χρησιμοποιώντας τα αξιώματα (1)-(7), θα έχουμε:

$$1 \cdot (1 \cdot \vec{x} - \vec{x}) = 1 \cdot (1 \cdot \vec{x} + (-\vec{x})) = 1 \cdot (1 \cdot \vec{x}) + 1 \cdot (-\vec{x}) = (1 \cdot 1) \cdot \vec{x} + 1 \cdot (-\vec{x}) =$$

$$= 1 \cdot \vec{x} + 1 \cdot (-\vec{x}) = 1 \cdot (\vec{x} + (-\vec{x})) = 1 \cdot \vec{0} \qquad (*)$$

Όμως $1 \cdot \vec{0} = 1 \cdot (\vec{0} + \vec{0}) = 1 \cdot \vec{0} + 1 \cdot \vec{0}$ και άρα $\vec{0} + 1 \cdot \vec{0} = 1 \cdot \vec{0} + 1 \cdot \vec{0}$. Η τελευταία σχέση δίνει $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$. Τότε από το αξίωμα (8′) και τη σχέση (*) προκύπτει, επειδή $1 \neq 0$, ότι:

$$1 \cdot (1 \cdot \vec{x} - \vec{x}) = 1 \cdot \vec{0} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad 1 \cdot \vec{x} - \vec{x} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

δηλαδή ισχύει το αξίωμα (8) και επομένως η τριάδα $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. ■

Άσκηση 3. *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ μια τριάδα η οποία αποτελείται από ένα σύνολο $\mathcal{E}$, μια εσωτερική πράξη «πρόσθεσης» $+$ και μια εξωτερική πράξη «βαθμωτού πολλαπλασιασμού» του $\mathbb{K}$ επί του $\mathcal{E}$:*

$$+ \colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \vec{x} + \vec{y} \quad \textit{και} \quad \cdot \colon \mathbb{K} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (k, \vec{x}) \longmapsto k \cdot \vec{x}$$

Υποθέτουμε ότι η τριάδα $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ ικανοποιεί όλα τα αξιώματα ενός διανυσματικού χώρου υπεράνω του $\mathbb{K}$, εκτός πιθανόν από το Αξίωμα (2), δηλαδή δεν απαιτούμε να ισχύει ότι, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.

Να δειχθεί ότι ισχύει το Αξίωμα (2) και άρα η τριάδα $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$.

Λύση. Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$. Θα εφαρμόσουμε την επιμεριστικές ιδιότητες (Αξιώματα (5) και (6)) για να υπολογίσουμε με δύο τρόπους το διάνυσμα

$$(1+1) \cdot (\vec{x} + \vec{y})$$

(1) Χρησιμοποιώντας τα αξιώματα ενός διανυσματικού χώρου υπεράνω του $\mathbb{K}$, εκτός από το αξίωμα (2), θα έχουμε:

$$(1+1) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = (1+1) \cdot \vec{x} + (1+1) \cdot \vec{y} = 1 \cdot \vec{x} + 1 \cdot \vec{x} + 1 \cdot \vec{y} + 1 \cdot \vec{y} = \vec{x} + \vec{x} + \vec{y} + \vec{y}$$

(2) Παρόμοια, χρησιμοποιώντας τα αξιώματα ενός διανυσματικού χώρου υπεράνω του $\mathbb{K}$, εκτός από το αξίωμα (2), θα έχουμε:

$$(1+1) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = 1 \cdot (\vec{x} + \vec{y}) + 1 \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x} + \vec{y} + \vec{x} + \vec{y}$$

Από τα (1) και (2), έπεται ότι $\vec{x} + \vec{x} + \vec{y} + \vec{y} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{x} + \vec{y}$. Προσθέτοντας πρώτα από τα αριστερά το στοιχείο $-\vec{x}$ και ακολούθως προσθέτοντας το στοιχείο $-\vec{y}$ από τα δεξιά, θα έχουμε:

$$\vec{x} + \vec{x} + \vec{y} + \vec{y} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{x} + \vec{y} \quad \Longrightarrow \quad (-\vec{x}) + \vec{x} + \vec{x} + \vec{y} + \vec{y} + (-\vec{y}) = (\vec{x}) + \vec{x} + \vec{y} + \vec{x} + \vec{y} + (-\vec{y}) \quad \Longrightarrow$$

$$(-\vec{x} + \vec{x}) + \vec{x} + \vec{y} + (\vec{y} + (-\vec{y})) = (\vec{x} + \vec{x}) + \vec{y} + \vec{x} + (\vec{y} + (-\vec{y}) \quad \Longrightarrow \quad \vec{0} + \vec{x} + \vec{y} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{y} + \vec{x} + \vec{0} \quad \Longrightarrow$$

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$$

Επομένως, ισχύει και το αξίωμα (2), δηλαδή $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$, και επομένως η τριάδα $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$. ■

Άσκηση 4. *Να δειχθεί ότι το Αξίωμα (8) ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$, δηλαδή ότι, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$: $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$, δεν προκύπτει από τα υπόλοιπα αξιώματα.*

Λύση. Για να δείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα σώμα $\mathbb{K}$ και μια τριάδα $(\mathcal{E}, +, \cdot)$, η οποία αποτελείται από ένα σύνολο $\mathcal{E}$, μια εσωτερική πράξη «πρόσθεσης» $+$ και μια εξωτερική πράξη «βαθμωτού πολλαπλασιασμού» του $\mathbb{K}$ επί του $\mathcal{E}$:

$$+ \colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \vec{x} + \vec{y} \quad \text{και} \quad \cdot \colon \mathbb{K} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (k, \vec{x}) \longmapsto k \cdot \vec{x}$$

έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα αξιώματα (1) - (7) αλλά να μην ικανοποιείται το αξίωμα (8).

Θέτουμε $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ και ορίζουμε πράξεις

$$+ \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (\vec{x} = (a, b), \vec{y} = (c, d)) \longmapsto \vec{x} + \vec{y} := (a + c, b + d)$$

$$\cdot' \colon \mathbb{K} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (k, \vec{x} = (a, b)) \longmapsto k \cdot' \vec{x} := (ka, 0)$$

Για την τριάδα $(\mathbb{R}^2, +, \cdot')$, προφανώς το αξίωμα (8) δεν ικανοποιείται διότι για παράδειγμα αν $\vec{x} = (1, 1)$, τότε έχουμε: $1 \cdot' (1, 1) = (1, 0) \neq (1, 1)$.

Δείχνουμε ότι για την τριάδα $(\mathbb{R}^2, +, \cdot')$, ικανοποιούνται τα υπόλοιπα αξιώματα (1) - (7). Υπενθυμίζουμε ότι η τριάδα $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, όπου $k \cdot (a, b) = (ka, kb)$ είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$.

(1) Επειδή η πρόσθεση «$+$» στην τριάδα $(\mathbb{R}^2, +, \cdot')$ συμπίπτει με την πρόσθεση «$+$» στην τριάδα $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ η οποία αποτελεί διανυσματικό χώρο υπεράνω του $\mathbb{R}$, έπεται ότι για την τριάδα $(\mathbb{R}^2, +, \cdot')$, ικανοποιούνται τα αξιώματα (1) - (4).

(2) Έστω $k \in \mathbb{R}$ και $\vec{x} = (a, b)$ και $\vec{y} = (c, d)$ δύο στοιχεία του $\mathbb{R}^2$. Τότε:

$$k \cdot' (\vec{x} + \vec{y}) = k \cdot' ((a, b) + (c, d)) = k \cdot' (a + c, b + d) = (k(a + c), 0) = (ka + kc, 0) = (ka, 0) + (kc, 0) =$$
$$= k \cdot (a, b) + k \cdot' (c, d) = k \cdot' \vec{x} + k \cdot' \vec{y}$$

(3) Έστω $k, l \in \mathbb{R}$ και $\vec{x} = (a, b)$ ένα στοιχείο του $\mathbb{R}^2$. Τότε:

$$(k + l) \cdot' \vec{x} = (k + l) \cdot' (a, b) = ((k + l)a, 0) = (ka + la, 0) = (ka, 0) + (la, 0) = k \cdot' (a, b) + l \cdot' (a, b) =$$
$$= k \cdot' \vec{x} + l \cdot' \vec{x}$$

(4) Έστω $k, l \in \mathbb{R}$ και $\vec{x} = (a, b)$ ένα στοιχείο του $\mathbb{R}^2$. Τότε:

$$k \cdot' (l \cdot' \vec{x}) = k \cdot' (l \cdot' (a, b)) = k \cdot' (la, 0) = (k(la), 0) = ((kl)a, 0) = (kl) \cdot' (a, b) = (kl) \cdot' \vec{x}$$

Τα παραπάνω δείχνουν ότι για την τριάδα $(\mathbb{R}^2, +, \cdot')$, ικανοποιούνται τα αξιώματα (1) - (7), αλλά όχι το αξίωμα (8) το οποίο δεν ικανοποιείται. Επομένως το αξίωμα (8) δεν μπορεί να προκύψει από τα υπόλοιπα αξιώματα. ■

Άσκηση 5. *Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}^3$ μαζί με τις πράξεις:*

$$\oplus \,:\, \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

και

$$\odot \,:\, \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad r \odot (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

Να εξετάσετε αν με τις παραπάνω πράξεις το σύνολο $\mathbb{R}^3$ είναι $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος. Ποιά από τα αξιώματα που διέπουν τον ορισμό του διανυσματικού χώρου ισχύουν και ποια όχι;

Λύση. Επειδή η πρόσθεση «$\oplus$» στην τριάδα $(\mathbb{R}^3, \oplus, \odot)$ συμπίπτει με την πρόσθεση «$+$» στην τριάδα $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ η οποία αποτελεί διανυσματικό χώρο υπεράνω του $\mathbb{R}$, έπεται ότι για την τριάδα $(\mathbb{R}^3, \oplus, \odot)$, ικανοποιούνται τα αξιώματα (1) - (4). Ιδιαίτερα το μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{R}^3$ είναι το διάνυσμα $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

Έστω $\vec{x}$ και $\vec{y}$ δύο στοιχεία του $\mathbb{R}^3$ και $r, s \in \mathbb{R}$. Τότε θα έχουμε:

$$r \odot (\vec{x} \oplus \vec{y}) = \vec{0} = \vec{0} \oplus \vec{0} = r \odot \vec{x} \oplus r \odot \vec{y}$$
$$(r + s) \odot \vec{x} = \vec{0} = \vec{0} \oplus \vec{0} = r \odot \vec{x} \oplus s \odot \vec{x}$$
$$r \odot (s \odot \vec{x}) = r \odot \vec{0} = \vec{0} = (rs) \odot \vec{x}$$

Επομένως ικανοποιούνται τα αξιώματα (5)-(7). Το αξίωμα (8) προφανώς δεν ικανοποιείται διότι, για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \neq \vec{0}$, έχουμε: $1 \odot \vec{x} = \vec{0} \neq \vec{x}$.

Επομένως η τριάδα $(\mathbb{R}^3, \oplus, \odot)$ **δεν είναι** διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$. ■

Άσκηση 6. *Στο σύνολο των $n \times n$ πινάκων $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$, ορίζουμε δυο πράξεις:*

$$\oplus \,:\, \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \,\times\, \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \,\longrightarrow\, \mathsf{M}_n(\mathbb{R}), \qquad A \oplus B = -(A+B)$$

και

$$\odot \,:\, \mathbb{R} \,\times\, \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \,\longrightarrow\, \mathsf{M}_n(\mathbb{R}), \qquad r \odot A = -(rA)$$

Οι πράξεις στα δεξιά μέλη των ανωτέρω ορισμών είναι οι γνωστές πράξεις πρόσθεσης πινάκων και βαθμωτού πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα. Να εξετάσετε ποια από τα αξιώματα που διέπουν τον ορισμό του διανυσματικού χώρου ισχύουν και ποια όχι.

Λύση. Θεωρούμε πίνακες $A, B, C \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ και πραγματικούς αριθμούς $r, s \in \mathbb{R}$. Θα έχουμε:

(1)

$$A \oplus (B \oplus C) = A \oplus (-(B+C)) = A \oplus (-B-C) = -\big(A + (-B-C)\big) = -(A-B-C) = -A+B+C$$

$$(A \oplus B) \oplus C = \big(-(A+B)\big) \oplus C = (-A-B) \oplus C = -(-A-B+C) = A+B-C$$

Επειδή γενικά $-A+B+C \neq A+B-C$, έπεται ότι το αξίωμα (1) **δεν ικανοποιείται**.

(2)

$$A \oplus B = -(A+B) = -A-B = -B-A = -(B+A) = B \oplus A$$

Άρα το το αξίωμα (2) **ικανοποιείται**.

(3) Υποθέτουμε ότι υπάρχει πίνακας $X \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ έτσι ώστε $A \oplus X = A = X \oplus A$, $\forall A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$. Τότε:

$$A \oplus X = A \quad\Longrightarrow\quad -(A+X) = A \quad\Longrightarrow\quad -A-X = A \quad\Longrightarrow\quad X = -2A$$

Επειδή ο πίνακας X εξαρτάται από τον πίνακα A, και άρα δεν είναι μοναδικός[2], έπεται ότι το αξίωμα (3) **δεν ικανοποιείται**.

(4) Επειδή το αξίωμα (4) έχει νόημα μόνον όταν ισχύει το αξίωμα (3), προκύπτει ότι το αξίωμα (4) **δεν ικανοποιείται**.

(5)

$$r \odot (A \oplus B) = r \odot (-A-B) = -(r(-A-B)) = -(-rA-rB) = rA+rB$$

$$r \odot A \oplus r \odot B = (-rA) \oplus (-rB) = -\big((-rA)+(-rB)\big) = -(-rA-rB) = rA+rB$$

Άρα το αξίωμα (5) **ικανοποιείται**.

(6)

$$(r+s) \odot A = -\big((r+s)A\big) = -(rA+sA) = -rA-sA$$

$$r \odot A \oplus s \odot A = (-rA) \oplus (-sA) = -\big((-rA)+(-sA)\big) = -(-rA-sA) = rA+sA$$

Άρα το αξίωμα (6) **δεν ικανοποιείται**.

(7)

$$r \odot (s \odot A) = r \odot (-sA) = -(r(-sA)) = r(sA) = (rs)A$$

$$(rs) \odot A = -((rs)A) = -(rs)A$$

Άρα το αξίωμα (7) **δεν ικανοποιείται**.

(8)

$$1 \odot A = -(1A) = -A \neq A$$

Άρα το αξίωμα (8) **δεν ικανοποιείται**.

Συμπεραίνουμε ότι η τριάδα $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ **δεν είναι** διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$. ■

Άσκηση 7. *Στο σύνολο* $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ *ορίζουμε τις πράξεις:*

$$\oplus \,:\, \mathbb{R}^+ \,\times\, \mathbb{R}^+ \,\longrightarrow\, \mathbb{R}^+, \qquad (a,b) \longmapsto a \oplus b = ab-1$$

και

$$\odot \,:\, \mathbb{R} \,\times\, \mathbb{R}^+ \,\longrightarrow\, \mathbb{R}^+, \qquad (r,a) \longmapsto r \odot a = a$$

Να εξετάσετε αν η τριάδα $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ αποτελεί διανυσματικό χώρο πάνω από το $\mathbb{R}$.

[2] Για παράδειγμα, αν υπήρχε πίνακας X ο οποίος να είναι ουδέτερο στοιχείο για την πράξη «$\oplus$», τότε θα έπρεπε $O \oplus X = O$ και $I_n \oplus X = I_n$, όπου O είναι ο μηδενικός $n \times n$ πίνακας και ο I_n είναι ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας. Από την πρώτη σχέση έπεται ότι $X = O$ και από την δεύτερη έπεται ότι $X = -2I_n$, και αυτό είναι άτοπο.

Λύση. Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}$ και $r \in \mathbb{R}$.

(1)
$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (bc - 1) = a(bc-1) - 1 = abc - a - 1$$
$$(a \oplus b) \oplus c = (ab - 1) \oplus c = (ab-1)c - 1 = abc - c - 1$$
Επειδή γενικά $abc - a - 1 \neq abc - c - 1$, όπως βλέπουμε θεωρώντας στοιχεία a, c με $a \neq c$ και $b = 0$ (π.χ. $a = 1$ και $b = c = 0$), έπεται ότι το αξίωμα (1) **δεν ικανοποιείται**.

(2)
$$a \oplus b = ab - 1 = ba - 1 = b \oplus a$$
Άρα το αξίωμα (2) **ικανοποιείται**.

(3) Έστω ότι υπάρει $x \in \mathbb{R}^+$ έτσι ώστε $a \oplus x = a = x \oplus a$, $\forall a \in \mathbb{R}^+$. Τότε:
$$a \oplus x = a \quad \Longrightarrow \quad ax - 1 = a \quad \Longrightarrow \quad ax = 1 + a \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1+a}{a}$$
Επειδή το στοιχείο x εξαρτάται από το στοιχείο a, και άρα δεν είναι μοναδικό[3], έπεται ότι το αξίωμα (3) **δεν ικανοποιείται**.

(4) Επειδή το αξίωμα (4) έχει νόημα μόνον όταν ισχύει το αξίωμα (3), προκύπτει ότι το αξίωμα (4) **δεν ικανοποιείται**.

(5)
$$r \odot (a \oplus b) = r \odot (ab - 1) = ab - 1$$
$$r \odot a \oplus r \odot b = a \oplus b = ab - 1$$
Άρα το αξίωμα (5) **ικανοποιείται**.

(6)
$$(r + s) \odot a = a \quad \text{και} \quad r \odot a \oplus s \odot a = a \oplus a = a^2 - 1$$
Επειδή γενικά $a \neq a^2 - 1$, όπως βλέπουμε θέτοντας $a = 1$, έπεται ότι το αξίωμα (6) **δεν ικανοποιείται**.

(7)
$$r \odot (s \odot a) = r \odot a = a = (rs) \odot a$$
Άρα το αξίωμα (7) **ικανοποιείται**.

(8)
$$1 \odot a = a$$
Άρα το αξίωμα (8) **ικανοποιείται**.

Συμπεραίνουμε ότι η τριάδα $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ **δεν είναι** διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$. ■

Άσκηση 8. *Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ορίζουμε πράξεις:*
$$\oplus : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (a, b) \longmapsto a \oplus b = ab$$
και
$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (r, a) \longmapsto r \odot a = r + a$$
Να εξετάσετε αν η τριάδα $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ αποτελεί διανυσματικό χώρο πάνω από το $\mathbb{R}$.

Λύση. Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}$ και $r \in \mathbb{R}$.

(1) Επειδή η πράξη «$\oplus$» είναι ο συνήθης πολλαπλασιασμός πραγματικών αριθμών ο οποίος ικανοποιεί την προσεταιριστική και μεταθετική ιδιότητα, και για τον οποίον υπάρχει ουδέτερο στοιχείο, ο πραγματικός αριθμός 1, έπεται ότι **τα τρία πρώτα αξιώματα** (1)-(3) **ικανοποιούνται**.

(2) Για να υπάρχει αντίθετο στοιχείο του $a \in \mathbb{R}$ ως προς την πράξη «$\oplus$», θα πρέπει ισοδύναμα να υπάρχει αντίστροφο στοιχείο κάθε στοιχείου $a \in \mathbb{R}$ ως προς την πράξη του συνήθους πολλαπλασιασμού πραγματικών αριθμών. Επειδή αυτό δεν ισχύει, όπως βλέπουμε θέτοντας $a = 0$, έπεται ότι το αξίωμα (4) **δεν ικανοποιείται**.

[3]Για παράδειγμα, αν υπήρχε στοιχείο x το οποίο να είναι ουδέτερο στοιχείο για την πράξη «$\oplus$», τότε θα έπρεπε $1 \oplus x = 1$ και $2 \oplus x = 2$. Από την πρώτη σχέση έπεται ότι $x = 2$ και από την δεύτερη έπεται ότι $x = \frac{3}{2}$, και αυτό είναι άτοπο.

(3)

$$r \odot (a \oplus b) = r \odot (ab) = r + ab$$

$$r \odot a \oplus r \odot b = (r+a) \oplus (r+b) = (r+a) \cdot (r+b) = r^2 + r(a+b) + ab$$

Επειδή γενικά $r^2 + r(a+b) + ab \neq r + ab$, όπως βλέπουμε θέτοντας $r = a = b = 1$, έπεται ότι το αξίωμα (5) **δεν ικανοποιείται**.

(4)

$$(r+s) \odot a = (r+s)a = ra + sa$$

$$r \odot a \oplus s \odot a = (r+a) \oplus (s+a) = rs + (r+s)a + a^2$$

Επειδή γενικά $rs + (r+s)a + a^2 \neq ra + sa$, όπως βλέπουμε θέτοντας $r = s = a = 1$, έπεται ότι το αξίωμα (6) **δεν ικανοποιείται**.

(5)

$$r \odot (s \odot a) = r \odot (s+a) = r + (s+a) = r + s + a$$

$$(rs) \odot a = (rs) + a = rs + a$$

Επειδή γενικά $rs + a \neq r + s + a$, όπως βλέπουμε θέτοντας $r = s = a = 1$, έπεται ότι το αξίωμα (7) **δεν ικανοποιείται**.

(6)

$$1 \odot a = 1 + a \neq a$$

Άρα το αξίωμα (8) **δεν ικανοποιείται**.

Συμπεραίνουμε ότι η τριάδα $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ **δεν είναι** διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$. ■

Άσκηση 9. *Θεωρούμε έναν διανυσματικό χώρο $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ υπεράνω του σώματος των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$. Ορίζουμε μια νέα πράξη*

$$\odot \colon \mathbb{C} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \quad z \odot \vec{x} = \overline{z} \cdot \vec{x}$$

Να δειχθεί ότι η τριάδα $(\mathbb{C}^n, +, \odot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{C}$.

Λύση. Επειδή η τριάδα $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ είναι ένας $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος, προκύπτει ότι ικανοποιούνται τα αξιώματα (1)-(4), τα οποία αφορούν την πράξη της πρόσθεσης, για την τριάδα $(\mathcal{E}, +, \odot)$. Για τα υπόλοιπα αξιώματα, έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ και $z, w \in \mathbb{C}$. Τότε:

(5)

$$(z+w) \odot \vec{x} = \overline{z+w} \cdot \vec{x} = (\overline{z} + \overline{w}) \cdot \vec{x} = \overline{z} \cdot \vec{x} + \overline{w} \cdot \vec{x} = z \odot \vec{x} + w \odot \vec{x}$$

(6)

$$z \odot (\vec{x} + \vec{y}) = \overline{z} \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \overline{z} \cdot \vec{x} + \overline{z} \cdot \vec{y} = z \odot \vec{x} + z \odot \vec{y}$$

(7)

$$z \odot (w \odot \vec{x}) = z \odot (\overline{w} \cdot \vec{x}) = \overline{z} \cdot (\overline{w} \cdot \vec{x}) = (\overline{z}\,\overline{w}) \cdot \vec{x}) = \overline{z\,w} \cdot \vec{x} = (z\,w) \odot \vec{x}$$

(8)

$$1 \odot \vec{x} = \overline{1} \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

Επομένως η τριάδα $(\mathcal{E}, +, \odot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{C}$. ■

Άσκηση 10. *Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{C}^n$ το οποίο θεωρούμε ότι είναι εφοδιασμένο με την συνήθη πράξη πρόσθεσης «$+$» κατά συνιστώσα:*

$$(z_1, z_2, \cdots, z_n) + (w_1, w_2, \cdots, w_n) = (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \cdots, z_n + w_n)$$

Ορίζουμε μια πράξη

$$* \colon \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n, \quad \omega * (z_1, z_2, \cdots, z_n) = (\omega\overline{z}_1, \omega\overline{z}_2, \cdots, \omega\overline{z}_n)$$

Να εξετασθεί αν η τριάδα $(\mathbb{C}^n, +, *)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{C}$. Αν η τριάδα $(\mathbb{C}^n, +, *)$ δεν είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{C}$, ποιά από τα οκτώ αξιώματα δεν ισχύουν;

Λύση. Γνωρίζουμε ότι η τριάδα $(\mathbb{C}^n, +, \cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{C}$, όπου η πράξη βαθμωτού πολλαπλασιασμού «·» ορίζεται ώς εξής $\omega \cdot (z_1, z_2, \cdots, z_n) = (\omega\, z_1, \omega\, z_2, \cdots, \omega\, z_n)$. Επειδή η πράξη πρόσθεσης είναι κοινή και για τις δύο τριάδες $(\mathbb{C}^n, +, \cdot)$ και $(\mathbb{C}^n, +, *)$, έπεται ότι ικανοποιούνται τα αξιώματα (1) - (4) για την τριάδα $(\mathbb{C}^n, +, *)$. Για τα υπόλοιπα αξιώματα, έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ και $\vec{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n) \in \mathbb{C}^n$. Τότε:

(5)

$$(\alpha+\beta) * \vec{z} = \big((\alpha+\beta)\,\overline{z}_1, (\alpha+\beta)\,\overline{z}_2, \cdots, (\alpha+\beta)\,\overline{z}_n\big) = \big(\alpha\,\overline{z}_1 + \beta\,\overline{z}_1, \alpha\,\overline{z}_2 + \beta\,\overline{z}_2, \cdots, \alpha\,\overline{z}_n + \beta\,\overline{z}_n\big) =$$
$$= \big(\alpha\,\overline{z}_1, \alpha\,\overline{z}_2, \cdots, \alpha\,\overline{z}_n\big) + \big(\beta\,\overline{z}_1, \beta\,\overline{z}_2, \cdots, \beta\,\overline{z}_n\big) = \alpha * \vec{z} + \beta * \vec{z}$$

(6)

$$\alpha * (\vec{z} + \vec{w}) = \alpha * \big(z_1 + w_1, z_2 + w_2, \cdots, z_n + w_n\big) = \big(\alpha\,\overline{z_1 + w_1}, \alpha\,\overline{z_2 + w_2}, \cdots, \alpha\,\overline{z_n + w_n}\big) =$$
$$= \big(\alpha\,(\overline{z_1} + \overline{w_1}), \alpha\,(\overline{z_2} + \overline{w_2}), \cdots, \alpha\,(\overline{z_n} + \overline{w_n})\big) = \big(\alpha\,\overline{z_1} + \alpha\,\overline{w_1}, \alpha\,\overline{z_2} + \alpha\,\overline{w_2}, \cdots, \alpha\,\overline{z_n} + \alpha\,\overline{w_n}\big) =$$
$$= \big(\alpha\,\overline{z_1}, \alpha\,\overline{z_2}, \cdots, \alpha\,\overline{z_n}\big) + \big(\alpha\,\overline{w_1}, \alpha\,\overline{w_2}, \cdots, \alpha\,\overline{w_n}\big) = \alpha * \vec{z} + \alpha * \vec{w}$$

(7)

$$\alpha * (\beta * \vec{z}) = \alpha * \big(\beta\,\overline{z_1}, \beta\,\overline{z_2}, \cdots, \beta\,\overline{z_n}\big) = \big(\alpha\,\overline{\beta\,\overline{z_1}}, \alpha\,\overline{\beta\,\overline{z_2}}, \cdots, \alpha\,\overline{\beta\,\overline{z_n}}\big) = \big(\alpha\,\overline{\beta}\,\overline{\overline{z_1}}, \alpha\,\overline{\beta}\,\overline{\overline{z_2}}, \cdots, \alpha\,\overline{\beta}\,\overline{\overline{z_n}}\big) =$$
$$= \big(\alpha\,\overline{\beta}\,z_1, \alpha\,\overline{\beta}\,z_2, \cdots, \alpha\,\overline{\beta}\,z_n\big)$$
$$(\alpha\,\beta) * \vec{z} = \big(\alpha\,\beta\,\overline{z_1}, \alpha\,\beta\,\overline{z_2}, \cdots, \alpha\,\beta\,\overline{z_n}\big)$$

Επειδή προφανώς έχουμε γενικά $\alpha\,\overline{\beta}z \neq \alpha\,\beta\,\overline{z}$, όπως προκύπτει για παράδειγμα θέτοντας $\alpha = \beta = 1$ και $z = i$, έπεται ότι:

$$\alpha * (\beta * \vec{z}) \;\neq\; (\alpha\,\beta) * \vec{z}$$

και άρα το αξίωμα (7) δεν ισχύει.

(8)

$$1 * \vec{z} = \big(1\,\overline{z_1}, 1\,\overline{z_2}, \cdots, 1\,\overline{z_n}\big) = \big(\overline{z_1}, \overline{z_2}, \cdots, \overline{z_n}\big) \neq \big(z_1, z_2, \cdots, z_n\big) = \vec{z}$$

και άρα το αξίωμα (8) δεν ισχύει.

Επομένως η τριάδα $(\mathbb{C}^n, +, *)$ δεν είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{C}$: ικανοποιούνται όλα τα αξιώματα εκτός των αξιωμάτων (7) και (8). ∎

Άσκηση 11. *Θεωρούμε έναν διανυσματικό χώρο $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ υπεράνω του σώματος των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$. Περιορίζοντας τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό $\cdot : \mathbb{C} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ στο υποσύνολο $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, ορίζεται μια νέα πράξη*

$$\star \colon \mathbb{R} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \quad r \star \vec{x} = r \cdot \vec{x}$$

Να δειχθεί ότι η τριάδα $(\mathcal{E}, +, \star)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$.

Λύση. Επειδή η τριάδα $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ είναι ένας $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος, προκύπτει ότι ικανοποιούνται τα αξιώματα (1)-(4), τα οποία αφορούν την πράξη της πρόσθεσης, για την τριάδα $(\mathcal{E}, +, \star)$. Για τα υπόλοιπα αξιώματα, έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ και $r, s \in \mathbb{R}$. Τότε, θεωρώντας κάθε πραγματικό αριθμό ως μιγαδικό, θα έχουμε:

(5)
$$(r+s) \star \vec{x} = (r+s) \cdot \vec{x} = r \cdot \vec{x} + s \cdot \vec{x} = r \star \vec{x} + s \star \vec{x}$$

(6)
$$r \star (\vec{x} + \vec{y}) = r \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = r \cdot \vec{x} + s \cdot \vec{y} = r \star \vec{x} + s \star \vec{y}$$

(7)
$$r \star (s \star \vec{x}) = r \star (s \cdot \vec{x}) = r \cdot (s \cdot \vec{x}) = (r\,s) \cdot \vec{x} = (r\,s) \star \vec{x}$$

(8)
$$1 \star \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

Επομένως η τριάδα $(\mathcal{E}, +, \star)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$. ∎

Άσκηση 12. *Να δειχθεί ότι το υποσύνολο:*

$$\mathcal{V} = \big\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid c = a-b,\ d = a+b\big\} \ \subseteq\ \mathbb{R}^4$$

αποτελεί έναν $\mathbb{R}$*-υπόχωρο του* $\mathbb{R}^4$.

Λύση. Θα έχουμε:

$$\mathcal{V} = \big\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid c = a-b,\ d = a+b\big\} = \big\{(a,b,a-b,a+b) \in \mathbb{R}^4 \mid a,b \in \mathbb{R}\big\} =$$
$$= \big\{(a,0,a,a) + (0,b,-b,b) \in \mathbb{R}^4 \mid a,b \in \mathbb{R}\big\} = \big\{a(1,0,1,1) + b(0,1,-1,1) \in \mathbb{R}^4 \mid a,b \in \mathbb{R}\big\} =$$
$$= \big\langle (1,0,1,1),\ (0,1,-1,1)\big\rangle$$

Δηλαδή το σύνολο $\mathcal{V}$ συμπίπτει με τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^4$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $(1,0,1,1)$ και $(0,1,-1,1)$, και επομένως είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$. ∎

Άσκηση 13. *Να εξεταστεί ποια από τα ακόλουθα υποσύνολα τού* $\mathbb{R}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathbb{R}^4$ *είναι υπόχωροί του:*

(1) $\mathcal{W}_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y, z = t\}$,
(2) $\mathcal{W}_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$,
(3) $\mathcal{W}_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 1\}$,
(4) $\mathcal{W}_4 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid xt = yz\}$.

Λύση. Υπενθυμίζουμε ότι για να αποτελεί το υποσύνολο $\mathcal{W}$ ενός $\mathbb{K}$–διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$, έναν υπόχωρο τού $\mathcal{V}$ πρέπει να πληροί τα ακόλουθα:

(1) $\mathcal{W} \neq \emptyset$,
(2) $\forall \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \mathcal{W} \implies \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in \mathcal{W}$,
(3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{w} \in \mathcal{W} \implies \lambda \cdot \vec{w} \in \mathcal{W}$.

(α') Το $\mathcal{W}_1$ αποτελείται από τα στοιχεία τού $\mathbb{R}^4$ τής μορφής (a,a,b,b), όπου $a,b \in \mathbb{R}$, και επειδή το $(0,0,0,0)$ ανήκει στο $\mathcal{W}_1$, αφού είναι αυτής τής μορφής, έπεται ότι $\mathcal{W}_1 \neq \emptyset$.

Αν $\vec{w}_1 \in \mathcal{W}_1$ και $\vec{w}_2 \in \mathcal{W}_1$, τότε το $\vec{w}_1 = (a,a,b,b)$ και το $\vec{w}_2 = (c,c,d,d)$, όπου $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Έχουμε:

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = (a,a,b,b) + (c,c,d,d) = (a+c, a+c, b+d, b+d),$$

το οποίο έχει την κατάλληλη μορφή ώστε να ανήκει στο $\mathcal{W}_1$.

Ανάλογα, αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\vec{w} \in \mathcal{W}_1$, τότε το $\vec{w} = (a,a,b,b)$, όπου $a,b \in \mathbb{R}$, και έχουμε:

$$\lambda \cdot \vec{w} = \lambda \cdot (a,a,b,b) = (\lambda a, \lambda a, \lambda b, \lambda b),$$

το οποίο έχει την κατάλληλη μορφή ώστε να ανήκει στο $\mathcal{W}_1$.

(β') Το $\mathcal{W}_2$ είναι $\neq \emptyset$, αφού οι συνιστώσες τού $\vec{0} = (0,0,0,0)$ ικανοποιούν την $x+y+z+t = 0$, που έχει ως συνέπεια να ανήκει το $\vec{0}$ στο $\mathcal{W}_2$.

Αν $\vec{w}_1 = (a_1,b_1,c_1,d_1) \in \mathcal{W}_2$ και $\vec{w}_2 = (a_2,b_2,c_2,d_2) \in \mathcal{W}_2$, τότε $a_1+b_1+c_1+d_1 = 0$ και $a_2+b_2+c_2+d_2 = 0$. Συνεπώς, $(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)+(d_1+d_2) = 0$ και γι' αυτό το $\vec{w}_1+\vec{w}_2 = (a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2, d_1+d_2)$ ανήκει επίσης στο $\mathcal{W}_2$.

Αν $\lambda \in \mathbb{K}$ και $\vec{w} = (a,b,c,d) \in \mathcal{W}_2$, τότε $a+b+c+d = 0$. Συνεπώς, $\lambda a + \lambda b + \lambda c + \lambda d = \lambda 0 = 0$ και γι' αυτό το $\lambda\vec{w} = (\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d)$ ανήκει επίσης στο $\mathcal{W}_2$.

(γ') Το $\mathcal{W}_3$ ***δεν είναι*** διανυσματικός υπόχωρος τού $\mathbb{R}^4$, μολονότι $\mathcal{W}_3 \neq \emptyset$, αφού το $(1,1,1,1)$ είναι στοιχείο του. Πράγματι, αν ήταν διανυσματικός χώρος, τότε το μηδενικό στοιχείο τού $\mathbb{R}^4$, δηλαδή το $\vec{0} = (0,0,0,0)$ θα ανήκε στο W_3. Το τελευταίο δεν μπορεί να συμβαίνει, αφού για να ανήκει το $\vec{0}$ στο $\mathcal{W}_3$, θα πρέπει, σύμφωνα με τον ορισμό τού $\mathcal{W}_3$, η πρώτη συνιστώσα του, το 0, να ισούται με 1.

(δ') Το $\mathcal{W}_4$ ***δεν είναι*** διανυσματικός υπόχωρος τού $\mathbb{R}^4$, μολονότι $\mathcal{W}_4 \neq \emptyset$, αφού οι συνιστώσες τού $\vec{0} = (0,0,0,0)$ ικανοποιούν την $xt = yz$ και συνεπώς $\vec{0} \in \mathcal{W}_4$. Παρατηρούμε ότι το $\vec{w}_1 = (0,0,2,4)$ ανήκει στο $\mathcal{W}_4$, αφού $0 \cdot 4 = 0 \cdot 2$ και το $\vec{w}_2 = (4,1,8,2)$, αφού $4 \cdot 2 = 1 \cdot 8$. Ωστόσο, το $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = (4,1,10,6)$ δεν ανήκει στο W_4, αφού $4 \cdot 6 \neq 1 \cdot 10$. ∎

Άσκηση 14. *Να εξετασθεί ποιά από τα ακόλουθα υποσύνολα των αντίστοιχων διανυσματικών χώρων είναι υπόχωροι:*

(1) $\mathcal{V}_1 = \{(a,b,1) \in \mathbb{R}^3 \mid a,b \in \mathbb{R}\}$, *στον* $\mathbb{R}$-*διανυσματικό χώρο* $\mathbb{R}^3$.
(2) $\mathcal{V}_2 = \{(a,b,a+2b) \in \mathbb{R}^3 \mid a,b \in \mathbb{R}\}$, *στον* $\mathbb{R}$-*διανυσματικό χώρο* $\mathbb{R}^3$.
(3) $\mathcal{V}_3 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+2b-c=0,\ \ a,b,c \in \mathbb{R}\}$, *στον* $\mathbb{R}$-*διανυσματικό χώρο* $\mathbb{R}^3$.
(4) $\mathcal{V}_4 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \geq 0 \ \ \textit{και}\ \ c \leq 0\}$, *στον* $\mathbb{R}$-*διανυσματικό χώρο* $\mathbb{R}^3$.
(5) $\mathcal{V}_5 = \{A \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^2 = A\}$, *στον* $\mathbb{R}$-*διανυσματικό χώρο* $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.
(6) $\mathcal{V}_6 = \{A \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^2 = \mathbb{O}\}$, *στον* $\mathbb{R}$-*διανυσματικό χώρο* $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.
(7) $\mathcal{V}_7 = \{f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(1) = 1\}$, *στον* $\mathbb{R}$-*διανυσματικό χώρο* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
(8) $\mathcal{V}_8 = \{f\colon (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(\frac{1}{2}) = 0\}$, *στον* $\mathbb{R}$-*διανυσματικό χώρο* $\mathcal{F}\big((-1,1),\mathbb{R}\big)$.

Λύση. (1) Το υποσύνολο $\mathcal{V}_1$ **δεν είναι υπόχωρος** του $\mathbb{R}^3$ διότι δεν περιέχει το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0} = (0,0,0)$ του $\mathbb{R}^3$.

(2) Θα έχουμε

$$\mathcal{V}_2 = \big\{(a,b,a+2b) \in \mathbb{R}^3 \mid a,b \in \mathbb{R}\big\} = \big\{(a,0,a) + (0,b,2b) \in \mathbb{R}^3 \mid a,b \in \mathbb{R}\big\} =$$
$$= \big\{a(1,0,1) + b(0,1,2) \in \mathbb{R}^3 \mid a,b \in \mathbb{R}\big\} = \big\langle (1,0,1),\ (0,1,2)\big\rangle$$

δηλαδή, το υποσύνολο $\mathcal{V}_2$ συμπίπτει με τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $(1,0,1),(0,1,2)$, και άρα **είναι υπόχωρος** του $\mathbb{R}^3$.

(3) Θα έχουμε

$$\mathcal{V}_3 = \big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+2b-c=0,\ \ a,b,c \in \mathbb{R}\big\} = \big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+2b=c,\ \ a,b,c \in \mathbb{R}\big\} =$$
$$= \big\{(a,b,a+2b) \in \mathbb{R}^3 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\big\} = \mathcal{V}_2$$

και άρα επειδή δείξαμε παραπάνω ότι ο $\mathcal{V}_2$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, το υποσύνολο $\mathcal{V}_3$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

(4) Παρατηρούμε ότι $(1,0,-1) \in \mathcal{V}_4$ αλλά ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός $(-1)\cdot(1,0,-1) = (-1,0,1) \notin \mathcal{V}_4$. Άρα το υποσύνολο $\mathcal{V}_4$ **δεν είναι υπόχωρος** του $\mathbb{R}^3$.

(5) Παρατηρουμε ότι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ανήκει στο υποσύνολο $\mathcal{V}_5$, διότι $A^2 = A$, αλλά ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός $2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ δεν ανήκει στο υποσύνολο $\mathcal{V}_5$ διότι $(2 \cdot A)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot A$. Άρα το υποσύνολο $\mathcal{V}_5$ **δεν είναι υπόχωρος** του $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.

(6) Παρατηρουμε ότι οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ανήκουν στο υποσύνολο $\mathcal{V}_6$, διότι $A^2 = 0 = B^2$, αλλά ο πίνακας $A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ δεν ανήκει στο υποσύνολο $\mathcal{V}_6$ διότι $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I_2 \notin \mathcal{V}_6$. Άρα το υποσύνολο $\mathcal{V}_6$ **δεν είναι υπόχωρος** του $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.

(7) Παρατηρούμε ότι το μηδενικό διάνυσμα 0 του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, δηλαδή η σταθερή συνάρτηση $0\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $0(x) = 0$, δεν ανήκει στο υποσύνολο $\mathcal{V}_7$, διότι $0(1) = 0 \neq 1$. Άρα το υποσύνολο $\mathcal{V}_6$ **δεν είναι υπόχωρος** του $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(8) (α΄) Το μηδενικό διάνυσμα 0 του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{F}((-1,1),\ \mathbb{R})$, δηλαδή η σταθερή συνάρτηση $0\colon (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $0(x) = 0$, ανήκει στο υποσύνολο $\mathcal{V}_8$, διότι $0(\frac{1}{2}) = 0$.

(β΄) Έστω $f,g \in \mathcal{F}((-1,1),\mathbb{R})$. Τότε $f(\frac{1}{2}) = 0 = g(\frac{1}{2})$ και άρα θα έχουμε:

$$(f+g)\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right) = 0 + 0 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f+g \in \mathcal{F}((-1,1),\mathbb{R})$$

(γ΄) Έστω $r \in \mathbb{R}$ και $f \in \mathcal{F}((-1,1),\mathbb{R})$. Τότε $f(\frac{1}{2}) = 0$ και άρα θα έχουμε:

$$(r \cdot f)\left(\frac{1}{2}\right) = rf\left(\frac{1}{2}\right) = r \cdot 0 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad r \cdot f \in \mathcal{F}((-1,1),\mathbb{R})$$

Άρα το υποσύνολο $\mathcal{V}_8$ **είναι υπόχωρος** του $\mathcal{F}((-1,1),\ \mathbb{R})$. ∎

Άσκηση 15. *Θεωρούμε το σώμα $\mathbb{K}$ ως $\mathbb{K}$-διανυσματικό χώρο. Να δείξετε ότι οι μόνοι υπόχωροι του $\mathbb{K}$ είναι οι:*

$$\{0\} \quad \textit{και} \quad \mathbb{K}$$

Λύση. Έστω $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{K}$ ένας υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}$ υπεράνω του εαυτού του. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{V} \neq \{\vec{0}\}$ και θα δείξουμε ότι $\mathcal{V} = \mathbb{K}$. Υπενθυμίζουμε ότι το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ του $\mathbb{K}$ είναι ο αριθμός 0, η πρόσθεση του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}$ είναι η συνήθης πρόσθεση στοιχείων του $\mathbb{K}$, και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}$ είναι ο συνήθης πολλαπλασιασμός στοιχείων του $\mathbb{K}$. Επειδή $\mathcal{V} \neq \{\vec{0}\}$, έπεται ότι υπάρχει στοιχείο $x \in \mathcal{V}$ με $x \neq 0$. Τότε, όπως γνωρίζουμε, υπάρχει ο αντίστροφος $x^{-1} \in \mathbb{K}$ του x και ισχύει $xx^{-1} = 1 = x^{-1}x$. Επειδή $x \in \mathcal{V}$ και το υποσύνολο $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{K}$, έπεται ότι $1 = x^{-1} \cdot x \in \mathcal{V}$. Αν $a \in \mathbb{K}$ είναι τυχόν στοιχείο του $\mathbb{K}$, τότε επειδή $1 \in \mathcal{V}$ και το υποσύνολο $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{K}$, έπεται ότι $a = a \cdot 1 \in \mathcal{V}$. Άρα ο υπόχωρος $\mathcal{V}$ περιέχει κάθε στοιχείον του $\mathbb{K}$ και επομένως $\mathcal{V} = \mathbb{K}$. ■

Η περιγραφή όλων των υπόχωρων του $\mathbb{K}^2$, οι οποίοι όπως θα δούμε είναι άπειροι σε πλήθος, είναι περισσότερο δύσκολη:

Άσκηση 16. *Αν $\mathbb{K}$ είναι ένα σώμα, να βρεθούν όλοι οι υπόχωροι του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}^2$.*

Λύση. (1) Γνωρίζουμε ότι τα υποσύνολα $\{\vec{0} = (0,0)\}$ και $\mathbb{K}^2$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{K}^2$.

(2) Ισχυρισμός: Αν $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{K}^2$ και $\mathcal{V} \neq \{\vec{0}\}, \mathbb{K}^2$, τότε υπάρχουν στοιχεία $a, b \in \mathbb{K}$, όπου $(a,b) \neq (0,0)$, έτσι ώστε:

$$\mathcal{V} = \{(x,y) \in \mathbb{K}^2 \mid ax + by = 0\}$$

(α΄) Δείχνουμε πρώτα ότι το παραπάνω σύνολο είναι υπόχωρος του $\mathbb{K}^2$. Πράγματι, $\vec{0} \in \mathcal{V}$ διότι $a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$. Έστω $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{V}$ και $\lambda \in \mathbb{K}$. Τότε τα έχουμε:

$$ax_1 + by_1 = 0 = ax_2 + by_2$$

και επομένως:

$$a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) = ax_1 + ax_2 + by + by_2 = ax_1 + by_1 + ax_2 + by_2 = 0 + 0 = 0$$
$$a(\lambda x_1) + b(\lambda y_1) = a\lambda x_1 + b\lambda y_1 = \lambda(ax_1 + by_1) = \lambda \cdot 0 = 0$$

Άρα $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathcal{V}$ και $\lambda \cdot (x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1) \in \mathcal{V}$. Επομένως το υποσύνολο $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{K}^2$.

Επιπλέον $\mathcal{V} \neq \{\vec{0}\}, \mathbb{K}^2$. Πράγματι, επειδή $(a,b) \neq (0,0)$, τουλάχιστον ένα εκ των a, b είναι μη-μηδενικό, έστω ότι αυτό είναι το a. Τότε:

$$a \cdot (-\frac{b}{a}) + b \cdot 1 = -b + b = 0 \quad \Longrightarrow \quad (0,0) \neq \left(-\frac{b}{a}, 1\right) \in \mathcal{V}$$

Παρόμοια αν $b \neq 0$, τότε:

$$a \cdot 1 + b \cdot (-\frac{a}{b}) = a - a = 0 \quad \Longrightarrow \quad (0,0) \neq \left(1, -\frac{a}{b}\right) \in \mathcal{V}$$

Άρα το υποσύνολο $\mathcal{V}$ περιέχει και μη-μηδενικά διανύσματα, δηλαδή $\mathcal{V} \neq \{\vec{0}\}$.

Υποθέτουμε ότι $\mathcal{V} = \mathbb{K}^2$. Τότε προφανώς $(1,0) \in \mathcal{V}$ και $(0,1) \in \mathcal{V}$. Αυτό σημαίνει ότι $a \cdot 1 + b \cdot 0 = 0$, δηλαδή $a = 0$, και $a \cdot 0 + b \cdot 1 = 0$, δηλαδή $b = 0$. Επειδή $(a,b) \neq (0,0)$, αυτό είναι άτοπο και άρα $\mathcal{V} \neq \mathbb{K}^2$.

(β΄) Έστω $\mathcal{V}$ ένας υπόχωρος του $\mathbb{K}^2$ έτσι ώστε $\mathcal{V} \neq \{\vec{0}\}, \mathbb{K}^2$.

Επειδή $\mathcal{V} \neq \{\vec{0}\}$, υπάρχει $(c,d) \in \mathcal{V}$ και $(c,d) \neq (0,0)$. Θεωρούμε το ακόλουθο υποσύνολο του $\mathbb{K}^2$:

$$\mathcal{L} = \{(x,y) \in \mathbb{K}^2 \mid dx - cy = 0\}$$

Θα δείξουμε ότι: $\mathcal{V} = \mathcal{L}$. Επειδή $(c,d) \neq (0,0)$, έπεται ότι τουλάχιστον ένα εκ των c, d είναι μη-μηδενικό, έστω ότι αυτό είναι το c. Τότε:

$$\mathcal{L} = \{(x,y) \in \mathbb{K}^2 \mid dx - cy = 0\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{K}^2 \mid y = \frac{d}{c}x = y\right\} = \left\{(x, \frac{d}{c}x) \in \mathbb{K}^2 \mid x \in \mathbb{K}\right\} =$$

$$= \Big\{ \frac{x}{c}(c,d) \in \mathbb{K}^2 \mid x \in \mathbb{K} \Big\} = \big\langle (c,d) \big\rangle$$

Παρόμοια αν $d \neq 0$, τότε

$$\mathcal{L} = \big\{ (x,y) \in \mathbb{K}^2 \mid dx - cy = 0 \big\} = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{K}^2 \mid x = \frac{c}{d}y \Big\} = \Big\{ (\frac{c}{d}y, y) \in \mathbb{K}^2 \mid x \in \mathbb{K} \Big\} =$$

$$= \Big\{ \frac{y}{d}(c,d) \in \mathbb{K}^2 \mid x \in \mathbb{K} \Big\} = \big\langle (c,d) \big\rangle$$

Άρα σε κάθε περίπτωση

$$\mathcal{L} = \big\langle (c,d) \big\rangle = \big\{ \lambda(c,d) \in \mathbb{K}^2 \mid \lambda \in \mathbb{K} \big\}$$

Επειδή $(c,d) \in \mathcal{V}$, έπεται ότι $\lambda(c,d) \in \mathcal{V}$, $\forall \lambda \in \mathcal{K}$, και άρα $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{V}$.
Έστω ότι $\mathcal{V} \nsubseteq \mathcal{L}$, και άρα υπάρχει ένα διάνυσμα $(a,b) \in \mathcal{V}$ με $(a,b) \notin \mathcal{L}$. Τότε προφανώς θα έχουμε: $da - cb \neq 0$. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix} \qquad \text{με ορίζουσα} \quad |A| = cb - ad \neq 0$$

Για κάθε διάνυσμα $(x,y) \in \mathbb{K}^2$, το γραμμικό σύστημα

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} cx' & + & ay' & = & x \\ dx' & + & by' & = & y \end{cases}$$

με αγνώστους x' και y', έχει ως πίνακα συντελεστών τον αντιστρέψιμο πίνακα A και άρα είναι σύστημα Cramer. Επομένως το (Σ) έχει μοναδική λύση (x_0, y_0), δηλαδή υπάρχει $(x_0, y_0 \in \mathbb{K}^2$ έτσι ώστε:

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} cx_0 & + & ay_0 & = & x \\ dx_0 & + & by_0 & = & y \end{cases}$$

Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$(x,y) = x_0(c,d) + y_0(a,b)$$

Επειδή $(c,d) \in \mathcal{V}$ και $(a,b) \in \mathcal{V}$, και το υποσύνολο $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{K}^2$, έπεται ότι το τυχόν διάνυσμα (x,y) του $\mathbb{K}^2$ ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{V}$. Με άλλα λόγια $\mathcal{V} = \mathbb{K}^2$ κα αυτό είναι άτοπο από την υπόθεση. Άρα δεν υπάρχει διάνυσμα $(a,b) \in \mathcal{V}$ με $(a,b) \notin \mathcal{L}$, δηλαδή $\mathcal{V} \subseteq \Sigma$.

Συνοψίζοντας, δείξαμε ότι $\mathcal{V} = \mathcal{L}$, δηλαδή κάθε υπόχωρος $\mathcal{V}$ του $\mathbb{K}^2$ με $\mathcal{V} \neq \big\{\vec{0}\big\}, \mathbb{K}^2$ είναι της μορφής $\mathcal{L}$ ή ισοδύναμα $\mathcal{V} = \big\{(x,y) \in \mathbb{K}^2 \mid ax + by = 0\big\}$, για κάποιο μη μηδενικό διάνυσμα $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.

Άρα οι υπόχωροι του $\mathbb{K}^2$ είναι οι εξής:

(1) $\big\{\vec{0}\big\}$.
Γεωμετρικά: η αρχή των αξόνων στο επίπεδο.

(2) $\mathbb{K}^2$.
Γεωμετρικά: όλο το επίπεδο.

(3) $\big\{(x,y) \in \mathbb{K}^2 \mid ax + by = 0\big\}$, για κάποιο μη μηδενικό διάνυσμα $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.
Γεωμετρικά: μια ευθεία στο επίπεδο η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

■

Άσκηση 17. *Να εξετασθεί ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathsf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ είναι υπόχωροι:*

(1) $\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \mid b = a + c \right\}$

(2) $\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \mid c > 0 \right\}$

Λύση. (1) Θα έχουμε:

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \mid b = a + c \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+c & c \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \mid a, c, d \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & a & c \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c & c \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \mid a, c, d \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \mid a, c, d \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$\left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \mid a, c, d \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

δηλαδή το υποσύνολο $\mathcal{V}$ συμπίπτει με τον υπόχωρο του $\mathsf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ο οποίος παράγεται από τους 2×3 πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, και επομένως είναι υπόχωρος του $\mathsf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

(2) Παρατηρούμε ότι το μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathsf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, δηλαδή ο μηδενικός 2×3 πίνακας, δεν ανήκει στο υποσύνολο $\mathcal{W}$ και επομένως το υποσύνολο $\mathcal{W}$ δεν είναι υπόχωρος του $\mathsf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. ■

Άσκηση 18. *Στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$, θεωρούμε τα διανύσματα*

$$\vec{x} = (1,1,0) \quad \textit{και} \quad \vec{y} = (2,1,1)$$

Να βρεθεί μια αναγκαία και ικανή συνθήκη έτσι ώστε το διάνυσμα $\vec{z} = (a,b,c)$ να ανήκει στον υπόχωρο $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ του $\mathbb{R}^3$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$.

Λύση. Έστω ότι $\vec{z} = (a,b,c) \in \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$. Τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε:

$$\vec{z} = (a,b,c) = \lambda\vec{x} + \kappa\vec{y} = \lambda(1,1,0) + \kappa(2,1,1) = (\lambda,\lambda,0) + (2\kappa,\kappa,\kappa) = (\lambda + 2\kappa, \lambda + \kappa, \kappa)$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\lambda + 2\kappa = a, \qquad \lambda + \kappa = b, \qquad \kappa = c$$

Αφαιρώντας την δεύτερη σχέση από την πρώτη, έχουμε $\kappa = a - b$ και άρα από την τρίτη έπεται ότι $a - b = c$ ή

$$a = b + c$$

Αντίστροφα, έστω ότι για το διάνυσμα $\vec{z} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, ισχύει ότι $a = b + c$. Τότε

$$(a-2c)\vec{x}+c\vec{y} = (a-2c)(1,1,0)+c(2,1,1) = (a-2c,a-2c,0)+(2c,c,c) = (a-2c+2c,a-2c+c,c) = (a,b,c) = \vec{z}$$

Η τελευταία σχέση δείχνει το διάνυσμα $\vec{z} = (a,b,c)$ ανήκει στον υπόχωρο $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ του $\mathbb{R}^3$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$.

Επομένως: το διάνυσμα $\vec{z} = (a,b,c)$ ανήκει στον υπόχωρο $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ του $\mathbb{R}^3$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ αν και μόνον αν $a = b + c$. ■

Άσκηση 19. *Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ πάνω από το $\mathbb{R}$ και τα παρακάτω υποσύνολά του:*

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

και

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & c+d \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι τα υποσύνολα $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ είναι υπόχωροι του $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.*
(2) *Να βρεθεί η μορφή των στοιχείων του υποχώρου $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$.*

Λύση. (1) Έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \left\{\begin{pmatrix}0 & a\\ a & b\end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix}0 & a\\ a & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & b\end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}\\
&= \left\{a\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}\\
&= \left\langle \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\rangle
\end{aligned}$$

δηλαδή ο $\mathcal{V}$ παράγεται από τους πίνακες

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Παρόμοια:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W} &= \left\{\begin{pmatrix}0 & c\\ d & c+d\end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid c, d \in \mathbb{R}\right\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix}0 & c\\ 0 & c\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ d & d\end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid c, d \in \mathbb{R}\right\}\\
&= \left\{c\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid c, d \in \mathbb{R}\right\}\\
&= \left\langle \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\rangle
\end{aligned}$$

δηλαδή ο $\mathcal{W}$ παράγεται από τους πίνακες

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Συνεπώς οι $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ είναι υπόχωροι του $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.

(2) Έστω $A = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$, δηλαδή $A \in \mathcal{V}$ και $A \in \mathcal{W}$. Τότε έχουμε

$$\begin{cases} A \in \mathcal{V} & \Longrightarrow \quad a = 0 \quad \text{και} \quad b = c\\ A \in \mathcal{W} & \Longrightarrow \quad a = 0 \quad \text{και} \quad d = c + b \Rightarrow d = 2b\end{cases}$$

και άρα $A = \begin{pmatrix}0 & b\\ b & 2b\end{pmatrix}$. Επομένως η περιγραφή του υποχώρου $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ είναι η ακόλουθη:

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \left\{\begin{pmatrix}0 & b\\ b & 2b\end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid b \in \mathbb{R}\right\} = \left\{b\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid b \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right\rangle \qquad \blacksquare$$

Παρατήρηση 1. *Η Άσκηση* **19** *[όπως και οι Ασκήσεις* **12** *και* **17**(1)*] θα μπορούσε να λυθεί και με χρήση του Ορισμού. Η παραπάνω λύση δείχνει επιπρόσθετα ότι τα σύνολα $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ είναι υπόχωροι οι οποίοι παράγονται από συγκεκριμένα διανύσματα.*

Υπενθυμίζουμε ότι, γενικά, η ένωση υπόχωρων ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$ δεν είναι υπόχωρος του $\mathcal{E}$. Η επόμενη Άσκηση δίνει έναν χαρακτηρισμό για το πότε η ένωση δύο υπόχωρων ενός διανυσματικού χώρου είναι υπόχωρος.

Άσκηση 20. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ και $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ δύο υπόχωροί του. Να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Η ένωση $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ των συνόλων $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{E}$.*
(2) *Είτε $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ είτε $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$.*

Να συμπεράνετε ότι δεν υπάρχει $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος ο οποίος είναι ένωση δύο γνήσιων υπόχωρών του.

Λύση. (2) $\Longrightarrow$ (1) Αν $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$, τότε προφανώς $\mathcal{V} \cup \mathcal{W} = \mathcal{W}$, και άρα η ένωση $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ είναι υπόχωρος διότι ο $\mathcal{W}$ είναι υπόχωρος. Παρόμοια αν $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$, τότε προφανώς $\mathcal{V} \cup \mathcal{W} = \mathcal{V}$, και άρα η ένωση $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ είναι υπόχωρος διότι ο $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Έστω ότι η ένωση $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ των συνόλων $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{E}$.

(I) Υποθέτουμε ότι $\mathcal{V} \nsubseteq \mathcal{W}$. Τότε υπάρχει ένα διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{V}$ το οποίο δεν ανήκει στον $\mathcal{W}$: $\vec{x} \notin \mathcal{W}$. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$.

• Θεωρούμε τυχόν διάνυσμα $\vec{y} \in \mathcal{W}$. Θα δείξουμε ότι $\vec{y} \in \mathcal{V}$.

Πραγματικά τότε τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ ανήκουν προφανώς στην ένωση $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$. Επειδή το σύνολο $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{E}$, έπεται ότι το διάνυσμα $\vec{x} + \vec{y}$ ανήκει στην ένωση $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. Επομένως

$$\text{είτε} \quad \text{(a)} \;\; \vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{W} \quad \text{ή} \quad \text{(b)} \;\; \vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{V}$$

(a) Αν $\vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{W}$, τότε επειδή $\vec{y} \in \mathcal{W}$ και το $\mathcal{W}$ είναι υπόχωρος, το διάνυσμα $(\vec{x} + \vec{y}) - \vec{y} = \vec{x}$ θα ανήκει στον $\mathcal{W}$. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι $\vec{x} \notin \mathcal{W}$.
(b) Άρα $\vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{V}$. Τότε επειδή $\vec{x} \in \mathcal{V}$ και το $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος, το διάνυσμα $(\vec{x} + \vec{y}) - \vec{x} = \vec{y}$ θα ανήκει στον $\mathcal{V}$. Άρα δείξαμε ότι το διάνυσμα $\vec{y}$ του $\mathcal{W}$ είναι και διάνυσμα του $\mathcal{V}$.

Επομένως δείξαμε ότι αν $\mathcal{V} \nsubseteq \mathcal{W}$, τότε αναγκαστικά θα έχουμε $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$.

(II) Αν $\mathcal{W} \nsubseteq \mathcal{V}$, τότε εργαζόμενοι παρόμοια δείχνουμε ότι τότε αναγκαστικά θα έχουμε $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$. Άρα δείξαμε ότι είτε $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ είτε $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$.

Έστω $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ δύο γνήσιοι υπόχωροι ενός $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$. Αν $\mathcal{E} = \mathcal{V} \bigcup \mathcal{W}$, τότε επειδή η ένωση $\mathcal{V} \bigcup \mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{E}$, από το πρώτο μέρος προκύπτει ότι είτε $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ είτε $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. Όμως αν $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$, τότε $\mathcal{V} \bigcup \mathcal{W} = \mathcal{W}$ και άρα θα έχουμε $\mathcal{E} = \mathcal{V} \bigcup \mathcal{W} = \mathcal{W}$ και αυτό είναι άτοπο διότι ο υπόχωρος $\mathcal{W}$ είναι γνήσιος. Παρόμοια, αν $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$, τότε $\mathcal{V} \bigcup \mathcal{W} = \mathcal{V}$ και άρα θα έχουμε $\mathcal{E} = \mathcal{V} \bigcup \mathcal{W} = \mathcal{V}$ και αυτό είναι άτοπο διότι ο υπόχωρος $\mathcal{V}$ είναι γνήσιος. Επομένως καταλήξαμε σε άτοπο υποθέτοντας ότι υπάρχουν γνήσιοι υπόχωρου του $\mathcal{E}$ των οποίων η ένωση συμπίπτει με τον $\mathcal{E}$. Συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει διανυσματικός χώρος ο οποίος είναι ένωση δύο γνήσιων υπόχωρών του. ■

Άσκηση 21. *Έστω ότι $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, όπου $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, και έστω ότι $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3$ είναι υπόχωροι του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι:*

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \cup \mathcal{V}_3 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, k = 1, 2, 3 : \quad \mathcal{V}_k = \mathcal{E}$$

δηλαδή δεν υπάρχει $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος ο οποίος είναι ένωση τριών γνήσιων υπόχωρών του.

Υπάρχουν όμως σώματα $\mathbb{K} \notin \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ και $\mathbb{K}$-διανυσματικοί χώροι οι οποίοι είναι ένωση τριών γνήσιων υπόχωρων.

Λύση. (1) Υποθέτουμε ότι $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2 \cup \mathcal{V}_3$. Τότε $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \cup \mathcal{V}_3 = \mathcal{V}_2 \cup \mathcal{V}_3$. Τότε η ένωση $\mathcal{V}_2 \cup \mathcal{V}_3$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{E}$ και άρα από την Άσκηση 20 έπεται ότι $\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_3$ ή $\mathcal{V}_3 \subseteq \mathcal{V}_2$. Αν $\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_3$, τότε προφανώς $\mathcal{E} = \mathcal{V}_2 \cup \mathcal{V}_3 = \mathcal{V}_3$. Αν $\mathcal{V}_3 \subseteq \mathcal{V}_2$, τότε προφανώς $\mathcal{E} = \mathcal{V}_2 \cup \mathcal{V}_3 = \mathcal{V}_3$.

Παρόμοια αν $\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_3$, τότε προκύπτει ότι $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1$ ή $\mathcal{E} = \mathcal{V}_3$, και αν $\mathcal{V}_3 \subseteq \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$, τότε προκύπτει ότι $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1$ ή $\mathcal{E} = \mathcal{V}_2$.

Άρα δείξαμε ότι αν ένας από τους υπόχωρους $\mathcal{V}_i$, $i = 1, 2, 3$, περιέχεται στην ένωση των δύο άλλων υπόχωρων, τότε κάποιος από τους υπόχωρους $\mathcal{V}_i$ συμπίπτει με τον $\mathcal{E}$.

(2) Υποθέτουμε ότι κανένας από τους υπόχωρους $\mathcal{V}_i$, $i = 1, 2, 3$, δεν περιέχεται στην ένωση των δύο άλλων υπόχωρων, δηλαδή:

$$\mathcal{V}_1 \nsubseteq \mathcal{V}_2 \cup \mathcal{V}_3, \qquad \mathcal{V}_2 \nsubseteq \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_3, \qquad \mathcal{V}_3 \nsubseteq \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \tag{$*$}$$

Ιδιαίτερα αυτό σημαίνει ότι και οι τρεις υπόχωροι $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, και $\mathcal{V}_3$ είναι γνήσιοι. Με βάση την παραπάνω υπόθεση θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Έστω $\vec{x} \notin \mathcal{V}_3$ και $\vec{y} \in \mathcal{V}_3 \setminus \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ (υπάρχει ένα τέτοιο $\vec{y}$ διότι $\mathcal{V}_3 \nsubseteq \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$). Παρατηρούμε ότι $\vec{x} \neq \vec{0}$ διότι αν $\vec{x} = \vec{0}$ τότε προφανώς θα είχαμε ότι $\vec{x} \in \mathcal{V}_3$ διότι το σύνολο $\mathcal{V}_3$ είναι υπόχωρος. Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{A} = \big\{\vec{y} + \kappa\vec{x} \in \mathcal{E} \mid 0 \neq \kappa \in \mathbb{K}\big\}$$

το οποίο έχει άπειρο πλήθος στοιχείων. Πράγματι, αν το σύνολο $\mathcal{A}$ έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, τότε για τις διάφορες τιμές του $0 \neq \kappa \in \mathbb{K}$, οι οποίες είναι άπειρες σε πλήθος διότι το σώμα $\mathbb{K}$ έχει άπειρο πλήθος μη-μηδενικών στοιχείων, θα έπρεπε να υπάρχουν μη-μηδενικά στοιχεία $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{K}$ με $\kappa_1 \neq \kappa_2$, έτσι ώστε $\vec{y} + \kappa_1\vec{x} = \vec{y} + \kappa_2\vec{x}$. Τότε προφανώς θα έχουμε $\kappa_1\vec{x} = \kappa_2\vec{x}$ δηλαδή ισοδύναμα $(\kappa_1 - \kappa_2)\vec{x} = \vec{0}$. Επειδή $\kappa_1 \neq \kappa_2$, έπεται ότι θα έχουμε $\vec{x} = \vec{0}$ και αυτό είναι άτοπο.

Επειδή $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \cup \mathcal{V}_3$, έπεται ότι τουλάχιστον ένα εκ των $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, $\mathcal{V}_3$ θα πρέπει να περιέχει άπειρο πλήθος διανυσμάτων τα οποπία ανήκουν στο σύνολο $\mathcal{A}$. Θα έχουμε:

(α΄) Έστω ότι ο υπόχωρος $\mathcal{V}_3$ περιέχει και ένα διάνυσμα $\vec{z} \in \mathcal{A}$ διαφορετικό από το $\vec{y}$. Τότε υπάρχει $0 \neq \kappa \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε $\vec{z} = \vec{y} + \kappa\vec{x} \in \mathcal{V}_3$. Επειδή $\vec{y} \in \mathcal{V}_3$ και το σύνολο $\mathcal{V}_3$ είναι υπόχωρος, έπεται ότι $\kappa\vec{x} \in \mathcal{V}_3$. Επειδή $\kappa \neq 0$, θα έχουμε ότι $\vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = (\kappa^{-1}\kappa)\vec{x} \in \mathcal{V}_3$ και αυτό είναι άτοπο. Άρα ο υπόχωρος $\mathcal{V}_3$ δεν μπορεί να περιέχει άπειρο πλήθος διανυσμάτων τα οποία ανήκουν στο υποσύλο $\mathcal{A}$.

(β΄) Έστω ότι ο υπόχωρος $\mathcal{V}_1$ ή ο υπόχωρος $\mathcal{V}_2$ περιέχει δύο διανύσματα $\vec{z}, \vec{w} \in \mathcal{A}$ με $\vec{z} \neq \vec{w}$. Τότε υπάρχουν μη-μηδενικά στοιχεία $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{K}$, αναγκαστικά με $\kappa_1 \neq \kappa_2$ διότι $\vec{z} \neq \vec{w}$ έτσι ώστε: $\vec{z} = \vec{y} + \kappa_1\vec{x}$ και $\vec{w} = \vec{y} + \kappa_2\vec{x}$. Τότε επειδή το υποσύνολο $\mathcal{V}_1$ ή το υποσύνολο $\mathcal{V}_2$ είναι υπόχωρος θα έχουμε αντίστοιχα ότι το διάνυσμα

$$(\kappa_2 - \kappa_1)\vec{y} = \kappa_2(\vec{y} + \kappa_1\vec{x}) - \kappa_1(\vec{y} + \kappa_2\vec{x}) = \kappa_2\vec{z} - \kappa_1\vec{w}$$

ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{V}_1$ ή στον υπόχωρο $\mathcal{V}_2$. Επειδή $\kappa_2 - \kappa_1 \neq 0$ προκύπτει τότε ότι το διάνυσμα $\vec{y}$ ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{V}_1$ ή στον υπόχωρο $\mathcal{V}_2$. Αυτό είναι άτοπο από την επιλογή του $\vec{y}$.

Επομένως σε κάθε περίπτωση η υπόθεση $(*)$ μας οδηγεί σε άτοπο.

Άρα η μόνη δυνατή εκδοχή είναι ότι ένας από τους υπόχωρους $\mathcal{V}_i$, $i = 1, 2, 3$, περιέχεται στην ένωση των δύο άλλων υπόχωρων ή ισοδύναμα ότι κάποιος από τους υπόχωρους $\mathcal{V}_i$ συμπίπτει με τον $\mathcal{E}$.

Η παραπάνω απόδειξη βασίζεται στο γεγονός ότι το σώμα $\mathbb{K} \in \big\{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\big\}$ έχει άπειρο πλήθος στοιχείων. Υποθέτουμε τώρα ότι $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2 = \big\{[0]_2, [1]_2\big\}$, το σώμα των κλάσεων υπολοίπων $\bmod 2$, το οποίο έχει 2 στοιχεία, και έστω ο $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος $\mathcal{E} = \mathbb{K}^2$. Τότε

$$\mathcal{E} = \big\{([0]_2, [0]_2),\ ([0]_2, [1]_2),\ ([1]_2, [0]_2),\ ([1]_2, [1]_2)\big\}$$

Θέτουμε:

$$\mathcal{V}_1 = \big\langle([0]_2, [1]_2)\big\rangle, \qquad \mathcal{V}_2 = \big\langle([1]_2, [0]_2)\big\rangle, \qquad \mathcal{V}_3 = \big\langle([1]_2, [1]_2)\big\rangle$$

να είναι οι υπόχωροι του $\mathcal{E}$ οι οποίοι παράγονται από τα διανύσματα $([0]_2, [1]_2)$, $([1]_2, [0]_2)$, και $([1]_2, [1]_2)$ αντίστοιχα. Τότε προφανώς έχουμε:

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \cup \mathcal{V}_3$$

Επομένως, αν το σώμα $\mathbb{K}$ έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, τότε υπάρχουν διανυσματικοί χώροι $\mathcal{E}$ υπεράνω του $\mathbb{K}$ οι οποίοι είναι ένωση τριών υπόχωρων. ∎

Παρατήρηση 2. *Παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με την Άσκηση 20, ανεξάρτητα από το σώμα $\mathbb{K}$, δεν υπάρχει διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$ ο οποίος είναι ένωση δύο γνήσιων υποχωρών του. Σύμφωνα με την Άσκηση 21, εξαρτάται από το σώμα $\mathbb{K}$, για την ακρίβεια από το αν πλήθος των στοιχείων του είναι πεπερασμένο ή άπειρο, αν υπάρχει διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$ ο οποίος είναι ένωση τριών γνήσιων υποχωρών του.*

Άσκηση 22. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ και έστω $\big\{\mathcal{V}_i\big\}_{i=0}^{\infty}$ μια συλλογή υπόχωρων του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε:*

$$\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2 \subseteq \cdots\cdots \subseteq \mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{V}_{n+1} \subseteq \cdots$$

Να δειχθεί ότι η ένωση $\mathcal{V} = \bigcup_{i\geq 0} \mathcal{V}_i$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$.

Λύση. Επειδή κάθε $\mathcal{V}_i$, $i \geq 0$, είναι υπόχωρος του $\mathcal{E}$, θα έχουμε $\vec{0} \in \mathcal{V}_i$, $\forall i \geq 0$, και επομένως $\vec{0} \in \mathcal{V}$.

Έστω $\vec{x}, \vec{y}$ δύο διανύσματα του $\mathcal{V}$. Τότε υπάρχουν δείκτες $n, m \geq 0$ έτσι ώστε $\vec{x} \in \mathcal{V}_n$ και $\vec{y} \in \mathcal{V}_m$. Θέτοντας $k = \max\big\{n, m\big\}$, έπεται ότι $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{V}_k$ και $\mathcal{V}_m \subseteq \mathcal{V}_k$ και επομένως $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}_k$. Επειδή ο $\mathcal{V}_k$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{E}$, έπεται ότι $\vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{V}_k$. Επειδή $\mathcal{V}_k \subseteq \mathcal{V}$, θα έχουμε $\vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{V}$.

Τέλος, έστω $\lambda \in \mathbb{K}$ και $\vec{x} \in \mathcal{V}$. Τότε υπάρχει δείκτης $n \geq 0$, έτσι ώστε $\vec{x} \in \mathcal{V}_n$. Επειδή ο $\mathcal{V}_n$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{E}$, έπεται ότι $\lambda \cdot \vec{x} \in \mathcal{V}_n$. Επειδή $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{V}$, θα έχουμε $\lambda \cdot \vec{x} \in \mathcal{V}$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι το υποσύνολο $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$. ■

Άσκηση 23. *Να προσδιοριστούν όλοι οι διανυσματικοί χώροι $\mathcal{E}$ οι οποίοι ικανοποιούν την ακόλουθη ιδιότητα:*

$$\text{Αν } \mathcal{V}, \mathcal{W} \text{ είναι υπόχωροι του } \mathcal{E}, \text{ τότε: } \quad \text{είτε } \ \mathcal{V} \subseteq \mathcal{W} \ \text{ είτε } \ \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V} \qquad (\dagger)$$

Λύση. Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος ο οποίος ικανοποιεί την ιδιότητα $(\dagger)$.

Αν $\mathcal{E} = \big\{\vec{0}\big\}$, τότε προφανώς ο μόνος υπόχωρος του $\mathcal{E}$ είναι ο $\mathcal{E}$, ο οποίος συμπίπτει με τον μηδενικό υπόχωρο $\big\{\vec{0}\big\}$, και η ιδιότητα $(\dagger)$ ικανοποιείται τετριμμένα.

Υποθέτουμε ότι $\mathcal{E} \neq \big\{\vec{0}\big\}$. Τότε υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Θα δείξουμε ότι

$$\mathcal{E} = \langle \vec{x}\,\rangle = \big\{k\vec{x} \in \mathcal{E} \mid k \in \mathbb{K}\big\}$$

Δηλαδή θα δείξουμε ότι κάθε $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος ο οποίος ικανοποιεί την ιδιότητα $(\dagger)$ συμπίπτει με τον υπόχωρο ο οποίος παράγεται από κάθε μη-μηδενικό διάνυσμά του.

Έστω $\vec{y} \in \mathcal{E}$, και έστω $\langle \vec{y}\,\rangle = \big\{k\vec{y} \in \mathcal{E} \mid k \in \mathbb{K}\big\}$. Τότε από την ιδιότητα $(\dagger)$ έχουμε: είτε $\langle \vec{x}\,\rangle \subseteq \langle \vec{y}\,\rangle$ είτε $\langle \vec{y}\,\rangle \subseteq \langle \vec{x}\,\rangle$.

(1) Αν $\langle \vec{y}\,\rangle \subseteq \langle \vec{x}\,\rangle$, τότε $\vec{y} \in \langle \vec{x}\,\rangle$.
(2) Αν $\langle \vec{x}\,\rangle \subseteq \langle \vec{y}\,\rangle$, τότε $\vec{x} \in \langle \vec{y}\,\rangle$ και άρα υπάρχει $k \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε $\vec{x} = k\vec{y}$. Επειδή $\vec{x} \neq \vec{0}$ έπεται ότι $k \neq 0$ και τότε θα έχουμε: $\vec{y} = k^{-1}\vec{x} \in \langle \vec{x}\,\rangle$.

Άρα σε κάθε περίπτωση $\vec{y} \in \langle \vec{x}\,\rangle$ και επομένως $\mathcal{E} = \langle \vec{x}\,\rangle$.

Αντίστροφα, έστω ότι $\mathcal{E}$ είναι ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος για τον οποίο ισχύει ότι $\mathcal{E} = \langle \vec{x}\,\rangle$, για κάποιο $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Θα δείξουμε ότι ισχύει η ιδιότητα $(\dagger)$, δείχνοντας ότι οι μόνοι υπόχωροι του $\mathcal{E}$ είναι οι $\big\{\vec{0}\big\}$ και $\mathcal{E}$. Έστω $\mathcal{V}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$ και υποθέτουμε ότι $\mathcal{V} \neq \big\{\vec{0}\big\}$. Τότε υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{y} \in \mathcal{V}$. Επειδή $\mathcal{E} = \langle \vec{x}\,\rangle$, θα έχουμε $\vec{y} = k\vec{x}$ για κάποιο $k \in \mathbb{K}$ το οποίο είναι μη-μηδενικό διότι διαφορετικά θα είχαμε $\vec{y} = \vec{0}$ το οποίο είναι άτοπο από την επιλογή του $\vec{y}$. Τότε θα έχουμε $\vec{x} = k^{-1}\vec{y} \in \langle \vec{y}\rangle$. Αν $\vec{z} \in \mathcal{E}$, τότε θα έχουμε $\vec{z} = \lambda\vec{x}$ και τότε $\vec{z} = \lambda\vec{x} = \lambda(k\,\vec{y} = (\lambda\,k)\,\vec{y} \in \langle \vec{y}\rangle$. Αυτό σημαίνει ότι $\mathcal{E} \subseteq \langle \vec{y}\rangle$ και επομ·ενω $\mathcal{E} = \langle \vec{y}\rangle$. Επειδή $\vec{y} \in \mathcal{V}$, θα έχουμε προφανώς $\langle \vec{y}\rangle \subseteq \mathcal{V}$ και επομένως καταλήγουμε ότι $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V}$, δηλαδή $\mathcal{E} = \mathcal{V}$. Επομένως δείξαμε ότι οι μόνοι υπόχωροι του $\mathcal{E}$ είναι οι $\big\{\vec{0}\big\}$ και $\mathcal{E}$. Προφανώς τότε ικανοποιείται η συνθήκη $(\dagger)$ στον $\mathcal{E}$.

Συνοψίζοντας, δείξαμε ότι: οι μόνοι $\mathbb{K}$-διανυσματικοί χώροι οι οποίοι ικανοποιούν την ιδιότητα $(\dagger)$ είναι[4] οι $\mathbb{K}$-διανυσματικοί χώροι με δύο υποχώρους $\big\{\vec{0}\big\}$ και $\mathcal{E}$, ισοδύναμα είναι είτε ο μηδενικός χώρος $\big\{\vec{0}\big\}$ είτε κάθε $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος $\mathcal{E}$ για τον οποίο ισχύει ότι $\mathcal{E} = \langle \vec{x}\,\rangle$, για ένα (ή κάθε) μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$. ■

[4] Θα δούμε αργότερα ότι οι μόνοι $\mathbb{K}$-διανυσματικοί χώροι οι οποίοι ικανοποιούν την ιδιότητα $(\dagger)$ είναι είτε ο μηδενικός υπόχωρος είτε κάθε $\mathbb{K}$-διανυσματικος χώρος με διάσταση ίση με 1, δηλαδή, με ακρίβεια ισομορφίας, το σώμα $\mathbb{K}$.

Άσκηση 24. *Έστω $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots$ μια ακολουθία διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι το υποσύνολο*

$$\mathcal{V} = \big\{\lambda_{i_1}\vec{x}_{i_1} + \lambda_{i_2}\vec{x}_{i_2} + \cdots + \lambda_{i_n}\vec{x}_{i_n} \in \mathcal{E} \mid \lambda_{i_j} \in \mathbb{K},\ i_j \geq 0,\ 1 \leq j \leq n\big\}$$

είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$.

Λύση. Θέτουμε:

$$\mathcal{V}_0 = \langle \vec{x}_0 \rangle,\ \ \mathcal{V}_1 = \langle \vec{x}_0, \vec{x}_1 \rangle,\ \ \ \mathcal{V}_2 = \langle \vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle,\ \cdots\cdots,\ \mathcal{V}_n = \langle \vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n \rangle,\ \cdots$$

Επειδή

$$\big\{\vec{x}_0\big\} \subseteq \big\{\vec{x}_0, \vec{x}_1\big\} \subseteq \big\{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2\big\} \subseteq \cdots\cdots$$

έπεται εύκολα, βλέπε και την Άσκηση 25, ότι:

$$\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2 \subseteq \cdots\cdots \subseteq \mathcal{V}_n \subseteq \cdots$$

Τότε από την Άσκηση 22 προκύπτει ότι το υποσύνολο $\bigcup_{i\geq 0} \mathcal{V}_i$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$. Ισχυριζόμαστε ότι $\mathcal{V} = \bigcup_{i\geq 0} \mathcal{V}_i$. Πραγματικά έστω $\vec{x} \in \mathcal{V}$, τότε $\vec{x} = \lambda_{i_1}\vec{x}_{i_1} + \lambda_{i_2}\vec{x}_{i_2} + \cdots + \lambda_{i_n}\vec{x}_{i_n}$, για κάποια $\lambda_{i_j} \in \mathbb{K}$, όπου $i_j \geq 0$, $1 \leq j \leq n$. Θέτοντας $k = \max\big\{i_1, i_2, \cdots, i_n\big\}$, έπεται ότι $\big\{\vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2}, \cdots, \vec{x}_{i_n}\big\} \subseteq \big\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k\big\} \subseteq \mathcal{V}_k \subseteq \bigcup_{i\geq 0} \mathcal{V}_i$. Επειδή το υποσύνολο $\bigcup_{i\geq 0} \mathcal{V}_i$ είναι υπόχωρος, έπεται ότι $\vec{x} \in \bigcup_{i\geq 0} \mathcal{V}_i$ και επομένως $\mathcal{V} \subseteq \bigcup_{i\geq 0} \mathcal{V}_i$.

Αντίστροφα, έστω $\vec{x} \in \bigcup_{i\geq 0} \mathcal{V}_i$. Τότε υπάρχει κάποιος δείκτης n έτσι ώστε $\vec{x} \in \mathcal{V}_n = \langle \vec{x}_0, \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n \rangle$. Εξ' ορισμού τότε $\vec{x} = \lambda_0\vec{x}_0 + \lambda_1\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n$. Αυτό σημαίνει ότι $\vec{x} \in \mathcal{V}$ και επομένως $\bigcup_{i\geq 0} \mathcal{V}_i \subseteq \mathcal{V}$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι $\mathcal{V} = \bigcup_{i\geq 0} \mathcal{V}_i$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$. ∎

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και $\mathcal{X} = \big\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\big\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{E}$, τότε οι ακόλουθες πράξεις επί των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$, καλούνται **στοιχειώδεις πράξεις επί των διανυσμάτων του συνόλου** $\mathcal{X}$:

(1) Αντικατάσταση του διανύσματος $\vec{x}_i$ με το διάνυσμα $\vec{x}_i + \lambda\vec{x}_j$:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall i, j = 1, 2, \cdots, n: \quad \vec{x}_i \longmapsto \vec{x}_i + \lambda\vec{x}_j$$

(2) Αμοιβαία εναλλαγή των διανυσμάτων $\vec{x}_i$ και $\vec{x}_j$:

$$\forall i, j = 1, 2, \cdots, n: \quad \vec{x}_i \longleftrightarrow \vec{x}_j$$

(3) Αντικατάσταση του διανύσματος $\vec{x}_i$ με το διάνυσμα $\lambda\vec{x}_i$:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \neq 0,\ \forall i = 1, 2, \cdots, n: \quad \vec{x}_i \longmapsto \lambda\vec{x}_i$$

Υπενθυμίζουμε ότι: ο υπόχωρος του $\mathcal{E}$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ παραμένει αμετάβλητος μετά από την εφαρμογή πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πράξεων επι των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $B \subseteq A$ είναι ένα υποσύνολο του συνόλου A, τότε:

$$A \setminus B = \big\{a \in A \mid a \notin B\big\}$$

συμβολίζει το σύνολο των στοιχείων του A τα οποία δεν ανήκουν στο υποσύνολο B.

Άσκηση 25. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και $\mathcal{X} = \big\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\big\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{E}$. Συμβολίζουμε με $\langle \mathcal{X} \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n \rangle$ τον υπόχωρο του $\mathcal{E}$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ του συνόλου $\mathcal{X}$.*

(1) *Αν $\mathcal{Y}$ είναι ένα τυχόν υποσύνολο του $\mathcal{X}$, τότε: $\langle \mathcal{Y} \rangle \subseteq \langle \mathcal{X} \rangle$.*
(2) *Αν $\mathcal{Y}$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\langle \mathcal{Y} \rangle$, τότε: $\langle \mathcal{Y} \rangle \subseteq \langle \mathcal{X} \rangle$.*
(3) *Αν υπάρχει $i = 1, 2, \cdots, n$: $\vec{x}_i \in \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \cdots, \vec{x}_n \rangle$, τότε:*

$$\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_i, \vec{x}_{i+1}, \cdots, \vec{x}_n \rangle = \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \cdots, \vec{x}_n \rangle$$

(4) *Έστω ότι $\mathcal{Y}$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathcal{X}$ και υποθέτουμε ότι κάθε διάνυσμα του $\mathcal{Y}$ ανήκει στον υπόχωρο ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα του υποσυνόλου $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$, δηλαδή $\mathcal{Y} \subseteq \langle \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y} \rangle$. Τότε:*

$$\langle \mathcal{X} \rangle = \langle \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y} \rangle$$

Λύση. (1) Χωρίς βλάβη της γενικότητας[5], μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathcal{Y} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k\}$, για κάποιο $k = 1, 2, \cdots, n$.

Έστω $\vec{y} \in \langle \mathcal{Y} \rangle$. Τότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $\vec{y} = \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{x}_k$ και τότε:

$$\vec{y} = \lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{x}_k = \lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{x}_k + 0\vec{x}_{k+1} + \cdots + 0\vec{x}_n \ \in \ \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n \rangle = \langle \mathcal{X} \rangle$$

Άρα $\langle \mathcal{Y} \rangle \subseteq \langle \mathcal{X} \rangle$.

(2) Έστω $\mathcal{Y} = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_m\} \subseteq \langle \mathcal{X} \rangle$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\langle \mathcal{X} \rangle$, και έστω $\vec{y} \in \langle \mathcal{Y} \rangle$. Τότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $\vec{y} = \lambda_1\vec{y}_1 + \lambda_2\vec{y}_2 + \cdots + \lambda_m\vec{y}_m$. Θα δείξουμε ότι: $\vec{y} \in \langle \mathcal{X} \rangle$.

Επειδή, $\forall i = 1, 2, \cdots, m$, $\vec{y}_i \in \langle \mathcal{X} \rangle$, έπεται ότι υπάρχουν $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in} \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε:

$$\vec{y}_i = a_{i1}\vec{x}_1 + a_{i2}\vec{x}_2 + \cdots + a_{in}\vec{x}_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\vec{x}_k$$

Τότε θα έχουμε:

$$\vec{y} = \lambda_1\vec{y}_1 + \lambda_2\vec{y}_2 + \cdots + \lambda_m\vec{y}_m = \lambda_1\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\vec{x}_k + \lambda_2\sum_{k=1}^{n} a_{2k}\vec{x}_k + \cdots + \lambda_m\sum_{k=1}^{n} a_{mk}\vec{x}_k = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\vec{x}_k\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ik}\right)\vec{x}_k = \left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{i1}\right)\vec{x}_1 + \left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{i2}\right)\vec{x}_2 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{in}\right)\vec{x}_n \ \in \ \langle \mathcal{X} \rangle$$

Άρα $\langle \mathcal{Y} \rangle \subseteq \langle \mathcal{X} \rangle$.

(3) Έστω $\mathcal{Y} = \mathcal{X} \setminus \{\vec{x}_i\} = \{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \cdots \vec{x}_n\}$. Επειδή από την υπόθεση $\vec{x}_i \in \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \cdots, \vec{x}_n \rangle$, έπεται ότι υπάρχουν αριθμοί $\kappa_1, \cdots, \kappa_{i-1}, \kappa_{i+1}, \cdots, \kappa_n$ έτσι ώστε:

$$\vec{x}_i = \kappa_1\vec{x}_1 + \cdots + \kappa_{i-1}\vec{x}_{i-1} + \kappa_{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots \kappa_n\vec{x}_n \tag{$*$}$$

Επειδή $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$, από το μέρος (1) έπεται ότι $\langle \mathcal{Y} \rangle \subseteq \langle \mathcal{X} \rangle$. Έστω $\vec{x} \in \langle \mathcal{X} \rangle$. Τότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε:

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_i\vec{x}_i + \cdots \lambda_n\vec{x}_n \tag{$**$}$$

Από τις σχέσεις $(*)$ και $(**)$, έπεται ότι:

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_i(\kappa_1\vec{x}_1 + \cdots + \kappa_{i-1}\vec{x}_{i-1} + \kappa_{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots \kappa_n\vec{x}_n) + \cdots \lambda_n\vec{x}_n =$$

$$= (\lambda_1 + \kappa_1\lambda_i)\vec{x}_1 + \cdots + (\lambda_{i-1} + \kappa_{i-1}\lambda_i)\vec{x}_{i-1} + (\lambda_{i+1} + \kappa_{i+1}\lambda_i)\vec{x}_{i+1} + \cdots + (\lambda_n + \kappa_n\lambda_i)\vec{x}_n \ \in \ \langle \mathcal{Y} \rangle$$

Άρα δείξαμε ότι $\langle \mathcal{X} \rangle \subseteq \langle \mathcal{Y} \rangle$ και επομένως

$$\langle \mathcal{X} \rangle = \langle \mathcal{Y} \rangle$$

(4) Από τα μέρη (1) και (2), έπεται ότι $\langle \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y} \rangle \subseteq \langle \mathcal{X} \rangle$. Θα δείξουμε ότι $\langle \mathcal{X} \rangle \subseteq \langle \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y} \rangle$.

Όπως στο μέρος (1), χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathcal{Y} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k\}$, για κάποιο $k = 1, 2, \cdots, n$, και επομένως $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y} = \{\vec{x}_{k+1}, \cdots, \vec{x}_n\}$. Επειδή από την υπόθεση κάθε διάνυσμα του υποσυνόλου $\mathcal{Y}$ ανήκει στον υπόχωρο του $\mathcal{E}$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα του υποσυνόλου $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$, έπεται ότι $\forall i = 1, 2, \cdots, k$, υπάρχουν $a_{i\,k+1}, a_{i\,k+2}, \cdots, a_{i\,n} \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε:

$$\vec{x}_i = a_{i\,k+1}\vec{x}_{k+1} + a_{i\,k+2}\vec{x}_{k+2} + \cdots + a_{i\,n}\vec{x}_n = \sum_{j=k+1}^{n} a_{ij}\vec{x}_j, \qquad 1 \leq i \leq k \tag{$\dagger$}$$

Έστω τώρα $\vec{x} \in \langle \mathcal{X} \rangle$. Τότε υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ έτσι ώστε:

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{x}_k + \lambda_{k+1}\vec{x}_{k+1} + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n \tag{$\dagger\dagger$}$$

[5] Για παράδειγμα εφαρμόζοντας τις στοιχειώδεις πράξεις $\vec{x}_i \longleftrightarrow \vec{x}_j$ οι οποίες δεν αλλάζουν τον υπόχωρο ο οποίος παράγεται από τα εμπλεκόμενα διανύσματα.

Από τις σχέσεις (†) και (††), θα έχουμε:

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{x}_k + \lambda_{k+1}\vec{x}_{k+1} + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n =$$
$$= \lambda_1 \sum_{j=k+1}^{n} a_{1j}\vec{x}_j + \cdots + \lambda_k \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}\vec{x}_j + \lambda_{k+1}\vec{x}_{k+1} + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n =$$
$$= \lambda_1(a_{1\,k+1}\vec{x}_{k+1} + \cdots + a_{1\,n}\vec{x}_n) + \cdots + \lambda_k(a_{k\,k+1}\vec{x}_{k+1} + \cdots + a_{k\,n}\vec{x}_n) + \lambda_{k+1}\vec{x}_{k+1} + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n =$$
$$= (\lambda_1 a_{1\,k+1} + \cdots + \lambda_k a_{k\,k+1} + \lambda_{k+1})\vec{x}_{k+1} + \cdots + (\lambda_1 a_{1\,n} + \cdots + \lambda_k a_{k\,n} + \lambda_n)\vec{x}_n \ \in\ \langle \vec{x}_{k+1}, \cdots, \vec{x}_n = \langle \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}\rangle$$

Άρα δείξαμε ότι $\langle \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}\rangle \subseteq \langle \mathcal{X}\rangle$ και επομένως:

$$\langle \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}\rangle = \langle \mathcal{X}\rangle$$ ■

Άσκηση 26. *Να βρεθεί ο υπόχωρος που παράγεται από τα διανύσματα* $(3, 5, -4)$, $(-3, -2, 4)$, $(6, 1, -8)$ *τού* $\mathbb{R}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathbb{R}^3$.

Λύση. Θέτουμε

$$\vec{x} = (3, 5, -4), \quad \vec{y} = (-3, -2, 4), \quad \vec{z} = (6, 1, -8)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\vec{z} = (6, 1, -8) = -(3, 5, -4) - 3(-3, -2, 4) = -\vec{x} - 3\vec{y}$$

Σύμφωνα με το μέρος (3) της Άσκησης 25, έπεται ότι

$$\langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$$

Τότε θα έχουμε την ακόλουθη περιγραφή του υπόχωρου $\langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\rangle$:

$$\langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = \big\{\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le 2\big\} =$$
$$= \big\{\lambda_1(3, 5, -4) + \lambda_2(-3, -2, 4) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le 2\big\} =$$
$$= \big\{(3\lambda_1, 5\lambda_1, -4\lambda_1) + (-3\lambda_2, -2\lambda_2, 4\lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le 2\big\} =$$
$$= \big\{(3\lambda_1 - 3\lambda_2,\ 5\lambda_1 - 2\lambda_2,\ -4\lambda_1 + 4\lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le 2\big\}$$ ■

Άσκηση 27. *Έστω ότι* $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *είναι στοιχεία ενός σώματος* $\mathbb{K}$*, και θεωρούμε το ακόλουθο υποσύνολο του* $\mathbb{K}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathbb{K}^{n+1}$:

$$\mathcal{V} = \big\{(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x_{n+1} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n\big\}$$

Να δειχθεί ότι το υποσύνολο $\mathcal{V}$ *είναι ένας υπόχωρος του* $\mathbb{K}^{n+1}$.

Λύση. Περιγράφουμε αναλυτικά το υποσύνολο $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V} = \big\{(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x_{n+1} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n\big\} =$$
$$= \big\{(x_1, x_2, \cdots, x_n, a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{K}\big\}$$

Όμως:

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n, a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n) =$$
$$= (x_1, 0, 0, \cdots, 0, 0, a_1x_1) + (0, x_2, 0, \cdots, 0, 0, a_2x_2) + \cdots + (0, 0, 0, \cdots, x_{n-1}, 0, a_{n-1}x_{n-1}) +$$
$$+ (0, 0, 0, \cdots, 0, x_n, a_nx_n) =$$
$$= x_1(1, 0, 0, \cdots, 0, 0, a_1) + x_2(0, 1, 0, \cdots, 0, 0, a_2) + \cdots + x_{n-1}(0, 0, 0, \cdots, 1, 0, a_{n-1}) + x_n(0, 0, 0, \cdots, 0, 1, a_n)$$

Θεωρώντας τα ακόλουθα διανύσματα του $\mathbb{K}^{n+1}$:

$$\vec{a}_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0, 0, a_1), \quad \vec{a}_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0, 0, a_2), \quad \cdots\cdots, \quad \vec{a}_{n-1} = (0, 0, 0, \cdots, 1, 0, a_{n-1})$$
$$\vec{a}_n = (0, 0, 0, \cdots, 0, 1, a_n)$$

θα έχουμε:

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n, a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n) = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_{n-1}\vec{a}_{n-1} + x_n\vec{a}_n$$

και επομένως:

$$\mathcal{V} = \big\{(x_1, x_2, \cdots, x_n, a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{K}\big\} =$$
$$= \big\{x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_{n-1}\vec{a}_{n-1} + x_n\vec{a}_n \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{K}\big\} =$$
$$= \big\langle \vec{a}_1,\, \vec{a}_2,\, \cdots,\, \vec{a}_n \big\rangle$$

Δηλαδή το σύνολο $\mathcal{V}$ είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{K}^{n+1}$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $\vec{a}_1,\, \vec{a}_2,\, \cdots,\, \vec{a}_n$. ■

Άσκηση 28. *Έστω* $\mathsf{A}(\mathbb{R})$ *το σύνολο των ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Στο* $\mathsf{A}(\mathbb{R})$ *ορίζουμε πρόσθεση*

$$\begin{aligned} + \ : \mathsf{A}(\mathbb{R}) \times \mathsf{A}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathsf{A}(\mathbb{R}), \\ \big((a_n)_{n\in\mathbb{N}},\, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\,\big) &\longmapsto (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

και βαθμωτό πολλαπλασιασμό

$$\cdot \ : \mathbb{R} \times \mathsf{A}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathsf{A}(\mathbb{R}),\ \ (\lambda, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \longmapsto \lambda \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(1) *Να δειχθεί ότι η τριάδα* $(\mathsf{A}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *αποτελεί* $\mathbb{R}$*-διανυσματικό χώρο.*
(2) *Ας είναι* $\mathsf{A}_\Sigma(\mathbb{R})$ *το υποσύνολο τού* $\mathsf{A}(\mathbb{R})$ *που απαρτίζεται από τις ακολουθίες που συγκλίνουν σε κάποιον πραγματικό αριθμό. Ποιες γνωστές προτάσεις τού Απειροστικού Λογισμού εξασφαλίζουν ότι το* $\mathsf{A}_\Sigma(\mathbb{R})$ *είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος τού* $\mathsf{A}(\mathbb{R})$*;*

Λύση. (α΄) Υπενθυμιζουμε το ακόλουθο γνωστό αποτέλσμα από τη Θεωρία:

«*Έστω ότι* S *είναι ένα μη κενό σύνολο και ότι* $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ *είναι ένας* $\mathbb{K}$*-διανυσματικός χώρος. Το σύνολο* $\mathsf{Map}(S, \mathcal{V}) := \big\{f : S \to \mathcal{V}\big\}$ *των απεικονίσεων από το* S *στο* $\mathcal{V}$ *αποτελεί έναν* $\mathbb{K}$*-διανυσματικό χώρο με πράξη πρόσθεσης:*

$$+ : \mathsf{Map}(S, \mathcal{V}) \times \mathsf{Map}(S, \mathcal{V}) \longrightarrow \mathsf{Map}(S, \mathcal{V}), (f, g) \longmapsto f + g$$

όπου $f + g$ *είναι η απεικόνιση που ορίζεται ως*

$$f + g : S \longrightarrow \mathcal{V}, \quad s \longmapsto (f + g)(s) := f(s) + g(s), \forall s \in S$$

και πράξη βαθμωτού πολλαπλασιασμού

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathsf{Map}(S, \mathcal{V}) \to \mathsf{Map}(S, \mathcal{V}), (\lambda, f) \longmapsto \lambda \cdot f,$$

όπου $\lambda \cdot f$ *είναι η απεικόνιση που ορίζεται ως*

$$\lambda \cdot f : S \longrightarrow \mathcal{V}, \quad s \longmapsto (\lambda \cdot f)(s) := \lambda f(s), \forall s \in S$$ »

Επιλέγοντας ως S το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ και ως $\mathcal{V}$ τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}$, έχουμε ότι:

$$\mathsf{Map}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \mathsf{A}(\mathbb{R})$$

Πράγματι μπορούμε να ταυτίσουμε τα σύνολα $\mathsf{A}(\mathbb{R})$ και $\mathsf{Map}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ως εξής. Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathsf{A}(\mathbb{R})$, τότε η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ορίζει μια απεικόνιση $\mathsf{a}\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, όπου $\mathsf{a}(n) = a_n$. Αντίστροφα, αν $f \in \mathsf{Map}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, τότε η απεικόνιση f ορίζει μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathsf{A}(\mathbb{R})$, όπου $a_n = f(n)$.

Επομένως η τριάδα $(\mathsf{A}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$.

(β΄) Για να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathsf{A}_\Sigma(\mathbb{R})$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathsf{A}(\mathbb{R})$, πρέπει να εξασφαλίσουμε:

(1) Ότι το $\mathsf{A}_\Sigma(\mathbb{R})$ είναι μη κενό. Πράγματι το όριο κάθε σταθερής ακολουθίας πραγματικών αριθμών, δηλαδή κάθε ακολουθίας τής μορφής $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}, a_i = c \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}$, είναι ο αριθμός c. Συνεπώς, οι σταθερές ακολουθίες ανήκουν στο $\mathsf{A}_\Sigma(\mathbb{R})$ και γι΄ αυτό δεν είναι το κενό σύνολο.
(2) Ότι, αν $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathsf{A}_\Sigma(\mathbb{R})$ και $(b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathsf{A}_\Sigma(\mathbb{R})$, τότε και η ακολουθία $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathsf{A}_\Sigma(\mathbb{R})$, δηλαδή ότι αν η ακολουθία $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $r_1 \in \mathbb{R}$ και η ακολουθία $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $r_2 \in \mathbb{R}$, τότε το άθροισμά τους $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $r_1 + r_2 \in \mathbb{R}$. Συνεπώς το $\mathsf{A}_\Sigma(\mathbb{R})$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση τού $(\mathsf{A}(\mathbb{R})$.

(3) Ότι, αν $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathsf{A}_\Sigma(\mathbb{R})$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε και η ακολουθία $\lambda \cdot (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathsf{A}_\Sigma(\mathbb{R})$, δηλαδή ότι αν η ακολουθία $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $r \in \mathbb{R}$ και λ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε το βαθμωτό γινόμενο $\lambda \cdot (a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (\lambda a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $\lambda r \in \mathbb{R}$. Συνεπώς το $\mathsf{A}_\Sigma(\mathbb{R})$ είναι κλειστό ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό που ορίζεται στο $\mathsf{A}(\mathbb{R})$. ■

Άσκηση 29. *Να εξεταστεί ποιο από τα επόμενα υποσύνολα τού $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{R}$ αποτελεί υποχώρο τού $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$:*

(1) *Το σύνολο $\mathsf{S}_n(\mathbb{R})$ των συμμετρικών $n \times n$ πινάκων.*
(2) *Το σύνολο $\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ των αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων.*
(3) *Το σύνολο των μη αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων.*

Λύση. (1) Έστω $\mathsf{S}_n(\mathbb{R})$ το σύνολο των συμμετρικών $n \times n$ πινάκων, δηλαδή:

$$\mathsf{S}_n(\mathbb{R}) = \big\{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\big\}$$

Για να είναι το $\mathsf{S}_n(\mathbb{R})$ ένας $\mathbb{R}$–υπόχωρος τού $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$, θα πρέπει:

(α΄) Το $\mathsf{S}_n(\mathbb{R})$ να μην είναι κενό. Πράγματι, ο ταυτοτικός $n \times n$ πίνακας I_n είναι συμμετρικός και γι' αυτό ανήκει στο $\mathsf{S}_n(\mathbb{R})$. Άρα, $\mathsf{S}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.
(β΄) Αν $A, B \in \mathsf{S}_n(\mathbb{R})$, τότε και $A + B \in \mathsf{S}_n(\mathbb{R})$. Πράγματι, ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB = A + B$. Συνεπώς, $A + B \in \mathsf{S}_n(\mathbb{R})$.
(γ΄) Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $A \in \mathsf{S}_n(\mathbb{R})$, τότε και $\lambda \cdot A \in \mathsf{S}_n(\mathbb{R})$. Πράγματι, ${}^t(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot {}^tA = \lambda \cdot A$. Συνεπώς $\lambda \cdot A \in \mathsf{S}_n(\mathbb{R})$.

Επομένως το $\mathcal{S}$ ***είναι*** ένας υπόχωρος τού $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(2) Έστω $\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ το σύνολο των αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων. Για να είναι το $\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ ένας $\mathbb{R}$–υπόχωρος τού $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$, θα πρέπει:

(α΄) Το $\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ να μην είναι κενό. Πράγματι, ο ταυτοτικός $n \times n$ πίνακας I_n είναι αντιστρέψιμος και γι' αυτό ανήκει στο $\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$. Άρα, $\mathsf{GL}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.
(β΄) Αν $A, B \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$, τότε και $A + B \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$. Αυτό όμως οφείλει να συμβαίνει για όλους τους αντιστρέψιμους πίνακες A, B. Επιλέγοντας ως A τον I_n και ως B τον $-\mathrm{I}_n$, ο οποίος προφανώς είναι αντιστρέψιμος, έχουμε: $\mathrm{I}_n + (-\mathrm{I}_n) = O$. Αλλά ο μηδενικός $n \times n$ πίνακας O δεν ανήκει στο $\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$, αφού δεν είναι αντιστρέψιμος. Συνεπώς ο $\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ ***δεν είναι*** $\mathbb{R}$-υπόχωρος τού $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$.

(3) Έστω $\mathcal{T}$ το σύνολο των μη αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων. Για να είναι το $\mathcal{T}$ ένας $\mathbb{R}$ υπόχωρος τού $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$, θα πρέπει:

(α΄) Το $\mathcal{T}$ να μην είναι κενό. Πράγματι, ο μηδενικός $n \times n$ πίνακας $\mathbb{O}_n$ δεν είναι αντιστρέψιμος και γι' αυτό ανήκει στο $\mathcal{T}$. Άρα, $\mathcal{T} \neq \emptyset$.
(β΄) Τώρα θα διακρίνουμε περιπτώσεις.
 (i) Για $n = 1$, ο χώρος $\mathsf{M}_1(\mathbb{R})$ ισούται με τον χώρο $\mathbb{R}$ και το $\mathcal{T} = \{0\}$ (κάθε μη μηδενικό στοιχείο τού $\mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμο). Προφανώς το $\mathcal{T} = \{0\}$ ***είναι*** $\mathbb{R}$–υπόχωρος τού $\mathbb{R}$.
 (ii) Για $n \geq 2$, αν $A, B \in \mathcal{T}$, τότε θα πρέπει και $A + B \in \mathcal{T}$. Αυτό όμως οφείλει να συμβαίνει για όλους τους μη αντιστρέψιμους πίνακες A, B. Επιλέγοντας ως $A = (a_{ij})$ τον πίνακα με $a_{11} = 1$ και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του ίσα με 0 έχουμε ότι $A \in \mathcal{T}$. Επιλέγοντας ως $B = (b_{ij})$ τον πίνακα με $b_{22} = \cdots = b_{nn} = 1$ και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του ίσα με 0 έχουμε ότι $B \in \mathcal{T}$. (Οι A, B δεν είναι αντιστρέψιμοι επιδή έχουν μηδενικές ορίζουσες). Το άθροισμα $A + B$ ισούται με τον ταυτοτικό πίνακα ο οποίος προφανώς είναι αντιστρέψιμος και συνεπώς $A + B = \mathrm{I}_n \notin \mathcal{T}$. Συνεπώς ο $\mathcal{T}$ ***δεν είναι*** υπόχωρος τού $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$. ■

Υπενθυμίζουμε ότι η τομή $\bigcap_{i\in I} \mathcal{V}_i$ μιας οικογένειας $\big\{\mathcal{V}_i\big\}_{i\in I}$ υπόχωρων ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{E}$. Αν $X \subseteq \mathcal{E}$ είναι ένα τυχόν μη-κενό υποσύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{E}$, τότε ο υπόχωρος

$$\langle X\rangle = \bigcap \big\{\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E} \mid \text{ο } \mathcal{V} \text{ είναι υπόχωρος του } \mathcal{E} \text{ και } X \subseteq V\big\}$$

δηλαδή η τομή της οικογένειας όλων των υπόχωρων του $\mathcal{E}$ οι οποιοι περιέχουν το υποσύνολο X (η οικογένεια αυτή δεν είναι κενή καθώς περιέχει τον υπόχωρο $\mathcal{E}$), είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$ ο οποίος καλείται **ο υπόχωρος του $\mathcal{E}$ ο οποίος παράγεται από το υποσύνολο διανυσμάτων X.**

Άσκηση 30. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Αν $X \subseteq \mathcal{E}$ είναι ένα τυχόν μη-κενό υποσύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{E}$, τότε*

$$\langle X \rangle = \big\{ \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n \in \mathcal{E} \mid \lambda_i \in \mathbb{K} \ \& \ \vec{x}_i \in X, \ 1 \leq i \leq n, \ n \in \mathbb{N} \big\}$$

και το υποσύνολο $\langle X \rangle$ είναι ο μικρότερος υπόχωρος του $\mathcal{E}$ ο οποίος περιέχει το υποσύνολο X.

Λύση. Θέτουμε προσωρινά $\mathcal{S} = \big\{ \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n \in \mathcal{E} \mid \lambda_i \in \mathbb{K} \ \& \ \vec{x}_i \in X, \ 1 \leq i \leq n, \ n \in \mathbb{N} \big\}$, και θα δείξουμε ότι $\langle X \rangle = \mathcal{S}$.

(1) Δείχνουμε πρώτα ότι το υποσύνολο $\mathcal{S}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$ ο οποίος περιέχει το υποσύνολο διανυσμάτων X και είναι ο μικρότερος υπόχωρος του $\mathcal{E}$ ο οποίος περιέχει το X.

Προφανώς $\vec{0} \in \mathcal{S}$ διότι $\vec{0} = 0 \cdot \vec{x} \in \mathcal{S}$, για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in X$. Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{S}$. Τότε υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ και $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n \in X$, έτσι ώστε $\vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n$, και υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$, $\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_n \in \mathbb{K}$ και $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n \in X$, έτσι ώστε $\vec{y} = \kappa_1 \vec{y}_1 + \kappa_2 \vec{y}_2 + \cdots + \kappa_m \vec{y}_m$. Επομένως:

$$\vec{x} + \vec{y} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n + \kappa_1 \vec{y}_1 + \kappa_2 \vec{y}_2 + \cdots + \kappa_m \vec{y}_m$$

και το διάνυσμα $\vec{x}+\vec{y}$ ανήκει εξ' ορισμού στο υποσύνολο $\mathcal{S}$. Έστω $\lambda \in \mathbb{K}$ και $\vec{x} \in \mathcal{S}$. Τότε όπως παραπάνω υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ και $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n \in X$, έτσι ώστε $\vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n$. Θα έχουμε:

$$\lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n) = (\lambda\lambda_1)\vec{x}_1 + (\lambda\lambda_2)\vec{x}_2 + \cdots + (\lambda\lambda_n)\vec{x}_n$$

και το διάνυσμα $\lambda \cdot \vec{x}$ ανήκει εξ' ορισμού στο υποσύνολο $\mathcal{S}$. Από τα παραπάνω έπεται ότι το υποσύνολο $\mathcal{S}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$ ο οποίος περιέχει το υποσύνολο X διότι, για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in X$ έχουμε $\vec{x} = 1 \cdot \vec{x} \in \mathcal{S}$. Τέλος έστω $\mathcal{V}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$ ο οποίος περιέχει το σύνολο διανυσμάτων X. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$. Πράγματι, έστω $\vec{x} \in \mathcal{S}$. Τότε υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ και $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n \in X$, έτσι ώστε $\vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n$. Επειδή $X \subseteq \mathcal{V}$, έπεται ότι $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n \in \mathcal{V}$. Επειδή ο $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{E}$, έπεται ότι $\lambda_i \cdot \vec{x}_i \in \mathcal{V}$, $1 \leq i \leq n$, και επομένως $\vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n \in \mathcal{V}$. Άρα $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$, δηλαδή ο υπόχωρος $\mathcal{S}$ περιέχει το σύνολο X και περιέχεται σε κάθε υπόχωρο του $\mathcal{E}$ ο οποίος περιέχει το X. Έτσι ο υπόχωρος $\mathcal{S}$ είναι ο μικρότερος υπόχωρος του $\mathcal{E}$ ο οποίος περιέχει το X.

(2) $\mathcal{S} \subseteq \langle X \rangle$. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι το υποσύνολο $\langle X \rangle$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$ ο οποίος περιέχει το X. Σύμφωνα με το μέρος (2), θα έχουμε $\mathcal{S} \subseteq \langle X \rangle$.

(3) $\langle X \rangle \subseteq \mathcal{S}$. Πράγματι, έστω $\vec{x} \in \langle X \rangle$. Επειδή ο υπόχωρος $\langle X \rangle$ είναι είναι εξ' ορισμού η τομή όλων των υπόχωρων του $\mathcal{E}$ οι οποίοι περιέχουν το υποσύνολο X, έπεται ότι το $\vec{x}$ ανήκει σε κάθε υπόχωρο του $\mathcal{E}$ ο οποίος περιέχει το X. Όπως είδαμε, ένας τέτοιος υπόχωρος του $\mathcal{E}$ είναι ο $\mathcal{S}$, και άρα $\vec{x} \in \mathcal{S}$. Επομένως $\langle X \rangle \subseteq \mathcal{S}$. ■

Υπενθυμίζουμε ότι γενικά η ένωση δύο υπόχωρων ενός διανυσματικού χώρου δεν είναι υπόχωρος. Έστω $\big\{\mathcal{V}_i\big\}_{i \in I}$ μια οικογένεια υπόχωρων του διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$. Συμβολίζουμε με

$$\sum_{i \in I} \mathcal{V}_i = \left\langle \bigcup_{i \in I} \mathcal{V}_i \right\rangle$$

τον υπόχωρο του $\mathcal{E}$ ο οποίος παράγεται από το υποσύνολο διανυσμάτων $\bigcup_{i \in I} \mathcal{V}_i$ του $\mathcal{E}$. Ο υπόχωρος $\sum_{i \in I} \mathcal{V}_i$ καλείται **άθροισμα των υπόχωρων της οικογένειας** $\big\{\mathcal{V}_i\big\}_{i \in I}$.

Άσκηση 31. *Έστω $\big\{\mathcal{V}_i\big\}_{i \in I}$ μια οικογένεια υπόχωρων του διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$. Τότε*

$$\sum_{i \in I} \mathcal{V}_i = \big\{ \vec{x}_{i_1} + \vec{x}_{i_2} + \cdots + \vec{x}_{i_n} \in \mathcal{E} \mid \vec{x}_{i_j} \in \mathcal{V}_{i_j} \ \& \ \{i_1, i_2, \cdots, i_n\} \subseteq I \big\}$$

δηλαδή ο υπόχωρος $\sum_{i\in I}\mathcal{V}_i$ αποτελείται από όλα τα πεπερασμένα αθροίσματα διανυσμάτων τα οποία ανήκουν στους υπόχωρους της οικογένειας, και είναι ο μικρότερος υπόχωρος του $\mathcal{E}$ ο οποίος περιέχει όλους τους υπόχωρους $\mathcal{V}_i$ της οικογένειας $\{\mathcal{V}_i\}_{i\in I}$.

Ιδιαίτερα, αν $I = \{1, 2, \cdots, n\}$, τότε:

$$\sum_{i=1}^{n}\mathcal{V}_i := \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n = \{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n \in \mathcal{E} \mid \vec{x}_i \in \mathcal{V}_i \ \ 1 \le i \le n\}$$

Λύση. Από την Άσκηση 30, θέτοντας $X = \bigcup_{i\in I}\mathcal{V}_i$, έπεται ότι:

$$\sum_{i\in I}\mathcal{V}_i = \{\lambda_{i_1}\vec{x}_{i_1} + \lambda_{i_2}\vec{x}_{i_2} + \cdots + \lambda_{i_n}\vec{x}_{i_n} \in \mathcal{E} \mid \lambda_{i_j} \in \mathbb{K} \ \& \ \vec{x}_{i_j} \in \bigcup_{i\in I}\mathcal{V}_i, \ \{i_1, i_2, \cdots, i_n\} \subseteq I\}$$

Αν $\vec{x}_{i_j} \in \bigcup_{i\in I}\mathcal{V}_i$, τότε $\vec{x}_{i_j} \in \mathcal{V}_{i_j}$ για κάποιον δείκτη $i_j \in I$, και τότε $\lambda_{i_j}\cdot\vec{x}_{i_j} \in \mathcal{V}_{i_j}$. Επομένως το παραπάνω σύνολο γράφεται ισοδύναμα:

$$\sum_{i\in I}\mathcal{V}_i = \{\vec{x}_{i_1} + \vec{x}_{i_2} + \cdots + \vec{x}_{i_n} \in \mathcal{E} \mid \vec{x}_{i_j} \in \mathcal{V}_{i_j} \ \ \& \ \{i_1, i_2, \cdots, i_n\} \subseteq I\}$$

Οι υπόλοιποι ισχυρισμοί προκύπτουν άμεσα από την Άσκηση 30. ■

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$, τότε το σύνολο $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ καλείται **γραμμικά ανεξάρτητο**, αν για τυχόντα στοιχεία $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n = \vec{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Το σύνολο διανυσμάτων $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ καλείται **γραμμικά εξαρτημένο**, αν δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο ή ισοδύναμα, αν:

$$\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}: \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \neq (0, 0, \cdots, 0) \qquad \text{και} \qquad \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n = \vec{0}$$

Άσκηση 32. *Ας είναι*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ένας $n \times n$ πίνακας με συνιστώσες από ένα σώμα $\mathbb{K}$ και ας είναι

$$\vec{A}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \qquad 1 \le j \le n$$

η j-οστή στήλη τού πίνακα A την οποία θεωρούμε ως διάνυσμα του χώρου των στηλών $\mathbb{K}_n$.

Να δειχθεί ότι το γραμμικό ομογενές σύστημα

$$A \cdot X = O, \quad \textit{όπου} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

έχει μόνο τη μηδενική λύση, αν και μόνο αν, οι στήλες $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \cdots, \vec{A}_n$ τού A είναι $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα το χώρου των στηλών $\mathbb{K}_n$.

Λύση. Παρατηρούμε ότι η n–άδα $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$, είναι λύση τού συστήματος:

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1j}x_j & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2j}x_j & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ij}x_j & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nj}x_j & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & 0 \end{array}$$

αν και μόνο αν,

$$\lambda_1 \vec{A}_1 + \lambda_2 \vec{A}_2, + \cdots + \lambda_j \vec{A}_j + \cdots + \lambda_n \vec{A}_n = O$$

Επομένως το σύστημα έχει ως μοναδική λύση τη μηδενική λύση $(0, 0, \cdots, 0)$, αν και μόνο αν, τα $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \cdots, \vec{A}_n$ είναι $\mathbb{K}$–γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}_n$. ■

Άσκηση 33. *Ας είναι A ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.*
(2) *Οι στήλες τού πίνακα A είναι $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα τού χώρου των στηλών $\mathbb{K}_n$.*
(3) *Οι γραμμές τού πίνακα A είναι $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα τού χώρου $\mathbb{K}^n$.*

Λύση.

- $(1) \Longrightarrow (2)$ Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε γνωρίζουμε ότι το ομογενές σύστημα $(\Sigma) : A \cdot X = 0$, έχει μόνο την μηδενική λύση και τότε από την Άσκηση 32 έπεται ότι οι στήλες τού πίνακα A είναι $\mathbb{K}$–γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα τού χώρου $\mathbb{K}_n$.
- $(2) \Longrightarrow (1)$ Έστω ότι οι στήλες τού πίνακα A είναι $\mathbb{K}$–γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα τού χώρου $\mathbb{K}_n$. Τότε από την Άσκηση 32 γνωρίζουμε ότι το ομογενές σύστημα $(\Sigma) : A \cdot X = 0$, έχει μόνο την μηδενική λύση. Υποθέτουμε ότι ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος, και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Έστω $\Sigma(A)$ η ισχυρά σ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα A, και τότε όπως γνωρίζουμε υπάρχουν στοιχειώδεις $n \times n$ πίνακες $E_1, E_2, \cdots, E_k$ έτσι ώστε: $A' = AE_1E_2 \cdots E_k$ ή ισοδύναμα $A = \Gamma(A)E_k^{-1} \cdots E_2^{-1}E_1^{-1}$. Το ομογενές σύστημα (Σ) γράφεται τότε: $\Sigma(A)E_k^{-1} \cdots E_2^{-1}E_1^{-1}X = 0$. Θεωρούμε τον πίνακα-στήλη

$$C = E_1E_2 \cdots E_kZ, \quad \text{όπου} \quad Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

και παρατηρούμε ότι C δεν είναι ο μηδενικός πίνακας στήλη διότι ο πίνακας $E_1E_2\cdots E_k$ είναι αντιστρέψιμος (ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων) και $Z \neq 0$. Θα έχουμε τότε:

$$AC = \Sigma(A)E_k^{-1}\cdots E_2^{-1}E_1^{-1}C = \Sigma(A)E_k^{-1}\cdots E_2^{-1}E_1^{-1}E_1E_2\cdots E_kZ = \Sigma(A)\cdot Z = \Sigma(A)\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Προφανώς το τελευταίο γινόμενο πινάκων $\Sigma(A)\cdot Z$ είναι η n-οστή στήλη του πίνακα $\Sigma(A)$. Επειδή ο πίνακας $\Sigma(A)$ είναι η ισχυρά σ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα A και ο πίνακας A υποθέσαμε ότι δεν είναι αντιστρέψιμος, έπεται ότι η τελευταία στήλη του πίνακα $\Sigma(A)$ είναι η μηδενική. Αυτό σημαίνει ότι

$$A\cdot C = \Sigma(A)\cdot Z = O$$

και επομένως το σύστημα (Σ) έχει ως μη-μηδενική λύση τον πίνακα-στήλη Z και αυτό είναι άτοπο. Στο άτοπο καταλήξαμε υποθέτοντας ότι ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος. Άρα ο A είναι αντιστρέψιμος.

- (1) $\Longleftrightarrow$ (3) Γνωρίζουμε ότι ένας $n\times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν, ο ανάστροφός του ${}^tA$ είναι αντιστρέψιμος. Σύμφωνα με την ισοδυναμία των (1) και (2), που μόλις αποδείξαμε, ο ${}^tA$ είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν, οι στήλες του είναι $\mathbb{K}$–γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα τού χώρου $\mathbb{K}^n$. Αλλά οι στήλες τού ${}^tA$ είναι οι γραμμές τού A και γι' αυτό οι στήλες τού ${}^tA$ είναι $\mathbb{K}$–γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα τού $\mathbb{K}^n$, αν και μόνο αν, οι γραμμές τού A είναι $\mathbb{K}$–γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα τού $\mathbb{K}^n$. Αυτό αποδεικνύει την ισοδυναμία των (1) και (3). ■

Άσκηση 34. *Να εξεταστεί αν τα διανύσματα $(3,5,-4)$, $(-3,-2,4)$, $(6,1,-8)$ τού $\mathbb{R}^3$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητα ή όχι.*

Λύση. Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση είναι αρκετό να εξετάσουμε το, αν ο 3×3 πίνακας A, που έχει ως γραμμές (ή στήλες), τα τρία αυτά διανύσματα είναι αντιστρέψιμος ή όχι. Έστω λοιπόν ότι

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Επειδή η ορίζουσα $|A| = 0$, ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος και τα $(3,5,-4)$, $(-3,-2,4)$, $(6,1,-8)$ είναι $\mathbb{R}$–γραμμικώς εξαρτημένα. ■

Έστω $\mathbb{K}[x]$ ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Υπενθυμίζουμε ότι ο **βαθμός** ενός μη-μηδενικού πολυωνύμου $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, όπου $a_i \in \mathbb{K}$, $0 \leq i \leq n$, ορίζεται να είναι ο μη-αρνητικός ακέραιος

$$\mathsf{deg}P(x) = \mathsf{max}\big\{k \in \mathbb{N}\cup\{0\} \mid a_k \neq 0\big\}$$

Στο μηδενικό πολυώνυμο 0 δεν ορίζουμε βαθμό. Έτσι όταν θεωρούμε βαθμό $\mathsf{deg}P(x)$ ενός πολυωνύμου $P(x)$ θα υπονοιείται πάντα ότι το $P(x)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Άσκηση 35. *Έστω $n \geq 0$ ένας μη-αρνητικός ακέραιος και $\mathbb{K}_n[x]$ το σύνολο όλων των πολυωνύμων υπεράνω του $\mathbb{K}$ με βαθμό $\leq n$ μαζί με το μηδενικό πολυώνυμο:*

$$\mathbb{K}_n[x] = \big\{P(x) \in \mathbb{K}[x] \mid \mathsf{deg}P(x) \leq n\big\} \bigcup \{0\}$$

Να δειχθεί ότι το υποσύνολο $\mathbb{K}_n[x]$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{K}[x]$ και

$$\mathbb{K}[x] = \bigcup_{n\geq 0}\mathbb{K}_n[x]$$

Λύση. Αν $P(x)$ είναι ένα μη-μηδενικό πολυώνυμο υπεράνω του $\mathbb{K}$ και $\deg P(x) \leq n$, τότε θα έχουμε $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, όπου $a_i \in \mathbb{K}$, $0 \leq i \leq n$. Θεωρώντας τα πολυώνυμα $1 = x^0,\, x,\, x^2,\, \cdots,\, x^n$, έπεται ότι τα πολυώνυμα αυτά είναι βαθμού $\leq n$ και άρα $x^k \in \mathbb{K}_n[x]$, $0 \leq k \leq n$. Προφανώς το τυχόν πολυώνυμο $P(x)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των πολυωνύμων x^k, $0 \leq k \leq n$, και επομένως:

$$\mathbb{K}_n[x] = \langle 1,\, x,\, x^2,\, \cdots,\, x^n \rangle$$

δηλαδή το σύνολο $\mathbb{K}_n[x]$ συμπίπτει με τον υπόχωρο του $\mathbb{K}[x]$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα x^k, $0 \leq k \leq n$.

Προφανώς $\bigcup_{n \geq 0} \mathbb{K}_n[x] \subseteq \mathbb{K}[x]$. Έστω $P(x)$ ένα πολυώνυμο υπεράνω του $\mathbb{K}$. Αν το $P(x) = 0$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, τότε $0 \in \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{K}_n[x]$. Αν το $P(x)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο, τότε έστω $n = \deg P(x)$. Προφανώς θα έχουμε $P(x) \in \mathbb{K}_n[x]$ και επομένως $P(x) \in \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{K}_n[x]$, δηλαδή $\mathbb{K}[x] \subseteq \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{K}_n[x]$. Επομένως προκύπτει ότι $\mathbb{K}[x] = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{K}_n[x]$. ■

Άσκηση 36. *Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο* $\mathsf{M}_3(\mathbb{K})$ *των* 3×3 *πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα* $\mathbb{K}$ *και έστω* $\Delta(\mathbb{K})$ *το υποσύνολο όλων των διαγωνίων πινάκων:*

$$\Delta_3(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{K}) \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{K} \right\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι το υποσύνολο* $\Delta_3(\mathbb{K})$ *είναι ένας υπόχωρος του* $\mathsf{M}_3(\mathbb{K})$.

(2) *Να δειχθεί ότι για τους πίνακες*

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ισχύει ότι:

$$\big\langle E_1,\, E_2,\, E_3 \big\rangle = \Delta_3(\mathbb{K})$$

(3) *Να εξετασθεί αν για τους πίνακες*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ισχύει ότι:

$$\big\langle A_1,\, A_2,\, A_3 \big\rangle = \Delta_3(\mathbb{K})$$

Λύση. (1), (2) Θα έχουμε:

$$\Delta_3(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{K}) \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{K} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{K}) \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{K} \right\} =$$

$$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{K}) \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{K} \right\} =$$

$$\Big\{ aE_1 + bE_2 + cE_3 \in \mathsf{M}_3(\mathbb{K}) \;\Big|\; a, b, c \in \mathbb{K} \Big\} = \big\langle E_1, E_2, E_3 \big\rangle$$

Άρα το υποσύνολο $\Delta_3(\mathbb{K})$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathsf{M}_3(\mathbb{K})$ και συμπίπτει με τον υπόχωρο του $\Delta_3(\mathbb{K})$ ο οποίος παράγεται από τους πίνακες E_1, E_2, E_3.

(3) Θα έχουμε

$$\big\langle A_1, A_2, A_3\big\rangle = \left\{ a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \;\in\; \mathsf{M}_3(\mathbb{K}) \;\big|\; a,b,c\in\mathbb{K}\right\} =$$

$$\left\{\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b&0&0\\0&-b&0\\0&0&b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c&0&0\\0&c&0\\0&0&-c\end{pmatrix} \;\in\; \mathsf{M}_3(\mathbb{K}) \;\big|\; a,b,c\in\mathbb{K}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix}a+b+c&0&0\\0&a-b+c&0\\0&0&a+b-c\end{pmatrix} \;\in\; \mathsf{M}_3(\mathbb{K}) \;\big|\; a,b,c\in\mathbb{K}\right\}$$

Για να ισχύει ότι $\big\langle A_1,\, A_2,\, A_3\big\rangle = \Delta_3(\mathbb{K})$ θα πρέπει για κάθε διαγώνιο πίνακα $A = \begin{pmatrix}x&0&0\\0&y&0\\0&0&z\end{pmatrix}$ να υπάρχουν $a,b,c\in\mathbb{K}$ έτσι ώστε $aA_1+bA_2+cA_3 = A$ ή ισοδύναμα:

$$\begin{pmatrix}a+b+c&0&0\\0&a-b+c&0\\0&0&a+b-c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x&0&0\\0&y&0\\0&0&z\end{pmatrix}$$

δηλαδή αναζητούμε $a,b,c\in\mathbb{K}$ έτσι ώστε:

$$(\Sigma)\quad \left\{\begin{array}{ccccccc} a&+&b&+&c&=&x\\ a&-&b&+&c&=&y\\ a&+&b&-&c&=&z\end{array}\right.$$

Προσθέτοντας τις δυο πρώτες εξισώσεις και τις δύο τελευταίες εξισώσεις, έχουμε

$$2a+2c = x+y \quad \text{και} \quad 2a = y+z \quad\Longrightarrow\quad a = \frac{y+z}{2} \quad \text{και} \quad c = \frac{x-z}{2}$$

και τότε από την δεύτερη έχουμε $b = \frac{x-y}{2}$. Δηλαδή το σύστημα (Σ), για δεδομένα $x,y,z\in\mathbb{K}$, έχει μοναδική λύση ως προς a,b,c, την:

$$a = \frac{y+z}{2}, \qquad b = \frac{x-y}{2}, \qquad c = \frac{x-z}{2}$$

Επομένως ο τυχόν διαγώνιος πίνακας $A\in\Delta_3(\mathbb{K})$ γράφεται ως:

$$A = \begin{pmatrix}x&0&0\\0&y&0\\0&0&z\end{pmatrix} = \frac{y+z}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \frac{x-y}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \frac{x-z}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{y+z}{2}A_1 + \frac{x-y}{2}A_2 + \frac{x-z}{2}A_3 \;\in\; \big\langle A_1,\, A_2,\, A_3\big\rangle$$

Αυτό σημαίνει ότι $\Delta_3(\mathbb{K}) \subseteq \big\langle A_1, A_2, A_3\big\rangle$ και επομένως:

$$\Delta_3(\mathbb{K}) = \big\langle A_1,\, A_2,\, A_3\big\rangle \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 37. *Στον διανυσματικό χώρο* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \big\{f\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \mid f:\ \text{συνάρτηση}\big\}$*, θεωρούμε τα υποσύνολα*

$$\mathsf{A}(\mathbb{R}) = \big\{f\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \mid f(x) = f(-x),\ \forall x\in\mathbb{R}\big\} \qquad (\textit{άρτιες συναρτήσεις})$$

$$\Pi(\mathbb{R}) = \big\{f\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \mid f(x) = -f(-x),\ \forall x\in\mathbb{R}\big\} \qquad (\textit{περιττές συναρτήσεις})$$

Να δειχθεί ότι τα υποσύνολα $\mathsf{A}(\mathbb{R})$ *και* $\Pi(\mathbb{R})$ *είναι υπόχωροι του* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *και ισχύει ότι:*

$$\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathsf{A}(\mathbb{R}) + \Pi(\mathbb{R}) \qquad \textit{και} \qquad \mathsf{A}(\mathbb{R})\cap\Pi(\mathbb{R}) = \big\{0\big\}$$

Λύση. (1) (α΄) Προφανώς η μηδενική συνάρτηση $0\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $0(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, είναι άρτια, δηλαδή $0 \in \mathsf{A}(\mathbb{R})$.

(β΄) Έστω f, g δύο στοιχεία του υποσυνόλου $\mathsf{A}(\mathbb{R})$, δηλαδή $f(x) = f(-x)$ και $g(x) = g(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Τότε, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x) \quad \Longrightarrow \quad f + g \in \mathsf{A}(\mathbb{R})$$

(γ΄) Έστω f ένα στοιχείο του υποσυνόλου $\mathsf{A}(\mathbb{R})$, δηλαδή $f(x) = f(-x)$, και $\lambda \in \mathbb{K}$. Τότε, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda \cdot f)(-x) = \lambda f(-x) = \lambda f(x) = (\lambda \cdot f)(x) \quad \Longrightarrow \quad \lambda \cdot f \in \mathsf{A}(\mathbb{R})$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το υποσύνολο $\mathsf{A}(\mathbb{R})$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(2) (α΄) Προφανώς η μηδενική συνάρτηση $0\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $0(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, είναι περιττή, δηλαδή $0 \in \Pi(\mathbb{R})$.

(β΄) Έστω f, g δύο στοιχεία του υποσυνόλου $\Pi(\mathbb{R})$, δηλαδή $f(x) = -f(-x)$ και $g(x) = -g(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Τότε, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x)) = -(f+g)(x) \quad \Longrightarrow \quad f + g \in \Pi(\mathbb{R})$$

(γ΄) Έστω f ένα στοιχείο του υποσυνόλου $\Pi(\mathbb{R})$, δηλαδή $f(x) = -f(-x)$, και $\lambda \in \mathbb{K}$. Τότε, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda \cdot f)(-x) = \lambda f(-x) = \lambda(-f(x)) = -(\lambda \cdot f(x)) = -(\lambda \cdot f)(x) \quad \Longrightarrow \quad \lambda \cdot f \in \Pi(\mathbb{R})$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το υποσύνολο $\Pi(\mathbb{R})$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(3) Έστω $f \in \mathsf{A}(\mathbb{R}) \cap \Pi(\mathbb{R})$. Τότε $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(-x) = f(x)$ και $f(-x) = -f(x)$. Τότε $f(x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, και άρα $2f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) = 0$. Άρα $f = 0$ είναι η μηδενική συνάρτηση και επομένως $\mathsf{A}(\mathbb{R}) \cap \Pi(\mathbb{R}) = \{0\}$.

(4) Έστω $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{και} \qquad h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Τότε θα έχουμε, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$g(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = g(x) \quad \Longrightarrow \quad g \in \mathsf{A}(\mathbb{R})$$

$$h(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x) \quad \Longrightarrow \quad h \in \Pi(\mathbb{R})$$

$$(g+h)(x) = g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x) \quad \Longrightarrow \quad f = g + h$$

Οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν ότι $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathsf{A}(\mathbb{R}) + \Pi(\mathbb{R})$. ■

Άσκηση 38. *Στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$, θεωρούμε τα ακόλουθα υποσύνολα:*

$$\mathcal{V}_1 = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{V}_2 = \{(0, x, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{V}_3 = \{(x, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Να δειχθεί ότι τα παραπάνω υποσύνολα είναι υπόχωροι και να βρεθούν οι υπόχωροι:

$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3, \quad \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2, \quad \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3, \quad \mathcal{V}_2 \cap \mathcal{V}_3, \quad (\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) \cap \mathcal{V}_3, \quad (\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_3) \cap \mathcal{V}_2, \quad (\mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3) \cap \mathcal{V}_1,$$

Λύση. (1) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. Τότε $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = (1, 1, 0)$. Παρατηρούμε ότι:

$$\mathcal{V}_1 = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle \vec{e}_1 \rangle$$

$$\mathcal{V}_2 = \{(0, x, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(0, 1, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle \vec{e}_2 \rangle$$

$$\mathcal{V}_3 = \{(x, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x, x, 0) + (0, 0, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{x(1, 1, 0) + y(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \langle \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$$

Άρα τα υποσύνολα $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, $\mathcal{V}_3$ είναι οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ οι οποίοι παράγονται από τα διανύσματα $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, και $\{\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ αντίστοιχα.

(2) Κάθε διάνυσμα $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ γράφεται

$\vec{x} = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3)$ και προφανώς: $(x_1, 0, 0) \in \mathcal{V}_1$, $(0, x_2, 0) \in \mathcal{V}_2$, $(0, 0, x_3) \in \mathcal{V}_3$

Επομένως:

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3$$

(3) Από την περιγραφή των συνόλων $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, $\mathcal{V}_3$, προκύπτει άμεσα ότι:

$$\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3 = \mathcal{V}_2 \cap \mathcal{V}_3 = \{\vec{0}\}$$

(4) Θα έχουμε

$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = \{(x, 0, 0) + (0, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) \cap \mathcal{V}_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \in \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 \text{ και } (x, y, z) \in \mathcal{V}_3\} =$$
$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \text{ και } x = y = 0\} = \{(0, 0, 0)\} = \{\vec{0}\}$$

(5) Θα έχουμε

$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_3 = \{(x, 0, 0) + (y, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Θα δείξουμε ότι $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_3 = \mathbb{R}^3$. Για να ισχύει αυτή η ισότητα, θα πρέπει κάθε διάνυσμα $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ να μπορεί να γραφεί ως:

$$(a, b, c) = \vec{x} + \vec{y}, \quad \text{όπου} \quad \vec{x} \in \mathcal{V}_1 \text{ και } \vec{y} \in \mathcal{V}_3$$

δηλαδή θα πρέπει να υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $x, y, z \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\vec{x} = (x, 0, 0) \in \mathcal{V}_1$ και $\vec{y} = (y, y, z) \in \mathcal{V}_3$, και τότε:

$$(a, b, c) = (x, 0, 0) + (y, y, z) \implies (a, b, c) = (x + y, y, z) \implies x + y = a, \; y = b, \; z = c$$

και επομένως $x = a - b$. Τότε πράγματι θα έχουμε:

$$(a, b, c) = (a - b, 0, 0) + (b, b, c) \quad \text{όπου} \quad (a - b, 0, 0) \in \mathcal{V}_1 \text{ και } (b, b, c) \in \mathcal{V}_3$$

Επομένως κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ γράφεται ως άθροισμα ενός διανύσματος από τον $\mathcal{V}_1$ και ενός διανύσματος από τον $\mathcal{V}_3$, δηλαδή

$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_3 = \mathbb{R}^3$$

Επειδή $\mathcal{V}_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, θα έχουμε:

$$(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_3) \cap \mathcal{V}_2 = \mathbb{R}^3 \cap \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_2$$

(6) Θα έχουμε

$$\mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3 = \{(0, y, 0) + (x, x, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Θα δείξουμε ότι $\mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3 = \mathbb{R}^3$. Για να ισχύει αυτή η ισότητα, θα πρέπει κάθε διάνυσμα $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ να μπορεί να γραφεί ως:

$$(a, b, c) = \vec{x} + \vec{y}, \quad \text{όπου} \quad \vec{x} \in \mathcal{V}_2 \text{ και } \vec{y} \in \mathcal{V}_3$$

δηλαδή θα πρέπει να υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $x, y, z \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\vec{x} = (0, y, 0) \in \mathcal{V}_2$ και $\vec{y} = (x, x, z) \in \mathcal{V}_3$, και τότε:

$$(a, b, c) = (0, y, 0) + (x, x, z) \implies (a, b, c) = (x, x + y, z) \implies x = a, \; x + y = b, \; z = c$$

και επομένως $y = b - a$. Τότε πράγματι θα έχουμε:

$$(a, b, c) = (0, b - a, 0) + (a, a, c) \quad \text{όπου} \quad (0, b - a, 0) \in \mathcal{V}_2 \text{ και } (a, a, c) \in \mathcal{V}_3$$

Επομένως κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ γράφεται ως άθροισμα ενός διανύσματος από τον $\mathcal{V}_2$ και ενός διανύσματος από τον $\mathcal{V}_3$, δηλαδή

$$\mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3 = \mathbb{R}^3$$

Επειδή $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathbb{R}^3$, θα έχουμε:

$$(\mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3) \cap \mathcal{V}_1 = \mathbb{R}^3 \cap \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_1 \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 39. *Έστω ότι $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ είναι υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$ υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι:*

$$\big(\mathcal{U}+\mathcal{W}\big)\cap\big(\mathcal{W}+\mathcal{V}\big)\cap\big(\mathcal{V}+\mathcal{U}\big) = \Big(\big(\mathcal{W}+\mathcal{V}\big)\cap\mathcal{U}\Big) + \Big(\big(\mathcal{V}+\mathcal{U}\big)\cap\mathcal{W}\Big)$$

Λύση. • Έστω $\vec{x} \in \big(\mathcal{U}+\mathcal{W}\big)\cap\big(\mathcal{W}+\mathcal{V}\big)\cap\big(\mathcal{V}+\mathcal{U}\big)$. Τότε:

$$\begin{array}{llll}
\vec{x}\in\mathcal{U}+\mathcal{W} & \Longrightarrow & \exists\,\vec{u}_1\in\mathcal{U}\ \&\ \vec{w}_1\in\mathcal{W}\ \text{ έτσι ώστε :} & \vec{x}=\vec{u}_1+\vec{w}_1\\
\vec{x}\in\mathcal{W}+\mathcal{V} & \Longrightarrow & \exists\,\vec{w}_2\in\mathcal{W}\ \&\ \vec{v}_1\in\mathcal{V}\ \text{ έτσι ώστε :} & \vec{x}=\vec{w}_2+\vec{v}_1\\
\vec{x}\in\mathcal{V}+\mathcal{U} & \Longrightarrow & \exists\,\vec{v}_2\in\mathcal{V}\ \&\ \vec{u}_2\in\mathcal{U}\ \text{ έτσι ώστε :} & \vec{x}=\vec{v}_2+\vec{u}_2
\end{array}$$

Από τις δύο πρώτες σχέσεις προκύπτει ότι

$$\mathcal{W}\ni\vec{w}_1-\vec{w}_2=\vec{v}_1+(-\vec{u}_1)\in\mathcal{V}+\mathcal{U} \quad\Longrightarrow\quad \vec{w}_1-\vec{w}_2\in\big(\mathcal{V}+\mathcal{U}\big)\cap\mathcal{W} \tag{1}$$

Από την πρώτη και την τρίτη σχέση προκύπτει ότι

$$\mathcal{U}\ni\vec{u}_1-\vec{u}_2=\vec{v}_2+(-\vec{w}_1)\in\mathcal{V}+\mathcal{W} \quad\Longrightarrow\quad \vec{u}_1-\vec{u}_2\in\big(\mathcal{V}+\mathcal{W}\big)\cap\mathcal{U} \tag{2}$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι

$$\vec{u}_2-\vec{w}_2=\vec{v}_1+(-\vec{v}_2)\in\mathcal{V} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases}\vec{u}_2=\big(\vec{v}_1+(-\vec{v}_2)\big)+\vec{w}_2\in\mathcal{V}+\mathcal{W}\\ \vec{w}_2=\vec{u}_2-\big(\vec{v}_1+(-\vec{v}_2)\big)\ \in\ \mathcal{U}+\mathcal{V}\end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases}\vec{u}_2\in\big(\mathcal{V}+\mathcal{W}\big)\cap\mathcal{U}\\ \vec{w}_2\in\big(\mathcal{U}+\mathcal{V}\big)\cap\mathcal{W}\end{cases} \tag{3}$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\vec{x}-(\vec{u}_2+\vec{w}_2)=\vec{u}_1+\vec{w}_1-(\vec{u}_2+\vec{w}_2)=\vec{w}_1-\vec{w}_2+\vec{u}_1-\vec{u}_2\in\Big(\big(\mathcal{W}+\mathcal{V}\big)\cap\mathcal{U}\Big)+\Big(\big(\mathcal{V}+\mathcal{U}\big)\cap\mathcal{W}\Big) \tag{4}$$

Από τις σχέσεις (3) προκύπτει ότι

$$\vec{u}_2+\vec{w}_2\in\Big(\big(\mathcal{W}+\mathcal{V}\big)\cap\mathcal{U}\Big)+\Big(\big(\mathcal{V}+\mathcal{U}\big)\cap\mathcal{W}\Big) \tag{5}$$

και άρα, προσθέτοντας τις σχέσεις (4) και (5), έχουμε ότι:

$$\vec{x}=\vec{u}_2+\vec{w}_2+\vec{w}_1-\vec{w}_2+\vec{u}_1-\vec{u}_2\in\Big(\big(\mathcal{W}+\mathcal{V}\big)\cap\mathcal{U}\Big)+\Big(\big(\mathcal{V}+\mathcal{U}\big)\cap\mathcal{W}\Big) \tag{6}$$

Επομένως από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει ότι:

$$\big(\mathcal{U}+\mathcal{W}\big)\cap\big(\mathcal{W}+\mathcal{V}\big)\cap\big(\mathcal{V}+\mathcal{U}\big)\ \subseteq\ \Big(\big(\mathcal{W}+\mathcal{V}\big)\cap\mathcal{U}\Big)+\Big(\big(\mathcal{V}+\mathcal{U}\big)\cap\mathcal{W}\Big) \tag{$*$}$$

• Έστω $\vec{x}\in\Big(\big(\mathcal{W}+\mathcal{V}\big)\cap\mathcal{U}\Big)+\Big(\big(\mathcal{V}+\mathcal{U}\big)\cap\mathcal{W}\Big)$. Τότε υπάρχει ένα διάνυσμα $\vec{y}\in\big(\mathcal{W}+\mathcal{V}\big)\cap\mathcal{U}$ και ένα διάνυσμα $\vec{z}\in\big(\mathcal{V}+\mathcal{U}\big)\cap\mathcal{W}$ έτσι ώστε: $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$.

(1) Επειδή $\vec{y}\in\big(\mathcal{W}+\mathcal{V}\big)\cap\mathcal{U}$, έπεται ότι $\vec{y}\in\mathcal{U}$ και υπάρχουν διανύσματα $\vec{w}_1\in\mathcal{W}$ και $\vec{v}_1\in\mathcal{V}$ έτσι ώστε: $\vec{y}=\vec{w}_1+\vec{v}_1$.

(2) Επειδή $\vec{z}\in\big(\mathcal{V}+\mathcal{U}\big)\cap\mathcal{W}$, έπεται ότι $\vec{z}\in\mathcal{W}$ και υπάρχουν διανύσματα $\vec{v}_2\in\mathcal{V}$ και $\vec{u}_1\in\mathcal{U}$ έτσι ώστε: $\vec{z}=\vec{v}_2+\vec{u}_1$.

Επειδή, από τα (1) και (2), έχουμε $\vec{y}\in\mathcal{U}$ και $\vec{z}\in\mathcal{W}$, έπεται ότι

$$\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}\in\mathcal{U}+\mathcal{W} \tag{7}$$

Από τα (1) και (2), επίσης έχουμε

$$\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}=\vec{w}_1+\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{u}_1 \quad\&\quad \vec{u}_1=\vec{z}-\vec{v}_2\in\mathcal{W}+\mathcal{V}$$

Επειδή προφανώς $\vec{w}_1+\vec{v}_1+\vec{v}_2\in\mathcal{W}+\mathcal{V}$ έπεται ότι

$$\vec{x}=\vec{w}_1+\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{u}_1\in\mathcal{W}+\mathcal{V} \tag{8}$$

Τέλος από τα (1) και (2), επίσης έχουμε

$$\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}=\vec{w}_1+\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{u}_1 \quad\&\quad \vec{w}_1=\vec{y}-\vec{u}_1\in\mathcal{U}+\mathcal{V}$$

Επειδή προφανώς $\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{u}_1\in\mathcal{U}+\mathcal{V}$ έπεται ότι

$$\vec{x}=\vec{w}_1+\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{u}_1\in\mathcal{U}+\mathcal{V} \tag{9}$$

Από τις σχέσεις (7), (8), (9) προκύπτει ότι $\vec{x} \in \big(\mathcal{U}+\mathcal{W}\big) \cap \big(\mathcal{W}+\mathcal{V}\big) \cap \big(\mathcal{V}+\mathcal{U}\big)$ και επομένως

$$\Big((\mathcal{W}+\mathcal{V}) \cap \mathcal{U}\Big) + \Big((\mathcal{V}+\mathcal{U}) \cap \mathcal{W}\Big) \ \subseteq \ \vec{x} \in (\mathcal{U}+\mathcal{W}) \cap (\mathcal{W}+\mathcal{V}) \cap (\mathcal{V}+\mathcal{U}) \qquad (**)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις $(*)$ και $(**)$ προκυπτει ότι

$$\Big((\mathcal{W}+\mathcal{V}) \cap \mathcal{U}\Big) + \Big((\mathcal{V}+\mathcal{U}) \cap \mathcal{W}\Big) \ = \ (\mathcal{U}+\mathcal{W}) \cap (\mathcal{W}+\mathcal{V}) \cap (\mathcal{V}+\mathcal{U}) \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 40. *Έστω ότι $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, $\mathcal{V}_3$ είναι υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$ υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$.*

(1) *Αν $\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_1$, να δειχθεί ότι:*

$$\mathcal{V}_1 \cap (\mathcal{V}_2+\mathcal{V}_3) = (\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2) + (\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3) = \mathcal{V}_2 + (\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3) \qquad \text{(Μοδιακός Νόμος Υπόχωρων)}$$

(2) *Αν $\mathcal{V}_2 \nsubseteq \mathcal{V}_1$, να δειχθεί ότι γενικά: $\mathcal{V}_1 \cap (\mathcal{V}_2+\mathcal{V}_3) \neq \mathcal{V}_2 + (\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3)$.*

Λύση. (1) Υποθέτουμε ότι $\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_1$. Τότε $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_2$ και τότε η δεύτερη ισότητα στο μέρος (1) ισχύει.

(α') Έστω $\vec{x} \in \mathcal{V}_1 \cap (\mathcal{V}_2+\mathcal{V}_3)$. Τότε $\vec{x} \in \mathcal{V}_1$ και $\vec{x} \in \mathcal{V}_2+\mathcal{V}_3$, και επομένως υπάρχουν διανύσματα $\vec{y} \in \mathcal{V}_2$ και $\vec{z} \in \mathcal{V}_3$ έτσι ώστε $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Τότε $\vec{z} = \vec{x}-\vec{y}$. Επειδή $\vec{x} \in \mathcal{V}_1$ και $\vec{y} \in \mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_1$ έπεται ότι $\vec{z} = \vec{x}-\vec{y} \in \mathcal{V}_1$ και άρα $\vec{z} \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3$ διότι $\vec{z} \in \mathcal{V}_3$. Επομένως $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$, όπου $\vec{y} \in \mathcal{V}_2$ και $\vec{z} \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3$. Άρα $\vec{x} \in \mathcal{V}_2 + (\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3)$ και επομένως

$$\mathcal{V}_1 \cap (\mathcal{V}_2+\mathcal{V}_3) \subseteq \mathcal{V}_2 + (\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3) \qquad (\dagger)$$

(β') Έστω $\vec{x} \in \mathcal{V}_2 + (\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3)$. Τότε υπάρχουν διανύσματα $\vec{y} \in \mathcal{V}_2$ και $\vec{z} \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3$ έτσι ώστε: $\vec{x} = \vec{y}+\vec{z}$. Επειδή $\vec{y} \in \mathcal{V}_2$ και $\vec{z} \in \mathcal{V}_3$, έπεται ότι $\vec{x} \in \mathcal{V}_2+\mathcal{V}_3$. Επειδή $\vec{x} \in \mathcal{V}_2$ και $\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_1$, έχουμε $\vec{x} \in \mathcal{V}_1$. Άρα $\vec{x} \in \mathcal{V}_1 \cap (\mathcal{V}_2+\mathcal{V}_3)$ και επομένως

$$\mathcal{V}_2 + (\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3) \subseteq \mathcal{V}_1 \cap (\mathcal{V}_2+\mathcal{V}_3) \qquad (\dagger\dagger)$$

Από τις σχέσεις $(\dagger)$ και $(\dagger\dagger)$ προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

(2) Αν $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ και $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, $\mathcal{V}_3$ είναι οι υπόχωροι της Άσκησης 38, τότε έχουμε:

$$\mathcal{V}_2 \nsubseteq \mathcal{V}_1 \quad \text{και} \quad \mathcal{V}_1 \cap (\mathcal{V}_2+\mathcal{V}_3) = \mathcal{V}_1 \neq \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_2 + \big\{\vec{0}\big\} = \mathcal{V}_2 + (\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3)$$

Ένα διαφορετικό παράδειγμα: Έστω $\vec{x}, \vec{y}$ δύο μη-μηδενικά διανύσματα ενός $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου και υποθέτουμε ότι κανένα από τα δύο δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του άλλου. Θέτουμε:

$$\mathcal{U} = \langle \vec{x}+\vec{y} \rangle, \qquad \mathcal{V} = \langle \vec{x} \rangle, \qquad \mathcal{W} = \langle \vec{y} \rangle$$

Τότε εύκολα βλέπουμε ότι[6]: $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \big\{\vec{0}\big\} = \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ και άρα

$$\mathcal{U} = \mathcal{U} \cap \big(\mathcal{V}+\mathcal{W}\big) \neq \big\{\vec{0}\big\} = \big(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}\big) + \big(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}\big) \qquad \blacksquare$$

[6] Δείξτε τον ισχυρισμό σαν Άσκηση.