ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Τμημα Β′ (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

Λυσεις Ασκησεων - Φυλλαδιο 6

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:
http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI/LAI2019/LAI2019.html

Παρασκευή 12 Δεκεμβρίου 2019

Άσκηση 1. *Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ και*

$$\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0\}$$

Να βρεθεί η διάσταση $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}$ και μια βάση του $\mathbb{R}^n$ η οποία περιέχει μια βάση του $\mathcal{V}$.

Λύση. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

(1) Αν τα $\alpha_i = 0$ για κάθε $i = 1, 2, \cdots, n$, τότε προφανώς $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ και άρα $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = n$.

(2) Έστω ότι $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \neq (0, 0, \cdots, 0)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\alpha_1 \neq 0$ και τότε

$$x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \left\{ \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n, x_2, \cdots, x_n \right) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ x_2 \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, 1, 0, \cdots, 0 \right) + x_3 \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}, 0, 1, \cdots, 0 \right) + \cdots + x_n \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}, 0, \cdots, 0, 1 \right) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\langle \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, 1, 0, \cdots, 0 \right), \ \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}, 0, 1, \cdots, 0 \right), \ \cdots, \ \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}, 0, \cdots, 0, 1 \right) \right\rangle
\end{aligned}$$

Θέτουμε

$$\vec{\epsilon}_1 = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, 1, 0, \cdots, 0 \right), \quad \vec{\epsilon}_2 = \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}, 0, 1, \cdots, 0 \right), \quad \cdots, \quad \vec{\epsilon}_{n-1} = \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}, 0, \cdots, 0, 1 \right)$$

'ρα από την παραπάνω περιγραφή του $\mathcal{V}$ έχουμε ότι τα διανύσματα $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_{n-1}$ παράγουν τον $\mathcal{V}$. Έστω $\lambda_1 \vec{\epsilon}_1 + \lambda_2 \vec{\epsilon}_2 + \cdots + \lambda_{n-1} \vec{\epsilon}_{n-1} = \vec{0}$ με $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$. Τότε έπεται εύκολα ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$ και άρα τα διανύσματα $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_{n-1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως, το σύνολο $\{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_{n-1}\}$ αποτελεί βάση του $\mathcal{V}$ και άρα

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = n - 1$$

Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0)$. Επειδή

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-\frac{\alpha_3}{\alpha_1} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\
-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1} & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\
-\frac{\alpha_n}{\alpha_1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{vmatrix} \neq 0$$

έπεται ότι το σύνολο $\{\vec{e}_1, \vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_{n-1}\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^n$ η οποία περιέχει ως υποσύνολο τη βάση $\{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_{n-1}\}$ του $\mathcal{V}$. ∎

Άσκηση 2. *Έστω $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ δύο υπόχωροι του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}_6[x]$ και υποθέτουμε ότι*

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U} = 4 \quad \text{και} \quad \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V} = 5$$

Να προσδιορισθούν οι δυνατές τιμές για τη διάσταση:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$$

Αν $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, ποιά είναι η διάσταση $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$;

Λύση. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U} + \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V} - \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \tag{†}$$

Χρησιμοποιώντας ότι $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) \leq \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathbb{K}_6[x] = 7$, διότι $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{K}_6[x]$, θα έχουμε:

$$4 + 5 - \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \leq 7 \quad \Longrightarrow \quad 2 \leq \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$$

Επειδή ο $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{U}$, έπεται ότι θα έχουμε $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \leq \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U} = 4$ και επομένως:

$$2 \leq \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \leq 4$$

(1) Αν $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 2$, τότε από τη σχέση (†) έπεται ότι $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = 7$. Επειδή ο $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{K}_6[x]$ και $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathbb{K}_6[x] = 7$, θα έχουμε ότι $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathbb{K}_6[x]$. Αντίστροφα, αν $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathbb{K}_6[x]$, τότε από τη σχέση (†) έπεται ότι $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 2$. Άρα:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathbb{K}_6[x]$$

(2) Αν $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 4$, τότε από τη σχέση (†) έπεται ότι $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = 5$. Επειδή $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V} = 5$ και ο $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{U} + \mathcal{V}$, έπεται ότι $\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{V}$. Αυτό όμως προφανώς σημαίνει ότι $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Αντίστροφα αν $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, τότε προφανώς $\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{V}$ και τότε $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V} = 5$. Από τη σχέση (†) προκύπτει τότε ότι $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 4$. Άρα:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{V}$$

(3) Έστω $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 3$. Τότε $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = 6$ και προφανώς $\mathcal{U} \nsubseteq \mathcal{V}$ (διότι διαφορετικά αν $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ θα είχαμε ότι $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{U}$ και άρα $3 = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U} = 4$ που είναι άτοπο) και $\mathcal{U} + \mathcal{V} \neq \mathbb{K}_6[x]$. Αντίστροφα αν $\mathcal{U} \nsubseteq \mathcal{V}$ και $\mathcal{U} + \mathcal{V} \neq \mathbb{K}_6[x]$, τότε $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) \neq 7$ και $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) \neq 5$ διότι διαφορετικά θα είχαμε $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{V}$ το οποίο σημαίνει ότι $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ το οποίο είναι άτοπο. Άρα:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{U} \nsubseteq \mathcal{V} \quad \text{και} \quad \mathcal{U} + \mathcal{V} \neq \mathbb{K}_6[x]$$

Αν $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, από το (2) προκύπτει ότι $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 4$. ∎

Άσκηση 3. *Έστω ότι $\mathcal{V}$ και $\mathcal{U}$ είναι υπόχωροι πεπερασμένης διάστασης του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$. Υποθέτουμε ότι:*

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} + \mathcal{U}) = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) + 1$$

Να δειχθεί ότι ένας εκ των υποχώρων $\mathcal{V}$ και $\mathcal{U}$ συμπίπτει με τον $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ και ο άλλος με τον $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$.

Λύση. Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι οι υπόχωροι $\mathcal{V} + \mathcal{U}$ και $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$ έχουν πεπερασμένη διάσταση και ισχύει

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} + \mathcal{U}) + \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V} + \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V}$$

Συνδυάζοντας την τελευταία σχέση με την υπόθεση έπεται ότι:

$$2\,\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) + 1 = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V} + \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U} \tag{†}$$

Επειδή ο $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V}$ και του $\mathcal{U}$ θα έχουμε $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) \leq \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V})$ και $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) \leq \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{W})$. Επομένως από τη σχέση (†) θα έχουμε ότι:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U} \leq \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V} + 1 \quad \text{και} \quad \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V} \leq \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U} + 1$$

και επομένως:
$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V}-1 \ \leq \ \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U} \ \leq \ \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V}+1$$
Επειδή η διάσταση υπόχωρων είναι 0 ή ένας θετικός ακέραιος, από τη σχέση (††) έπεται ότι θα ισχύει μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(1)
$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V}=\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U}+1$$
(2)
$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V}=\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U}$$
(3)
$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U} \ = \ \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V}+1$$
Για κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις, θα έχουμε:

(1) Έστω ότι $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V}=\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U}+1$. Τότε από τη σχέση (†) προκύπτει ότι
$$2\,\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}\cap\mathcal{U})+1=2\,\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U}+1 \quad\Longrightarrow\quad \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}\cap\mathcal{U})=\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U}$$
Επειδή $\mathcal{V}\cap\mathcal{U}\subseteq\mathcal{U}$ και $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}\cap\mathcal{U})=\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U}$, θα έχουμε $\mathcal{V}\cap\mathcal{U}=\mathcal{U}$ και αυτό σημαίνει ότι $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{V}$. Προφανώς τότε $\mathcal{V}+\mathcal{U}=\mathcal{V}$. Άρα σ' αυτή την περίπτωση έχουμε:
$$\mathcal{V}\cap\mathcal{U}=\mathcal{U} \quad \text{και} \quad \mathcal{V}+\mathcal{U}=\mathcal{V}$$
(2) Έστω ότι $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V}=\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U}$. Τότε από τη σχέση (†) προκύπτει ότι:
$$2\,\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}\cap\mathcal{U})+1=2\,\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V}$$
και αυτό είναι άτοπο διότι το πρώτο μέλος της παραοπάνω ισότητας είναι περιττός και το δεύτερο μέλος της είναι άρτιος. Άρα η περίπτωση $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V}=\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U}$ δεν εμφανίζεται.

(3) Έστω ότι $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U} \ = \ \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V}+1$. Τότε από τη σχέση (†) προκύπτει ότι
$$2\,\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}\cap\mathcal{U})+1=2\,\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V}+1 \quad\Longrightarrow\quad \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}\cap\mathcal{U})=\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V}$$
Επειδή $\mathcal{V}\cap\mathcal{U}\subseteq\mathcal{V}$ και $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}\cap\mathcal{U})=\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V}$, θα έχουμε $\mathcal{V}\cap\mathcal{U}=\mathcal{V}$ και αυτό σημαίνει ότι $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}$. Προφανώς τότε $\mathcal{V}+\mathcal{U}=\mathcal{U}$. Άρα σ' αυτή την περίπτωση έχουμε:
$$\mathcal{V}\cap\mathcal{U}=\mathcal{V} \quad \text{και} \quad \mathcal{V}+\mathcal{U}=\mathcal{U}$$
■

Άσκηση 4. *Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του* $\mathbb{R}^3$*:*
$$\vec{x}_1=(1,2,1), \quad \vec{x}_2=(1,1,-1), \quad \vec{x}_3=(1,3,3)$$
$$\vec{y}_1=(2,3,-1), \quad \vec{y}_2=(1,2,2), \quad \vec{y}_3=(1,1,-3)$$
Αν
$$\mathcal{V}=\big\langle\vec{x}_1,\,\vec{x}_2,\,\vec{x}_3\big\rangle \quad \textit{και} \quad \mathcal{U}=\big\langle\vec{y}_1,\,\vec{y}_2,\,\vec{y}_3\big\rangle$$
να βρεθούν βάσεις και η διάσταση των υπόχωρων $\mathcal{V},\ \mathcal{U},\ \mathcal{V}+\mathcal{U}$ *και* $\mathcal{V}\cap\mathcal{U}$.

Λύση. (1) Θεωρούμε τον πίνακα
$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&-1\\1&3&3\end{pmatrix}$$
του οποίου οι γραμμές αποτελούνται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3$, και βρίσκουμε την ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του:
$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&-1\\1&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&-2\\0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3+\Gamma_2,\ \Gamma_1\to\Gamma_1+2\Gamma_2]{\Gamma_2\to-\Gamma_2}\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}=\Gamma(A)$$
Γνωρίζουμε τότε ότι, θέτοντας $\vec{x}_1'=(1,0,-3)$ και $\vec{x}_2'=(0,1,2)$, θα έχουμε:
$$\mathcal{V}=\big\langle\vec{x}_1',\,\vec{x}_2'\big\rangle$$

Αν $\lambda_1 \vec{x}_1' + \lambda_2 \vec{x}_2' = \vec{0}$, τότε

$$\lambda_1 \vec{x}_1' + \lambda_2 \vec{x}_2' = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1(1,0,-3) + \lambda_2(0,1,2) = (0,0,0) \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad (\lambda_1, \lambda_2, -3\lambda_1 + 2\lambda_2) = (0,0,0) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Άρα το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{x}_1', \vec{x}_2'\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}$ και επομένως

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = 2$$

(2) Θεωρούμε τον πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

του οποίου οι γραμμές αποτελούνται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3$, και βρίσκουμε την ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma(A)$$

Γνωρίζουμε τότε ότι, θέτοντας $\vec{y}_1' = (1,0,-8)$ και $\vec{y}_2' = (0,1,5)$, θα έχουμε:

$$\mathcal{U} = \langle \vec{y}_1', \vec{y}_2' \rangle$$

Αν $\lambda_1 \vec{y}_1' + \lambda_2 \vec{y}_2' = \vec{0}$, τότε

$$\lambda_1 \vec{y}_1' + \lambda_2 \vec{y}_2' = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1(1,0,-8) + \lambda_2(0,1,5) = (0,0,0) \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad (\lambda_1, \lambda_2, -8\lambda_1 + 5\lambda_2) = (0,0,0) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Άρα το σύνολο $\mathcal{C} = \{\vec{y}_1', \vec{y}_2'\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{U}$ και επομένως

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}} \mathcal{U} = 2$$

(3) Επειδή το σύνολο $\mathcal{B}$, ως βάση του $\mathcal{V}$ είναι σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$ και το σύνολο $\mathcal{C}$, ως βάση του $\mathcal{U}$ είναι σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{U}$, έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ είναι σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V} + \mathcal{U}$:

$$\mathcal{V} + \mathcal{U} = \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle$$

Για να προσδιορίσουμε ένα οικονομικότερο σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V} + \mathcal{U}$ εργαζόμαστε ως εξής:

Θεωρούμε τον πίνακα

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

του οποίου οι γραμμές αποτελούνται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων του συνόλου $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} = \{\vec{x}_1', \vec{x}_2', \vec{y}_1', \vec{y}_2'\}$, και βρίσκουμε την ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_2]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \to \frac{1}{3}\Gamma_4]{\Gamma_3 \to -\frac{1}{5}\Gamma_3}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_3,\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + 3\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma(A)$$

Γνωρίζουμε τότε ότι θέτοντας $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$, αποκτούμε ένα σύνολο γεννητόρων $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ του $\mathcal{V}+\mathcal{W}$, το οποίο είναι προφανώς μια βάση του $\mathcal{V}+\mathcal{U}$. Επειδή προφανώς $\langle \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\rangle = \mathbb{R}^3$, έπεται ότι:

$$\mathcal{V}+\mathcal{W} = \langle \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\rangle = \mathbb{R}^3 \quad \text{και} \quad \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}(\mathcal{V}+\mathcal{U}) = 3$$

(4) Επειδή

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}(\mathcal{V}+\mathcal{U}) + \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}(\mathcal{V}\cap\mathcal{U}) = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V} + \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{U}$$

έπεται ότι

$$3 + \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}(\mathcal{V}\cap\mathcal{U}) = 2+2 \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}(\mathcal{V}\cap\mathcal{U}) = 1$$

Θα προσδιορίσουμε μια βάση του $\mathcal{V}\cap\mathcal{U}$. Έστω $(x,y,z)\in\mathcal{V}\cap\mathcal{U}$. Τότε

$$(x,y,z)\in\mathcal{V}\cap\mathcal{U} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases}(x,y,z)\in\mathcal{V}\\(x,y,z)\in\mathcal{U}\end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases}(x,y,z)\in\langle \vec{x}_1',\ \vec{x}_2'\rangle\\(x,y,z)\in\langle \vec{y}_1',\ \vec{y}_2'\rangle\end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases}(x,y,z)\in\langle (1,0,-3),\ (0,1,2)\rangle\\(x,y,z)\in\langle (1,0,-8),\ (0,1,5)\rangle\end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases}\exists\,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}:\ (x,y,z) = \lambda_1(1,0,-3)+\lambda_2(0,1,2)\\\exists\,\kappa_1,\kappa_2\in\mathbb{R}:\ (x,y,z) = \kappa_1(1,0,-8)+\kappa_2(0,1,5)\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases}(x,y,z) = (\lambda_1,\lambda_2,-3\lambda_1+2\lambda_2)\\(x,y,z) = (\kappa_1,\kappa_2,-8\kappa_1+5\kappa_2)\end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases}x=\lambda_1=\kappa_1\ \ \&\ \ y=\lambda_2=\kappa_2\\z=-3\lambda_1+2\lambda_2=-8\kappa_1+5\kappa_2\end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad z=-3x+2y=-8x+5y \quad \Longrightarrow \quad 5x-3y=0 \quad \Longrightarrow \quad y=\frac{5}{3}x \ \text{ και τότε } \ z=-3x+2y=-3x+2\frac{5}{3}x=\frac{1}{3}x$$

Άρα θα έχουμε:

$$y=\frac{5}{3}x \quad \text{και} \quad z=\frac{1}{3}x, \quad \text{δηλαδή}: \quad (x,y,z)=\left(x,\frac{5}{3}x,\frac{1}{3}x\right)=x\left(1,\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$$

Επομένως καταλήγουμε ότι

$$\mathcal{V}\cap\mathcal{U} = \left\{x\left(1,\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)\in\mathbb{R}^3 \mid x\in\mathbb{R}\right\} = \{\kappa(3,5,1)\in\mathbb{R}^3 \mid \kappa\in\mathbb{R}\} = \langle (3,5,1)\rangle$$

Το διάνυσμα $(3,5,1)$ είναι, ως μη-μηδενικό, γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί βάση του υπόχωρου $\mathcal{V}\cap\mathcal{U}$. ■

Άσκηση 5. *Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του* $\mathbb{R}^4$*:*

$$\vec{x}_1=(1,1,0,0),\quad \vec{x}_2=(0,1,1,0),\quad \vec{x}_3=(0,0,1,1)$$

$$\vec{y}_1=(1,0,1,0),\quad \vec{y}_2=(0,2,1,1),\quad \vec{y}_3=(1,2,1,2)$$

Αν

$$\mathcal{V}=\langle \vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \vec{x}_3\rangle \quad \textit{και} \quad \mathcal{U}=\langle \vec{y}_1,\ \vec{y}_2,\ \vec{y}_3\rangle$$

να βρεθούν βάσεις και η διάσταση των υπόχωρων $\mathcal{V},\ \mathcal{U},\ \mathcal{V}+\mathcal{U}$ *και* $\mathcal{V}\cap\mathcal{U}$.

Λύση. (1) Θεωρούμε τον πίνακα

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

του οποίου οι γραμμές αποτελούνται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3$, και βρίσκουμε την ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_3]{\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_2} \begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1+\Gamma_3} \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}=\Gamma(A)$$

Γνωρίζουμε τότε ότι, θέτοντας $\vec{x}_1' = (1,0,0,1)$, $\vec{x}_2' = (0,1,0,-1)$, $\vec{x}_3' = (0,0,1,1)$ και θα έχουμε:

$$\mathcal{V} = \langle \vec{x}_1', \vec{x}_2', \vec{x}_3' \rangle$$

Αν $\lambda_1\vec{x}_1' + \lambda_2\vec{x}_2' = \vec{0} + \lambda_3\vec{x}_3' = \vec{0}$, τότε

$$\lambda_1\vec{x}_1' + \lambda_2\vec{x}_2' = \vec{0} + \lambda_3\vec{x}_3' \implies \lambda_1(1,0,0,1) + \lambda_2(0,1,0,-1) + \lambda_3(0,0,1,1) = (0,0,0) \implies$$

$$\implies (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0,0) \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Άρα το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{x}_1', \vec{x}_2', \vec{x}_3'\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}$ και επομένως

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V} = 3$$

(2) Θεωρούμε τον πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

του οποίου οι γραμμές αποτελούνται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3$, και βρίσκουμε την ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \frac{1}{2}\Gamma_3]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \Gamma(B)$$

Γνωρίζουμε τότε ότι, θέτοντας $\vec{y}_1' = (1,0,0,1)$, $\vec{y}_2' = (0,1,0,1)$, και $\vec{y}_3' = (0,0,1,-1)$ θα έχουμε:

$$\mathcal{U} = \langle \vec{y}_1', \vec{y}_2', \vec{y}_3' \rangle$$

Αν $\lambda_1\vec{y}_1' + \lambda_2\vec{y}_2' + \lambda_3\vec{y}_3' = \vec{0}$, τότε

$$\lambda_1\vec{y}_1' + \lambda_2\vec{y}_2' + \lambda_3\vec{y}_3' = \vec{0} \implies \lambda_1(1,0,0,1) + \lambda_2(0,1,0,1) + \lambda_3(0,0,1,-1) = (0,0,0) \implies$$

$$\implies (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) = (0,0,0) \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Άρα το σύνολο $\mathcal{C} = \{\vec{y}_1', \vec{y}_2', \vec{y}_3'\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{U}$ και επομένως

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U} = 3$$

(3) Επειδή το σύνολο $\mathcal{B}$, ως βάση του $\mathcal{V}$ είναι σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$ και το σύνολο $\mathcal{C}$, ως βάση του $\mathcal{U}$ είναι σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{U}$, έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ είναι σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V} + \mathcal{U}$:

$$\mathcal{V} + \mathcal{U} = \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle$$

Για να προσδιορίσουμε ένα οικονομικότερο σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V} + \mathcal{U}$ εργαζόμαστε ως εξής:

Θεωρούμε τον πίνακα

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

του οποίου οι γραμμές αποτελούνται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων του συνόλου $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} = \big\{\vec{x}_1', \vec{x}_2', \vec{x}_3', \vec{y}_1', \vec{y}_2', \vec{y}_3'\big\}$, και βρίσκουμε την ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_5 \to \Gamma_5 - \Gamma_2,\, \Gamma_6 \to \Gamma_6 - \Gamma_3]{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \leftrightarrow \Gamma_6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_5 \to \Gamma_5 + \Gamma_4]{\Gamma_4 \to -\frac{1}{2}\Gamma_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_4,\, \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_4]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma(A)$$

Γνωρίζουμε τότε ότι θέτοντας $\vec{e}_1 = (1,0,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1,0)$, και $\vec{e}_4 = (0,0,0,1)$, αποκτούμε ένα σύνολο γεννητόρων $\big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\big\}$ του $\mathcal{V} + \mathcal{W}$, το οποίο είναι προφανώς μια βάση του $\mathcal{V} + \mathcal{U}$. Επειδή όμως έχουμε και $\big\langle \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3, \vec{e}_4 \big\rangle = \mathbb{R}^4$, έπεται ότι:

$$\mathcal{V} + \mathcal{W} = \big\langle \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3,\ \vec{e}_4 \big\rangle = \mathbb{R}^4 \quad \text{και} \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} + \mathcal{U}) = 4$$

(4) Επειδή

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} + \mathcal{U}) + \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) = \dim_{\mathbb{R}}\mathcal{V} + \dim_{\mathbb{R}}\mathcal{U}$$

έπεται ότι

$$4 + \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) = 3 + 3 \quad \Longrightarrow \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) = 2$$

Θα προσδιορίσουμε μια βάση του $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$. Έστω $(x,y,z,w) \in \mathcal{V} \cap \mathcal{U}$. Τότε

$$(x,y,z,w) \in \mathcal{V} \cap \mathcal{U} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} (x,y,z,w) \in \mathcal{V} \\ (x,y,z,w) \in \mathcal{U} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} (x,y,z,w) \in \big\langle \vec{x}_1', \vec{x}_2', \vec{x}_3' \big\rangle \\ (x,y,z,w) \in \big\langle \vec{y}_1', \vec{y}_2', \vec{y}_3' \big\rangle \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} (x,y,z,w) \in \big\langle (1,0,0,1),\ (0,1,0,-1),\ (0,0,1,1) \big\rangle \\ (x,y,z,w) \in \big\langle (1,0,0,1),\ (0,1,0,1),\ (0,0,1,-1) \big\rangle \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}:\ (x,y,z,w) = \lambda_1(1,0,0,1) + \lambda_2(0,1,0,1) + \lambda_3(0,0,1,1) \\ \exists\, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbb{R}:\ (x,y,z,w) = \kappa_1(1,0,0,1) + \kappa_2(0,1,0,1) + \kappa_3(0,0,1,-1) \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} (x,y,z,w) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) \\ (x,y,z,w) = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \lambda_1 = \kappa_1 \ \&\ y = \lambda_2 = \kappa_2 \ \&\ z = \lambda_3 = \kappa_3 \\ w = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = \kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3 \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad w = x - y + z = x + y - z \quad \Longrightarrow \quad y = z \quad \text{και τότε} \quad w = x$$

Άρα θα έχουμε:

$$(x,y,z,w) \in \mathcal{V} \cap \mathcal{U} \quad \Longleftrightarrow \quad w = x \ \&\ y = z$$

Επομένως καταλήγουμε ότι

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{U} = \big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = w \ \&\ y = z \in \mathbb{R}\big\} = \big\{(x,y,y,x)\mathbb{R}^3 \mid x,y \in \mathbb{R}\big\} =$$

$$= \big\{(x,0,0,x) + (0,y,y,0)\mathbb{R}^3 \mid x,y \in \mathbb{R}\big\} = \big\{x(1,0,0,1) + y(0,1,1,0)\mathbb{R}^3 \mid x,y \in \mathbb{R}\big\}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{U} = \big\langle (1,0,0,1),\ (0,1,1,0) \big\rangle$$

και επειδή τα διανύσματα $(1,0,0,1)$, $(0,1,1,0)$ $(3,5,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται ότι το σύνολο $\big\{(1,0,0,1),\ (0,1,1,0)\big\}$ αποτελεί βάση του υπόχωρου $\mathcal{V}\cap\mathcal{U}$. ■

Ένας τετραγωνικός πίνακας $n\times n$ πίνακας

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

καλείται **μαγικός** αν και μόνον αν το άθροισμα:

(1) $\forall i=1,2,\cdots,n$, το άθροισμα των στοιχείων της i-γραμμής: $a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}$
(2) $\forall j=1,2,\cdots,n$, το άθροισμα των στοιχείων της j-στήλης: $a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{nj}$
(3) των στοιχείων της κύριας διαγωνίου: $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$
(4) των στοιχείων της δευτερεέυουσας διαγωνίου: $a_{1n}+a_{2n-1}+\cdots+a_{n1}$

είναι ίσο με τον ίδιο αριθμό $S\in\mathbb{K}$, ο οποίος καλείται ο **μαγικός αριθμός** του A.

Για παράδειγμα οι πίνακες

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}2&7&6\\9&5&1\\4&3&8\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}16&3&2&13\\5&10&11&8\\9&6&7&12\\4&15&14&1\end{pmatrix}$$

είναι μαγικοί με μαγικούς αριθμούς 2, 15 και 34 αντίστοιχα.

Συμβολίζουμε με $\mathsf{M\Pi}(n)$ το σύνολο όλων των $n\times n$ μαγικών πινάκων.

Άσκηση 6. *Να δειχθεί ότι το σύνολο* $\mathsf{M\Pi}(n)$ *είναι ένας υπόχωρος του* $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$. *Να βρεθούν βάσεις των υπόχωρων* $\mathsf{M\Pi}(2)$ *και* $\mathsf{M\Pi}(3)$.

Λύση. Προφανώς ο μηδενικός πίνακας είναι μαγικός με μαγικό αριθμό ίσο με 0. Αν A και B είναι μαγικοί πίνακες με μαγικούς αριθμούς S και T, τότε προφανώς ο πίνακας $A+B$ είναι μαγικός με μαγικό αριθμό $S+T$. Τέλος αν ο πίνακας A είναι μαγικός με μαγικό αριθμό S και $\lambda\in\mathbb{K}$, τότε προφανώς ο πίνακας λA είναι μαγικός με μαγικός αριθμό λS. Άρα το υποσύνολο $\mathsf{M\Pi}(n)$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$.

(1) Έστω $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ ένας μαγικός 2×2 πίνακας με μαγικό αριθμό S. Τότε:

$$a+b=c+d=a+c=b+d=a+d=b+c=S$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται άμεσα ότι $a=b=c=d$ και άρα $A=\begin{pmatrix}a&a\\a&a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$. Προφανώς τότε $S=2a$. Τα παραπάνω δείχνουν ότι:

$$\mathsf{M\Pi}(2)=\left\{a\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\in\mathsf{M}_2(\mathbb{K})\mid a\in\mathbb{K}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right\rangle$$

Επομένως το μονοσύνολο $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}$ είναι μια βάση του $\mathsf{M\Pi}(2)$ και άρα $\dim_{\mathbb{K}}\mathsf{M\Pi}(2)=1$.

(2) Έστω $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ ένας μαγικός 3×3 πίνακας με μαγικό αριθμό S. Τότε:

$$\begin{aligned}a_{11}+a_{12}+a_{13}=a_{21}+a_{22}+a_{23}=a_{31}+a_{32}+a_{33}=\\ =a_{11}+a_{21}+a_{31}=a_{12}+a_{22}+a_{32}=a_{13}+a_{23}+a_{33}=\\ =a_{11}+a_{22}+a_{33}=a_{13}+a_{22}+a_{31}=S\end{aligned}$$

Θέτοντας:

$$x = a_{11} \quad \text{και} \quad y = a_{13} \quad \text{και} \quad z = a_{21}$$

θα έχουμε:

$$a_{31} = S - x - z \quad \text{και} \quad a_{12} = S - x - y \quad \Longrightarrow \quad a_{22} = S - y - (S - x - z) = x - y + z$$

$$a_{32} = S - (S - x - y) - (x - y + z) = 2y - z \quad \text{και} \quad a_{23} = S - x + y - 2z \quad \text{και} \quad a_{33} = x - 2y + 2z$$

$$a_{23} = S - x + y - 2z$$

Επειδή $S = a_{11} + a_{22} + a_{33}$, από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι:

$$S = a_{11} + a_{22} + a_{33} = x + x - y + z + x - 2y + 2z = 3x - 3y + 3z \quad \Longrightarrow \quad S = 3(x - y + z)$$

και τότε βλέπουμε ότι:

$$A = \begin{pmatrix} x & 2x - 4y + 3z & y \\ z & x - y + z & 2x - 2y + z \\ 2x - 3y + 2z & 2y - z & x - 2y + 2z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x & 2x & 0 \\ 0 & x & 2x \\ 2x & 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4y & y \\ 0 & -y & -2y \\ -3y & 2y & -2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3z & 0 \\ z & z & z \\ 2z & -z & 2z \end{pmatrix} =$$

$$= x \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Επομένως:

$$\mathsf{M\Pi}(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Οι μαγικοί πίνακες

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

με μαγικούς αριθμούς 3, -3 και 3 είναι γραμμικά ανεξάρτητοι, διότι:

$$\lambda_1 K + \lambda_2 L + \lambda_3 M = \mathsf{0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 2\lambda_1 - 4\lambda_2 + 3\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ 2\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3 & 2\lambda_2 - \lambda_3 & \lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Επομένως το σύνολο $\{K, L, M\}$ είναι μια βάση του $\mathsf{M\Pi}(3)$ και άρα:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathsf{M\Pi}(3) = 3$$

■

Άσκηση 7. *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ και*

$$(\Sigma) \quad AX = 0$$

το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους. Αν $m < n$ να δειχθεί ότι το (Σ) έχει τουλάχιστον μια μη μηδενική λύση, και επομένως έχει άπειρες λύσεις.

Λύση. Θεωρούμε τις στήλες

$$\Sigma_1(A) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \Sigma_2(A) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots\cdots, \quad \Sigma_n(A) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

του πίνακα A ως διανύσματα του χώρου $\mathbb{K}_m$ των στηλών με m στοιχεία. Επειδή $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathbb{K}_m = m$, τα $n > m$ το πλήθος διανύσματα $\Sigma_1(A), \cdots, \Sigma_n(A)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Επομένως υπάρχουν στοιχεία $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$, όπου $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq (0, 0, \cdots, 0)$, έτσι ώστε:

$$x_1\Sigma_1(A) + x_2\Sigma_2(A) + \cdots + x_n\Sigma_n(A) = \mathsf{0}$$

όπου $\mathsf{0} \in \mathbb{K}_m$ είναι η μηδενική στήλη. Τότε θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{21}x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12}x_2 \\ a_{22}x_2 \\ \vdots \\ a_{m2}x_2 \end{pmatrix} + \cdots\cdots + \begin{pmatrix} a_{1n}x_n \\ a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \cdots & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \cdots & a_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & \cdots & a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Η παραπάνω σχέση είναι προφανώς ισοδύναμη με την

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

δηλαδή $AX = \mathsf{0}$ και η μη-μηδενική στήλη $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ αποτελεί μια μη-μηδενική λύση του (Σ).

Γνωρίζουμε ότι το σύνολο λύσεων

$$\Lambda(\Sigma) = \big\{X \in \mathbb{K}_n \mid AX = 0\big\}$$

του (Σ) είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}_n$. Επειδή το (Σ) έχει μια μη-μηδενική λύση, έπεται ότι ο υπόχωρος $\Lambda(\Sigma)$ δεν είναι ο μηδενικός υπόχωρος, και άρα $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\Lambda(\Sigma) \geq 1$. Τότε το πλήθος των στοιχείων του $\Lambda(\Sigma)$ είναι άπειρο: για παράδειγμα αν $0 \neq X \in \Lambda(\Sigma)$, τότε $\lambda X \in \Lambda(\Sigma)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$. Επειδή το πλήθος των στοιχείων του $\mathbb{K} \in \big\{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\big\}$ είναι άπειρο, έπεται ότι το πλήθος των στοιχείων του $\Lambda(\Sigma)$ είναι άπειρο. ■

Άσκηση 8. *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο k με $k \geq n^2$, υπάρχουν στοιχεία $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, όχι όλα ίσα με μηδέν, έτσι ώστε:*

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \cdots + \lambda_k A^k = \mathsf{0}$$

Λύση. Γνωρίζουμε[1] ότι ο $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ έχει διάσταση $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathsf{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$. Επομένως κάθε σύνολο διανυσμάτων του με περισσότερα από n^2 στοιχεία είναι γραμμικά εξαρτημένο. Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{A} = \big\{I_n,\, A,\, A^2,\, \cdots,\, A^k\big\}$$

(1) Υποθέτουμε ότι το σύνολο $\mathcal{A}$ έχει λιγότερα από $k+1$ στοιχεία. Αυτό σημαίνει ότι δεν είναι όλα τα στοιχεία του συνόλου $\mathcal{A}$ διαφορετικά. Επομένως υπάρχουν ακέραιοι μ, ν, όπου $0 \leq \nu < \mu \leq k$ έτσι ώστε $A^\nu = A^\mu$. Τότε όμως το σύνολο $\mathcal{A}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο διότι θα έχουμε μια σχέση γραμμικής εξάρτησης των στοιχείων του της μορφής $0I_n + 0A + 0A^2 + \cdots + A^\nu + \cdots - A^\mu + \cdots + 0A^k = \mathsf{0}$.

[1] Το σύνολο πινάκων $\big\{E_{ij} \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \mid 1 \leq i, j \leq n\big\}$, όπου ο πίνακας E_{ij} έχει τη μονάδα στην (i, j)-θέση και παντού αλλού μηδέν, είναι μια βάση του $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$.

(2) Αν το σύνολο $\mathcal{A}$ έσχει ακριβώς $k+1$ στοιχεία, δηλαδή όλα τα στοιχεία του είναι ανά δύο διαφορετικά, τότε επειδή το πλήθος τους είναι $k+1 > n^2$, έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{A}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Άρα σε κάθε περίπτωση το σύνολο $\mathcal{A}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, και αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν στοιχεία $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, όχι όλα ίσα με μηδέν, έτσι ώστε:

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \cdots + \lambda_k A^k = 0$$ ■

Άσκηση 9. *Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_n[x]$ των πολυωνύμων με βαθμό το πολύ n υπεράνω του $\mathbb{R}$, και έστω $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ ανά δύο διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $1 \leq k \leq n$, θεωρούμε το σύνολο:*

$$\mathcal{V}_k = \big\{P(x) \in \mathbb{R}_n[x] \mid P(\rho_1) = P(\rho_2) = \cdots = P(\rho_k) = 0\big\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι το υποσύνολο $\mathcal{V}_k$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{K}_n[x]$.*
(2) *Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του $\mathcal{V}_k$.*
(3) *Να συμπληρωθεί η βάση του $\mathcal{V}_k$ που βρέθηκε στο (2) σε μια βάση του $\mathbb{R}_n[x]$.*

Λύση. Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$\Pi(x) = (x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_k) \in \mathbb{R}_n[x]$$

και έστω το ακόλουθο σύνολο πολυωνύμων

$$\mathcal{B}_k = \big\{\Pi(x),\, x\Pi(x),\, x^2\Pi(x),\, \cdots,\, x^{n-k}\Pi(x)\big\}$$

Προφανώς $\deg \Pi(x) = k$, και επομένως:

$$\deg x^m \Pi(x) = k+m, \quad 0 \leq m \leq n-k+1$$

Επειδή τα πολυώνυμα του συνόλου $\mathcal{B}_k$ έχουν ανά δύο διαφορετικό βαθμό, έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{B}_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Αναλυτικά: έστω $a_0, a_1, \cdots, a_{n-k} \in \mathbb{K}$, έτσι ώστε:

$$a_0\Pi(x) + a_1 x\Pi(x) + a_2 x^2\Pi(x) + \cdots + a_{n-k}x^{n-k}\Pi(x) = 0$$

Επειδή $\deg \Pi(x) = k$, $\deg x\Pi(x) = k+1$, $\deg x^2\Pi(x) = k+2$, $\cdots$, $\deg x^{n-k}\Pi(x) = n$, ο συντελεστής a_{n-k} του x^n στο πολυώνυμο του πρώτου μέλους είναι ίσος με μηδέν, και άρα η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$a_0\Pi(x) + a_1 x\Pi(x) + a_2 x^2\Pi(x) + \cdots + a_{n-k-1}x^{n-k-1}\Pi(x) = 0$$

ο συντελεστής a_{n-k-1} του x^{n-1} στο πολυώνυμο του πρώτου μέλους είναι ίσος με μηδέν, και άρα η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$a_0\Pi(x) + a_1 x\Pi(x) + a_2 x^2\Pi(x) + \cdots + a_{n-k-2}x^{n-k-2}\Pi(x) = 0$$

Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο, θα καταλήξουμε ότι $a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-k} = 0$ και θα έχουμε τη σχέση

$$a_0\Pi(x) + a_1 x\Pi(x) = 0$$

Τότε ο συντελεστής a_1 του x^{k+1} στο πολυώνυμο του πρώτου μέλους είναι ίσος με μηδέν, και άρα η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$a_0\Pi(x) = 0$$

Τότε ο συντελεστής a_0 του x^k στο πολυώνυμο $\Pi(x)$ είναι ίσος με μηδέν. Επομένως

$$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-k} = 0$$

Έτσι το σύνολο $\mathcal{B}_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Έστω $P(x) \in \mathcal{V}_k$. Τότε $P(\rho_1) = P(\rho_2) = \cdots = P(\rho_k) = 0$, και άρα οι ανά δύο διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_k$ είναι ρίζες του $P(x)$. Τότε όπως γνωρίζουμε το πολυώνυμο $\Pi(x) = (x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_k)$ είναι διαιρέτης του $P(x)$, δηλαδή υπάρχει πολυώνυμο $A(x) \in \mathbb{R}[x]$ έτσι ώστε:

$$P(x) = A(x)\Pi(x)$$

Επειδή $P(x) \in \mathcal{V}_k$, έπεται ότι $\deg P(x) \leq n+1$ και επομένως, επειδή $\deg P(x) = \deg A(x) + \deg \Pi(x)$, θα έχουμε:

$$0 \leq \deg A(x) \leq n-k$$

Με άλλα λόγια, $A(x) \in \mathbb{R}_{n-k}[x]$ και επομένως

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-k} x^{n-k}$$

Τότε

$$P(x) = A(x)\Pi(x) = a_0\Pi(x) + a_1 x\Pi(x) + a_2 x^2\Pi(x) + \cdots + a_{n-k}x^{n-k}\Pi(x) \qquad (*)$$

το πολυώνυμο στο δεύτερο μέλος της παραπάνω ισότητας ανήκει στον υπόχωρο

$$\big\langle \Pi(x),\, x\Pi(x),\, x^2\Pi(x),\, \cdots ,\, x^{n-k}\Pi(x)\big\rangle$$

ο οποίος παράγεται από τα πολυώνυμα του συνόλου $\mathcal{B}_k$. Άρα $\mathcal{V}_k \subseteq \big\langle \Pi(x),\, x\Pi(x),\, x^2\Pi(x),\, \cdots ,\, x^{n-k}\Pi(x)\big\rangle$.

Αντίστροφα, αν $P(x) \in \big\langle \Pi(x),\, x\Pi(x),\, x^2\Pi(x),\, \cdots ,\, x^{n-k}\Pi(x)\big\rangle$, τότε $P(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ και το $P(x)$ είναι της μορφής $(*)$. Επειδή προφανώς τότε $\Pi(\rho_i) = 0$, $1 \leq i \leq k$, έπεται ότι $P(x) \in \mathcal{V}_k$. Άρα

$$\mathcal{V}_k = \big\langle \Pi(x),\, x\Pi(x),\, x^2\Pi(x),\, \cdots ,\, x^{n-k}\Pi(x)\big\rangle$$

Επειδή το σύνολο $\mathcal{B}_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{B}_k$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}_k$ και άρα:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V}_k = n - k + 1$$

Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{C} = \big\{1,\, x,\, x^2,\, \cdots ,\, x^{k-1}\big\}$. Τότε το σύνολο

$$\mathcal{C} \cup \mathcal{B}_k = \big\{1,\, x,\, x^2,\, \cdots ,\, x^{k-1},\, \Pi(x),\, x\Pi(x),\, x^2\Pi(x),\, \cdots ,\, x^{n-k}\Pi(x)\big\}$$

είναι ένα σύνολο $n+1$ το πλήθος πολυωνύμων $P_i(x)$ με $\deg P_i(x) = i$, $0 \leq i \leq n$. Γνωρίζουμε τότε ότι το σύνολο $\mathcal{C} \cup \mathcal{B}_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα είναι μια βάση του $\mathbb{R}_n[x]$ η οποία συμπληρώνει τη βάση $\mathcal{B}_k$ του $\mathcal{V}_k$. ∎

Υπενθυμίζουμε ότι αν

$$\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1,\, \vec{e}_2,\, \cdots ,\, \vec{e}_n\big\}$$

$$\mathcal{C} = \big\{\vec{\epsilon}_1,\, \vec{\epsilon}_2,\, \cdots ,\, \vec{\epsilon}_n\big\}$$

είναι δύο βάσεις του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$, τότε γράφοντας τα διανύσματα της βάσης $\mathcal{C}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B}$

$$\vec{\epsilon}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{e}_n$$

$$\vec{\epsilon}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n2}\vec{e}_n$$

$$\vdots$$

$$\vec{\epsilon}_n = a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n$$

προκύπτει ο $n \times n$ πίνακας

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ο οποίος καλείται ο **πίνακας μετάβασης από τη βάση** $\mathcal{B}$ **στη βάση** $\mathcal{C}$. Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι ο πίνακας $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ είναι αντιστρέψιμος και

$$(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$$

όπου ο $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{C}$ στη βάση $\mathcal{B}$.

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$ ένα τυχόν διάνυσμα του $\mathcal{E}$ και έστω

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{x}_n$$

$$\vec{x} = x_1'\vec{e}_1 + x_2'\vec{e}_2 + \cdots + x_n'\vec{x}_n$$

η μοναδική γραφή του $\vec{x}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων των βάσεων $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$. Οι πίνακες-στήλες

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

καλούνται οι *πίνακες των συνιστωσών* του $\vec{x}$ ως προς τι βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$ αντίστοιχα. Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι:

$$X = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot X' \qquad \text{και} \qquad X' = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot X$$

Άσκηση 10. *Θεωρούμε τις ακόλουθες βάσεις του* $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left\{\vec{e}_1 = (1,0,0),\ \ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \ \vec{e}_1 = (0,0,1)\right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{\vec{\epsilon}_1 = (1,1,1),\ \ \vec{\epsilon}_2 = (1,1,0),\ \ \vec{\epsilon}_3 = (1,0,0)\right\}$$

(1) *Να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ *και* $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.
(2) *Να βρεθούν οι συνιστώσες του διανύσματος* $\vec{x} = (4,-2,3)$ *ως προς τη βάση* $\mathcal{C}$.

Λύση. (1) • Για να προσδιορίσουμε τον πίνακα μετάβασης $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ εκφράζουμε τα διανλύσματα της βάσης $\mathcal{C}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B}$. Θα έχουμε:

$$\vec{\epsilon}_1 = (1,1,1) = (1,0,0) + (0,1,0) + (0,0,1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

$$\vec{\epsilon}_2 = (1,1,0) = (1,0,0) + (0,1,0) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$$

$$\vec{\epsilon}_1 = (1,0,0) = (1,0,0) = \vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$$

Άρα:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Για να προσδιορίσουμε τον πίνακα μετάβασης $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ εκφράζουμε τα διανύσματα της βάσης $\mathcal{B}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{C}$. Θα έχουμε:

(α') Έστω

$$\vec{e}_1 = a\vec{\epsilon}_1 + b\vec{\epsilon}_2 + c\vec{\epsilon}_3 \implies (1,0,0) = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0) \implies (1,0,0) = (a+b+c, a+b, a)$$

$$\implies \begin{cases} a+b+c = 1 \\ a+b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} c = 1 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

Επομένως:

$$\vec{e}_1 = 0\vec{\epsilon}_1 + 0\vec{\epsilon}_2 + \vec{\epsilon}_3$$

(β') Έστω

$$\vec{e}_2 = a\vec{\epsilon}_1 + b\vec{\epsilon}_2 + c\vec{\epsilon}_3 \implies (0,1,0) = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0) \implies (0,1,0) = (a+b+c, a+b, a)$$

$$\implies \begin{cases} a+b+c = 0 \\ a+b = 1 \\ a = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} c = -1 \\ b = 1 \\ a = 0 \end{cases}$$

Επομένως:

$$\vec{e}_2 = 0\vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2 - \vec{\epsilon}_3$$

(γ′) Έστω

$$\vec{e}_3 = a\vec{\epsilon}_1 + b\vec{\epsilon}_2 + c\vec{\epsilon}_3 \implies (0,0,1) = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0) \implies (0,0,1) = (a+b+c, a+b, a)$$

$$\implies \begin{cases} a+b+c = 0 \\ a+b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} c = 0 \\ b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Επομένως:

$$\vec{e}_3 = \vec{\epsilon}_1 - \vec{\epsilon}_2 + 0\vec{\epsilon}_3$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) Προφανώς:

$$\vec{x} = (4,-2,3) = 4(1,0,0) - 2(0,1,0) + 3(0,0,1) = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$$

Επομένως:

$$X = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Τότε:

$$X' = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

δηλαδή: $\vec{x} = 3\vec{\epsilon}_1 - 5\vec{\epsilon}_2 + 6\vec{\epsilon}_3$. ■

Άσκηση 11. *Θεωρούμε τα ακόλουθα σύνολα διανυσμάτων του* $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left\{\vec{e}_1 = (1,1,1),\ \ \vec{e}_2 = (1,1,0),\ \ \vec{e}_1 = (1,0,0)\right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{\vec{\epsilon}_1 = (1,0,-1),\ \ \vec{\epsilon}_2 = (-1,1,0),\ \ \vec{\epsilon}_3 = (1,-1,1)\right\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι τα υποσύνολα* $\mathcal{B}$ *και* $\mathcal{C}$ *είναι βάσεις του* $\mathbb{R}^3$.
(2) *Να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ *και* $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.
(3) *Να βρεθούν οι συνιστώσες του διανύσματος* $\vec{x} = (1,-2,5)$ *ως προς τις βάσεις* $\mathcal{B}$ *και* $\mathcal{C}$.

Λύση. (1) Επειδή

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$, και επειδή

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

ότι το σύνολο $\mathcal{C}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.

(2) • Για να προσδιορίσουμε τον πίνακα μετάβασης $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ εκφράζουμε τα διανύσματα της βάσης $\mathcal{C}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B}$. Θα έχουμε:

(α΄) Έστω

$$\vec{\epsilon}_1 = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 \implies (1,0,-1) = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0) \implies (1,0,-1) = (a+b+c, a+b, a)$$

$$\implies \begin{cases} a+b+c=1 \\ a+b=0 \\ a=-1 \end{cases} \implies \begin{cases} c=1 \\ b=1 \\ a=-1 \end{cases}$$

Επομένως:

$$\vec{\epsilon}_1 = -1\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

(β΄) Έστω

$$\vec{\epsilon}_2 = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 \implies (-1,1,0) = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0) \implies (-1,1,0) = (a+b+c, a+b, a)$$

$$\implies \begin{cases} a+b+c=-1 \\ a+b=1 \\ a=0 \end{cases} \implies \begin{cases} c=-2 \\ b=1 \\ a=0 \end{cases}$$

Επομένως:

$$\vec{\epsilon}_2 = 0\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$$

(γ΄) Έστω

$$\vec{\epsilon}_3 = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 \implies (1,-1,1) = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0) \implies (1,-1,1) = (a+b+c, a+b, a)$$

$$\implies \begin{cases} a+b+c=1 \\ a+b=-1 \\ a=1 \end{cases} \implies \begin{cases} c=2 \\ b=-2 \\ a=1 \end{cases}$$

Επομένως:

$$\vec{\epsilon}_3 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

Άρα:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Για να προσδιορίσουμε τον πίνακα μετάβασης $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ εκφράζουμε τα διανύσματα της βάσης $\mathcal{B}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{C}$. Θα έχουμε:

(α΄) Έστω

$$\vec{e}_1 = a\vec{\epsilon}_1 + b\vec{\epsilon}_2 + c\vec{\epsilon}_3 \implies (1,1,1) = a(1,0,-1) + b(-1,1,0) + c(1,-1,1) \implies (1,1,1) = (a-b+c, b-c, -a+c)$$

$$\implies \begin{cases} a-b+c=1 \\ b-c=1 \\ -a+c=1 \end{cases} \implies \begin{cases} c=3 \\ b=4 \\ a=2 \end{cases}$$

Επομένως:

$$\vec{\epsilon}_1 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$$

(β΄) Έστω

$$\vec{e}_2 = a\vec{\epsilon}_1 + b\vec{\epsilon}_2 + c\vec{\epsilon}_3 \implies (1,1,0) = a(1,0,-1) + b(-1,1,0) + c(1,-1,1) \implies (1,1,0) = (a-b+c, b-c, -a+c)$$

$$\implies \begin{cases} a-b+c=1 \\ b-c=1 \\ -a+c=0 \end{cases} \implies \begin{cases} c=2 \\ b=3 \\ a=2 \end{cases}$$

Επομένως:

$$\vec{e}_2 = 2\vec{\epsilon}_1 + 3\vec{\epsilon}_2 + 2\vec{\epsilon}_3$$

(γ΄) Έστω

$$\vec{e}_3 = a\vec{\epsilon}_1 + b\vec{\epsilon}_2 + c\vec{\epsilon}_3 \implies (1,0,0) = a(1,0,-1) + b(-1,1,0) + c(1,-1,1) \implies (1,0,0) = (a-b+c, b-c, -a+c)$$

$$\implies \begin{cases} a-b+c=1 \\ b-c=0 \\ -a+c=0 \end{cases} \implies \begin{cases} c=1 \\ b=1 \\ a=1 \end{cases}$$

Επομένως:

$$\vec{e}_3 = \vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2 + \vec{\epsilon}_3$$

Άρα:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{x} = (1,-2,5)$.

(α΄) Θα έχουμε:

$$\vec{x} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 \implies (1,-2,5) = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0) \implies (1,-2,5) = (a+b+c, a+b, a)$$

$$\implies \begin{cases} a+b+c=1 \\ a+b=-2 \\ a=5 \end{cases} \implies \begin{cases} c=3 \\ b=-7 \\ a=5 \end{cases}$$

Άρα:

$$\vec{x} = 5\vec{e}_1 - 7\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$$

και επομένως

$$X = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(β΄) Θα έχουμε:

$$\vec{x} = a\vec{\epsilon}_1 + b\vec{\epsilon}_2 + c\vec{\epsilon}_3 \implies (1,-2,5) = a(1,0,-1) + b(-1,1,0) + c(1,-1,1) \implies (1,-2,5) = (a-b+c, b-c, -a+c)$$

$$\implies \begin{cases} a-b+c=1 \\ b-c=-2 \\ -a+c=5 \end{cases} \implies \begin{cases} c=4 \\ b=2 \\ a=-1 \end{cases}$$

Άρα:

$$\vec{x} = -\vec{\epsilon}_1 + 2\vec{\epsilon}_2 + 4\vec{\epsilon}_3$$

και επομένως:

$$X' = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Επαληθεύουμε:

$$X = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot X' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$ ■

Άσκηση 12. *Θεωρούμε την κανονική βάση*

$$\mathcal{B} = \{1,\, x,\, x^2, \cdots, x^n\}$$

του $\mathbb{K}_n[x]$ και το σύνολο

$$\mathcal{C} = \{1,\, 1+x,\, 1+x^2, \cdots, 1+x^n\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι το υποσύνολο $\mathcal{C}$ είναι βάση του $\mathbb{K}_n[x]$.*

(2) *Να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ και $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.*

(3) *Να βρεθούν οι συνιστώσες του πολυωνύμου* $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$ *ως προς τις βάσεις* $\mathcal{B}$ *και* $\mathcal{C}$.

Λύση. (1) Επειδή $\deg(1 + x^k) = k$, $0 \leq k \leq n$ και $\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}_n[x] = n + 1$, από γνωστό Θεώρημα, έπεται ότι το υποσύνολο $\mathcal{C}$ είναι μια βάση του $\mathbb{K}_n[x]$.

(2) (α΄) Επειδή

$$\begin{gathered} 1 = 1 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n \\ 1 + x = 1 + x + 0x^2 + \cdots + 0x^n \\ 1 + x^2 = 1 + 0x + x^2 + \cdots + 0x^n \\ \vdots \\ 1 + x^n = 1 + 0x + 0x^2 + \cdots + 1x^n \end{gathered}$$

έπεται ότι:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(β΄) Επειδή

$$\begin{gathered} 1 = 1 + 0(1 + x) + 0(1 + x^2) + \cdots + 0(1 + x^n) \\ x = -1 + (1 + x) + 0(1 + x^2) + \cdots + 0x^n \\ x^2 = -1 + 0(1 + x) + (1 + x^2) + \cdots + 0x^n \\ \vdots \\ x^n = -1 + 0x + 0x^2 + \cdots + (1 + x^n) \end{gathered}$$

έπεται ότι:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Επειδή προφανώς

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n = a_0 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

θα έχουμε:

$$X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

και επομένως

$$X' = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 - a_1 - \cdots - a_n \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

■

Άσκηση 13. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος διάστασης n και έστω*

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$$

$$\mathcal{C} = \{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_n\}$$

$$\mathcal{D} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_n\}$$

τρεις βάσεις του $\mathcal{E}$. Αν $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{B}$ στη βάση $\mathcal{C}$, αν $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$ είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{C}$ στη βάση $\mathcal{D}$, και αν $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}$ είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{B}$ στη βάση $\mathcal{D}$ να δειχθεί ότι:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$$

Λύση. Έστω $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = (a_{ij})$, $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} = (b_{ij})$, και $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = (c_{ij})$. Τότε θα έχουμε:

$$\forall j = 1, 2, \cdots, n: \qquad \vec{\epsilon}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i \tag{1}$$

$$\forall k = 1, 2, \cdots, n: \qquad \vec{f}_k = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\vec{\epsilon}_j \tag{2}$$

$$\forall k = 1, 2, \cdots, n: \qquad \vec{f}_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ik}\vec{e}_i \tag{3}$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις (1) και (2), θα έχουμε, $\forall k = 1, 2, \cdots, n$:

$$\vec{f}_k = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\vec{\epsilon}_j = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk})\right)\vec{e}_i$$

Χρησιμοποιώντας την (3) και την υπόθεση ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ είναι βάση του $\mathcal{E}$, θα έχουμε ότι, $\forall k = 1, 2, \cdots, n$:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

Όμως το στοιχείο στο δεύτερο μέλος της παραπάνω σχέσης είναι το στοιχείο στην (i,k)-θέση του πίνακα $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$ και το στοιχείο στο πρώτο μέλος της παραπάνω σχέσης είναι το στοιχείο στην (i,k)-θέση του πίνακα $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}$. Επειδή οι δείκτες $i, k = 1, 2, \cdots, n$ επιλέχθηκαν τυχαία, προκύπτει ότι:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} \qquad \blacksquare$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ είναι υπόχωροι ενός $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$, τότε το άθροισμα υπόχωρων

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = \{\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{E} \mid \vec{u} \in \mathcal{U} \text{ και } \vec{v} \in \mathcal{V}\}$$

καλείται **ευθύ άθροισμα** αν κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ του $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$, δηλαδή:

$$\vec{x} = \vec{u}_1 + \vec{v}_1 = \vec{u}_2 + \vec{v}_2, \ \text{ όπου } \ \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \mathcal{U} \ \text{ και } \ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{V} \quad \Longrightarrow \quad \vec{u}_1 = \vec{u}_2 \ \text{ και } \ \vec{v}_1 = \vec{v}_2$$

Αν το άθροισμα των υπόχωρων $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ είναι ευθύ, θα γράφουμε:

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

Άσκηση 14. *Αν $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ είναι υπόχωροι ενός $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *το άθροισμα υπόχωρων $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ είναι ευθύ.*

(2)

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}, \ \text{ όπου } \ \vec{u} \in \mathcal{U} \ \text{ και } \ \vec{v} \in \mathcal{V} \quad \Longrightarrow \quad \vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$$

(3) $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{\vec{0}\}$.

Λύση. (1) $\Longrightarrow$ (2) Υποθέτουμε ότι το άθροισμα των υπόχωρων $\mathcal{U}$ και του $\mathcal{V}$ είναι ευθύ, και έστω $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$, όπου $\vec{u}\in\mathcal{U}$ και $\vec{v}\in\mathcal{V}$. Τότε, επειδή $\vec{0}\in\mathcal{U}$ και $\vec{0}\in\mathcal{V}$, από τη μοναδικότητα της γραφής, θα έχουμε:

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}=\vec{0}+\vec{0} \quad\Longrightarrow\quad \vec{u}=\vec{0} \text{ και } \vec{v}=\vec{0}$$

(2) $\Longrightarrow$ (3) Υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη (2) και έστω $\vec{x}\in\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$. Τότε $\vec{x}\in\mathcal{U}$ και $\vec{x}\in\mathcal{V}$, ιδιαίτερα $-\vec{x}\in\mathcal{V}$ επειδή ο $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{E}$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση, θα έχουμε:

$$\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0} \text{ όπου } \vec{x}\in\mathcal{U} \text{ και } -\vec{x}\in\mathcal{V} \quad\Longrightarrow\quad \vec{x}=-\vec{x}=\vec{0}$$

Άρα $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\{\vec{0}\}$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Υποθέτουμε ότι $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\{\vec{0}\}$, και έστω ότι $\vec{x}=\vec{u}_1+\vec{v}_1=\vec{u}_2+\vec{v}_2$, όπου $\vec{u}_1,\vec{u}_2\in\mathcal{U}$ και $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in\mathcal{V}$. Τότε, χρησιμοποιώντας ότι οι $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ είναι υπόχωροι, θα έχουμε:

$$\mathcal{U}\ni\vec{u}_1-\vec{u}_2=\vec{v}_2-\vec{v}_1\in\mathcal{V} \quad\Longrightarrow\quad \vec{u}_1-\vec{u}_2=\vec{v}_2-\vec{v}_1\in\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\{\vec{0}\} \quad\Longrightarrow\quad \vec{u}_1=\vec{u}_2 \text{ και } \vec{v}_1=\vec{v}_2$$

και επομένως ισχύει η μοναδικότητα της γραφής ενός διανύσματος του $\mathcal{U}+\mathcal{V}$ ως άθροισμα διανυσμάτων του $\mathcal{U}$ και του $\mathcal{V}$, δηλαδή το άθροισμα $\mathcal{U}+\mathcal{V}$ είναι ευθύ. ■

Άσκηση 15. *Θεωρούμε τα ακόλουθους υπόχωρους του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathsf{M}_2(\mathbb{K})$:*

$$\mathcal{U}=\left\langle A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\mathcal{V}=\left\langle C=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}\right\rangle$$

Να βρεθούν βάσεις των $\mathcal{U}$ και$\mathcal{V}$ και να δειχθεί ότι:

$$\mathsf{M}_2(\mathbb{K})=\mathcal{U}\oplus\mathcal{V}$$

Λύση. Οι πίνακες A,B είναι γραμμικά ανεξάρτητοι, διότι:

$$\lambda_1A+\lambda_2B=0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda_1\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{pmatrix}\lambda_1&\lambda_2\\\lambda_1+\lambda_2&\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\quad \lambda_1=\lambda_2=0$$

Οι πίνακες C,D είναι γραμμικά ανεξάρτητοι, διότι:

$$\lambda_1C+\lambda_2D=0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda_1\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{pmatrix}-\lambda_1+\lambda_2&\lambda_1\\-\lambda_2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\quad \lambda_1=\lambda_2=0$$

Άρα το σύνολο $\mathcal{B}=\big\{A,\,B\big\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{U}$ και $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U}=2$, και το σύνολο $\mathcal{C}=\big\{C,\,D\big\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}$ και $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V}=2$.

Έστω $X\in\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$. Επειδή $X\in\mathcal{U}$, έπεται ότι

$$X=x_1\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_1+x_2&x_2\end{pmatrix}$$

Επειδή $X\in\mathcal{V}$, έπεται ότι

$$X=y_1\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix}+y_2\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y_1+y_2&y_1\\-2&0\end{pmatrix}$$

Τότε:

$$\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_1+x_2&x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y_1+y_2&y_1\\-y_2&0\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases}x_1=-y_1+y_2 & \text{και}\quad x_2=y_1\\ x_1+x_2=-y_2 & \text{και}\quad x_2=0\end{cases}$$

Από τις παραπάνω σχέσεοις, βλέπουμε εύκολα ότι $x_1=x_2=0=y_1=y_2$, δηλαδή $X=0$. Επομένως

$$\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\{0\} \tag{1}$$

Έστω $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{K})$ και έστω

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = x_1A + x_2B + y_1C + y_2D = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 + x_2 & x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y_1 + y_2 & y_1 \\ -y_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 + y_2 & x_2 + y_1 \\ x_1 + x_2 - y_2 & x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - y_1 + y_2 = a \quad \text{και} \quad x_2 + y_1 = b \\ x_1 + x_2 - y_2 = c \quad \text{και} \quad x_2 = d \end{cases}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα με αγνώστιους τα x_1, x_2, y_1, y_2, βλέπουμε εύκολα ότι:

$$x_1 = \frac{a+b+c-d}{2}, \quad x_2 = d, \quad y_1 = b - d, \quad y_2 = \frac{a-c+b}{2}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι πίνακες A, B, C, D παράγουν τον χώρο $\mathsf{M}_2(\mathbb{K})$ και άρα

$$\mathsf{M}_2(\mathbb{K}) = \big\langle A, B, C, D \big\rangle$$

Επειδή $A, B \in \mathcal{U}$ και $C, D \in \mathcal{V}$, έπεται ότι $A, B, C, D \in \mathcal{U} + \mathcal{V}$ και επομένως $\big\langle A, B, C, D \big\rangle \subseteq \mathcal{U} + \mathcal{V}$. Τότε όμως θα έχουμε:

$$\mathsf{M}_2(\mathbb{K}) = \mathcal{U} + \mathcal{V} \tag{2}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2), έπεται ότι:

$$\mathsf{M}_2(\mathbb{K}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$ ■

Άσκηση 16. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ δύο υπόχωροι του $\mathcal{E}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) $\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.
(2) *Ικανοποιούνται δύο από τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:*
  (α΄) $\mathcal{E} = \mathcal{U} + \mathcal{V}$.
  (β΄) $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{\vec{0}\}$.
  (γ΄) $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$.

Λύση. (1) $\Longrightarrow$ (2) Υποθέτουμε ότι $\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Τότε προφανώς $\mathcal{E} = \mathcal{U} + \mathcal{V}$ και από την Άσκηση 14 έπεται ότι $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{\vec{0}\}$. Επομένως από τον γνωστό τύπο

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \tag{$\dagger$}$$

θα έχουμε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Θα έχουμε:

(i) (α΄) & (β΄) $\Longrightarrow$ (1) Προκύπτει από την Άσκηση 14.

(ii) (β΄) & (γ΄) $\Longrightarrow$ (1) Έστω ότι $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{\vec{0}\}$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$. Από τη σχέση $(\dagger)$ και την υπόθεση, έπεται ότι

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}$$

Τότε όμως γνωρίζουμε ότι $\mathcal{E} = \mathcal{U} + \mathcal{V}$ και επομένως από την Άσκηση 14 έπεται ότι $\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.

(iii) (α΄) & (γ΄) $\Longrightarrow$ (1) Έστω ότι $\mathcal{E} = \mathcal{U} + \mathcal{V}$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$. Τότε πάλι με χρήση του τύπου $(\dagger)$, θα έχουμε $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 0$ και αυτό σημαίνει ότι $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{\vec{0}\}$. Από την Άσκηση 14 έπεται τότε ότι $\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. ■

Παρατήρηση 1. *Έστω $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ δύο υπόχωροι ενός $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$ πεπερασμένης διάστασης. Αν $\mathcal{A}$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο γεννητόρων του $\mathcal{U}$ και $\mathcal{B}$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$, τότε:*

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = \langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \rangle$$

Πράγματι, επειδή $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$ και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{V}$ έπεται ότι $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subseteq \mathcal{U} + \mathcal{V}$. Επομένως $\langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \rangle \subseteq \mathcal{U} + \mathcal{V}$.

Αντίστροφα, έστω

$$\mathcal{A} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\big\}$$

$$\mathcal{B} = \{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_m\}$$

Αν $\vec{x} \in \mathcal{U}+\mathcal{V}$, τότε $\vec{x} = \vec{u}+\vec{v}$, όπου $\vec{u} = x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\cdots+x_n\vec{e}_n$ και $\vec{v} = x'_1\vec{\epsilon}_1+x'_2\vec{\epsilon}_2+\cdots+x'_m\vec{\epsilon}_m$, για κάποια $x_i \in \mathbb{K}$ και $x'_j \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$ και $1 \leq j \leq m$. Τότε $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n + x'_1\vec{\epsilon}_1 + x'_2\vec{\epsilon}_2 + \cdots + x'_m\vec{\epsilon}_m \in \langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B}\rangle$. Άρα $\mathcal{U} + \mathcal{V} \subseteq \langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B}\rangle$ και επομένως $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B}\rangle$.

Άσκηση 17. *Αν $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ είναι υπόχωροι ενός $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης $\mathcal{E}$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) $\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.

(2) *Αν $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathcal{U}$ και $\mathcal{C}$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}$, τότε το σύνολο $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$.*

Λύση. (1) $\Longrightarrow$ (2) Υποθέτουμε ότι $\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, και έστω

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$$

μια βάση του $\mathcal{U}$, και

$$\mathcal{C} = \{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_m\}$$

μια βάση του $\mathcal{V}$. Επειδή $\mathcal{E} = \mathcal{U} + \mathcal{V}$, και τα σύνολα $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$ είναι πεπερασμένα σύνολα γεννητόρων των $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ αντίστοιχα, αππό την Παρατήρηση 1 έπεται ότι:

$$\mathcal{E} = \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C}\rangle$$

Έστω ότι

$$x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n + x'_1\vec{\epsilon}_1 + x'_2\vec{\epsilon}_2 + \cdots + x'_m\vec{\epsilon}_m = \vec{0} \quad \Longrightarrow$$
$$x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n = (-x'_1)\vec{\epsilon}_1 + (-x'_2)\vec{\epsilon}_2 + \cdots + (-x'_m)\vec{\epsilon}_m$$

Το παραπάνω διάνυσμα ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{U}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B}$ του $\mathcal{U}$ και ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{V}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{C}$ του $\mathcal{V}$. Επειδή $\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, έχουμε $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{\vec{0}\}$, και επομένως το παραπάνω διάνυσμα είναι το μηδενικό:

$$x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n = \vec{0} = (-x'_1)\vec{\epsilon}_1 + (-x'_2)\vec{\epsilon}_2 + \cdots + (-x'_m)\vec{\epsilon}_m$$

Επειδή τα διανύσματα $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ και τα διανύσματα $\{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται ότι $x_i = 0$, $1 \leq i \leq n$ και $x'_j = 0$, $1 \leq j \leq m$. Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n, \vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη (2) και έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια βάση του $\mathcal{U}$, οπότε $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U} = n$, και $\mathcal{C} = \{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_m\}$ μια βάση του $\mathcal{V}$, οπότε $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U} = m$. Τότε από την υπόθεση, το σύνολο $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$, ιδιαίτερα $\langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C}\rangle = \mathcal{E}$. Από την Παρατήρηση 1 γνωρίζουμε ότι πάντοτε έχουμε $\langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C}\rangle = \mathcal{U} + \mathcal{V}$, και επομένως $\mathcal{E} = \mathcal{U} + \mathcal{V}$.

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Τότε $\vec{x} \in \mathcal{U}$ και $\vec{x} \in \mathcal{V}$ και άρα μπορούμε να γράψουμε μοναδικά:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n = x'_1\vec{\epsilon}_1 + x'_2\vec{\epsilon}_2 + \cdots + x'_m\vec{\epsilon}_m \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n + (-x'_1)\vec{\epsilon}_1 + (-x'_2)\vec{\epsilon}_2 + \cdots + (-x'_m)\vec{\epsilon}_m = \vec{0}$$

Λόγω γραμμικής ανεξαρτησίας του συνόλου $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n, \vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_m\}$, θα έχουμε

$$x_i = x'_j = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \ \ 1 \leq j \leq m$$

και επομένως $\vec{x} = \vec{0}$. Με άλλα λόγια δείξαμε ότι: $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{\vec{0}\}$. Άρα $\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. ■

Άσκηση 18. *Έστω $\mathcal{U}$ ένας υπόχωρος ενός $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$ πεπερασμένης διάστασης. Να δειχθεί ότι υπάρχει ένας υπόχωρος $\mathcal{V}$ του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε:*

$$\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

Είναι ο υπόχωρος $\mathcal{V}$ μοναδικός;

Λύση. Γνωρίζουμε ότι ο υπόχωρος $\mathcal{U}$ έχει πεπερασμένη διάσταση. Έστω $\mathcal{C} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k\big\}$ μια βάση του $\mathcal{V}$. Από γνωστό Θεώρημα, το σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων $\mathcal{B}$ μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \cdots, \vec{e}_n\big\}$ μια βάση του $\mathcal{E}$. Θέτουμε $\mathcal{D} = \big\{\vec{e}_{k+1}, \cdots, \vec{e}_n\big\}$ και:

$$\mathcal{V} = \big\langle \mathcal{D} \big\rangle = \big\langle \vec{e}_{k+1}, \cdots, \vec{e}_n \big\rangle$$

Προφανώς τότε θα έχουμε:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U} = k \quad \text{και} \quad \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U} = n - k \qquad \text{και} \quad \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{E} = n = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U} + \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V}$$

Επειδή $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}$ και $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{V}$, έπεται ότι $\mathcal{B} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D} \subseteq \mathcal{U} + \mathcal{V}$ και επομένως $\mathcal{E} = \big\langle \mathcal{B} \big\rangle = \big\langle \mathcal{C} \cup \mathcal{D} \big\rangle \subseteq \mathcal{U} + \mathcal{V}$. Άρα $\mathcal{E} = \mathcal{U} + \mathcal{V}$ και τότε από την Άσκηση 16 έχουμε: $\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.

Στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$, θεωρούμε τον υπόχωρο

$$\mathcal{U} = \big\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\big\} = \langle (1, 0) \rangle$$

και τους υπόχωρους, $\forall k \geq 0$:

$$\mathcal{V}_k = \big\{(ky, (k+1)y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\big\} = \big\{y(k, k+1) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\big\} = \langle (k, k+1) \rangle$$

Τότε, $\forall k \geq 0$:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{U} = 1 \quad \text{και} \quad \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V}_k = 1 \qquad \text{και} \quad \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2 = 2 = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{U} + \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V}_k$$

Αν $\vec{a} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}_k$, τότε $\vec{a} = (x, 0)$ και $\vec{a} = (ky, (k+1)y)$. Θα έχουμε $ky = x$ και $(k+1)y = 0$, από όπου έπεται ότι $y = 0$ διότι $k \geq 0$. Τότε $x = 0$ και επομένως $\vec{a} = (0, 0)$. Δηλαδή $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}_k = \{\vec{0}\}$, $\forall k \geq 0$. Από την Άσκηση 16 προκύπτει ότι:

$$\mathbb{R}^2 = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}_k, \quad \forall k \geq 0$$

Επειδή προφανώς οι (άπειροι σε πλήθος) υπόχωροι $\mathcal{V}_k$ είναι ανά δύο διαφορετικοί, έπεται ότι υπάρχει άπειρο πλήθος ανά δύο διαφορετκών υπόχωρων $\mathcal{V}_k$ έτσι ώστε $\mathbb{R}^2 = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}_k$. ■

Άσκηση 19. *Θεωρούμε δύο στοιχεία a, b ενός σώματος $\mathbb{K}$ και έστω ο ακόλουθος 2×2 πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{U} = \big\{X \in \mathsf{M}_2(\mathbb{K}) \mid AX = XA\big\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι το σύνολο $\mathcal{U}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathsf{M}_2(\mathbb{K})$ και να βρεθεί μια βάση του.*
(2) *Να βρεθεί υπόχωρος $\mathcal{V}$ του $\mathsf{M}_2(\mathbb{K})$ έτσι ώστε:*

$$\mathsf{M}_2(\mathbb{K}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

Λύση. (α) Αν $b = 0$, τότε $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI_2$, και τότε, $\forall X \in \mathsf{M}_2(\mathbb{K})$: $AX = aI_2X = aXI_2 = XaI_2 = XA$. Δηλαδή $\mathcal{U} = \mathsf{M}_2(\mathbb{K})$, και τότε μπορούμε να επιλέξουμε $\mathcal{V} = \{\vec{0}\}$.

(β) Υποθέτουμε ότι $b \neq 0$.

Έστω $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$. Τότε:

$$AX = XA \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} ax_1 + bx_3 & ax_2 + bx_4 \\ bx_1 + ax_3 & bx_2 + ax_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 & ax_2 + bx_1 \\ bx_4 + ax_3 & bx_3 + ax_4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$ax_1 + bx_3 = ax_1 + bx_2 \quad \overset{b \neq 0}{\Longrightarrow} \quad x_2 = x_3$$

$$ax_2 + bx_4 = ax_2 + bx_1 \quad \overset{b \neq 0}{\Longrightarrow} \quad x_1 = x_4$$

Άρα $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$. Αντίστροφα, αν $X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$, τότε εύκολα βλέπουμε ότι θα έχουμε $AX = XA$, δηλαδή $X \in \mathcal{U}$. Άρα:

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{K}) \mid x, y \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{K}) \mid x, y \in \mathbb{K} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Επειδή οι πίνακες $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ είναι προφανώς γραμμικά ανεξάρτητοι, έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{C} = \{I_2, J\}$ είναι μια βάση του $\mathsf{M}_2(\mathbb{K})$. Γνωρίζουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathsf{M}_2(\mathbb{K}) = 4$. Συμπληρώνουμε το σύνολο $\mathcal{C}$ σε μια βάση $\mathcal{B}$ του $\mathsf{M}_2(\mathbb{K})$: θεωρούμε τους πίνακες

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Εύκολα βλέπουμε[2] ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{I_2, J, K, L\}$ είναι μια βάση του $\mathsf{M}_2(\mathbb{K})$. Θέτουμε:

$$\mathcal{V} = \langle K, L \rangle = \left\{ x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{K}) \mid x, y \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{K}) \mid x, y \in \mathbb{K} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{K}) \mid x, y \in \mathbb{K} \right\}$$

από την Άσκηση 18 έπεται ότι:

$$\mathsf{M}_2(\mathbb{K}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$ ■

Άσκηση 20. *Να δειχθεί ότι:*

$$\mathbb{K}^n = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

όπου

$$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$$
$$\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$$

Λύση. Από την Άσκηση 1, θέτοντας $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 1$, έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{B}_1 = \{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_{n-1}\}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{U}$, όπου

$$\vec{\epsilon}_1 = (-1, 1, 0, \cdots, 0), \qquad \vec{\epsilon}_2 = (-1, 0, 1, \cdots, 0), \qquad \cdots, \qquad \vec{\epsilon}_{n-1} = (-1, 0, \cdots, 0, 1)$$

Επομένως $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} = n - 1$. Από την άλλη πλευρά,

$$\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 = x_2 = \cdots = x_n\} = \{(x, x, \cdots, x) \in \mathbb{K}^n \mid x \in \mathbb{K}\} =$$
$$= \{x(1, 1, \cdots, 1) \in \mathbb{K}^n \mid x \in \mathbb{K}\} = \langle \epsilon_n = (1, 1, \cdots, 1) \rangle$$

Επομένως $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = 1$.

Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Τότε:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \quad \text{και} \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_n := x \quad \Longrightarrow \quad nx = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} = \vec{0}$$

Επομένως $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{\vec{0}\}$. Επειδή $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n = n - 1 + 1 = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$, από την Άσκηση 16 έπεται ότι $\mathbb{K}^n = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. ■

---

[2] Για παράδειγμα θεωρώντας τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ο οποίος σχηματίζεται από τις συνιστώσες των πινάκων του συνόλου $\mathcal{B} = \{I_2, J, K, L\}$ ως προς την κανονική βάση του $\mathsf{M}_2(\mathbb{K})$, και ο οποίος έχει μη-μηδενική ορίζουσα, έπεται ότι το $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathsf{M}_2(\mathbb{K})$.

Άσκηση 21. *Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_n[x]$ των πολυωνύμων με βαθμό το πολύ n υπεράνω του $\mathbb{R}$, και έστω $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ ανά δύο διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $1 \leq k \leq n$, θεωρούμε το σύνολο:*

$$\mathcal{V}_k = \big\{P(x) \in \mathbb{R}_n[x] \mid P(\rho_1) = P(\rho_2) = \cdots = P(\rho_k) = 0\big\}$$

Να δειχθεί ότι:

$$\mathbb{R}_n[x] = \mathbb{R}_{k-1}[x] \oplus \mathcal{V}_k$$

Λύση. Από την Άσκηση 9 γνωρίζουμε ότι το σύνολο $\mathcal{V}_k$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}_n[x]$ με διάσταση

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V}_k = n - k + 1$$

και το σύνολο

$$\mathcal{B}_k = \big\{\Pi(x),\, x\Pi(x),\, x^2\Pi(x),\, \cdots,\, x^{n-k}\Pi(x)\big\}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{V}_k$, όπου:

$$\Pi(x) = (x - \rho_1)(x - \rho_2)\cdots(x - \rho_k) \,\in\, \mathbb{K}_n[x]$$

Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{C} = \big\{1,\, x,\, x^2,\, \cdots,\, x^{k-1}\big\}$. Από την Άσκηση 9, γνωρίζουμε τότε ότι το σύνολο

$$\mathcal{C} \cup \mathcal{B}_k = \big\{1,\, x,\, x^2,\, \cdots,\, x^{k-1},\, \Pi(x),\, x\Pi(x),\, x^2\Pi(x),\, \cdots,\, x^{n-k}\Pi(x)\big\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{R}_n[x]$ η οποία συμπληρώνει τη βάση $\mathcal{B}_k$ του $\mathcal{V}_k$. Προφανώς θα έχουμε: $\mathbb{R}_{k-1}[x] = \langle \mathcal{C} \rangle$. Από την Άσκηση 18 προκύπτει τότε ότι:

$$\mathbb{R}_n[x] = \mathbb{R}_{k-1}[x] \oplus \mathcal{V}_k$$ ■

Άσκηση 22. *Θεωρούμε το σύνολο*

$$\mathsf{S}_n(\mathbb{K}) = \big\{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = A\big\}$$

των συμμετρικών $n \times n$ πινάκων, και το σύνολο

$$\mathsf{A}_n(\mathbb{K}) = \big\{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = -A\big\}$$

των αντισυμμετρικών $n \times n$ πινάκων.

(1) *Να δειχθεί ότι:*

$$\mathsf{M}_n(\mathbb{K}) = \mathsf{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathsf{A}_n(\mathbb{K})$$

(2) *Να βρεθούν οι διαστάσεις των υπόχωρων $\mathsf{S}_n(\mathbb{K})$ και $\mathsf{A}_n(\mathbb{K})$.*

(3) *Αν $n = 3$, να βρεθούν βάσεις των υπόχωρων $\mathsf{S}_n(\mathbb{K})$ και $\mathsf{A}_n(\mathbb{K})$.*

Λύση. (1) Έστω $A \in \mathsf{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathsf{A}_n(\mathbb{K})$. Τότε:

$${}^tA = A \quad \text{και} \quad {}^tA = -A \quad \Longrightarrow \quad A = -A \quad \Longrightarrow \quad 2A = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = 0$$

Επομένως:

$$\mathsf{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathsf{A}_n(\mathbb{K}) = \big\{0\big\} \tag{$*$}$$

Έστω$A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$. Τότε:

$${}^t\left(\frac{A + {}^tA}{2}\right) = \frac{{}^t(A + {}^tA)}{2} = \frac{{}^tA + A}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{{}^tA + A}{2} \in \mathsf{S}_n(\mathbb{K})$$

$${}^t\left(\frac{A - {}^tA}{2}\right) = \frac{{}^t(A - {}^tA)}{2} = \frac{{}^tA - A}{2} = -\frac{A - {}^tA}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{A - {}^tA}{2} \in \mathsf{A}_n(\mathbb{K})$$

Επειδή

$$A = \frac{A + {}^tA}{2} + \frac{A - {}^tA}{2}$$

έπεται ότι θα έχουμε:

$$\mathsf{M}_n(\mathbb{K}) = \mathsf{S}_n(\mathbb{K}) + \mathsf{A}_n(\mathbb{K}) \tag{$**$}$$

Από τις σχέσεις $(*)$ και $(**)$, έπεται ότι:

$$\mathsf{M}_n(\mathbb{K}) = \mathsf{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathsf{A}_n(\mathbb{K})$$

(2) Από την Άσκηση 16 έχουμε:
$$n^2 = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathsf{M}_n(\mathbb{K}) = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathsf{S}_n(\mathbb{K}) + \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathsf{A}_n(\mathbb{K}) \tag{$\dagger$}$$
Έστω $A = (a_{ij})$ ένας αντισυμμετρικός πίνακας. Τότε $a_{ij} = -a_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$. Ιδιαίτερα προκύπτει ότι $a_{ii} = 0$, $1 \leq i \leq n$, και ο A έχει την ακόλουθη μορφή:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
Για κάθε $1 \leq r < s \leq n$, θεωρούμε τους πίνακες $J_{rs} = (x_{ij})$, όπου $x_{ij} = 0$, $\forall i, j = 1, 2, \cdots, n$, εκτός από τις θέσεις $x_{rs} = 1$ και $x_{sr} = -1$. Είναι τότε προφανές ότι κάθε αντισυμμετρικός πίνακας A όπως παραπάνω, γράφεται ως:
$$A = \sum_{1 \leq r < s \leq n}^{n} a_{rs} J_{rs}$$
Επομένως
$$\mathsf{A}_n(\mathbb{K}) = \big\langle J_{rs} \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \mid 1 \leq r < s \leq n \big\rangle$$
και επειδή προφανώς το σύνολο $\mathcal{C} = J_{rs} \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \mid 1 \leq r < s \leq n\big\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, έπεται ότι το $\mathcal{C}$ είναι μια βάση του $\mathsf{A}_n(\mathbb{K})$. Το πλήθος των στοιχείων του συνόλου $\mathcal{C}$ είναι ίσο με $\frac{n^2-n}{2}$, και επομένως:
$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathsf{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n^2 - n}{2}$$
και τότε από τον τύπο ($\dagger$), θα έχουμε:
$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathsf{S}_n(\mathbb{K}) = n^2 - \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$
Μια βάση του $\mathsf{S}_n(\mathbb{K})$ είναι τότε το σύνολο των συμμετρικών πινάκων
$$\big\{I_{rs} = (x_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \mid x_{rs} = x_{sr} = 1 \ \text{ και } \ x_{ij} = 0, \text{ για κάθε } 1 \leq i, j \leq n \text{ με } i \neq r \text{ ή } j \neq s\big\}$$
(3) Σύμφωνα με το μέρος (2), θα έχουμε τη βάση
$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$
του υπόχωρου $\mathsf{A}_3(\mathbb{K})$, και τη βάση
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$
του υπόχωρου $\mathsf{S}_3(\mathbb{K})$.

Η ένωση αυτών των δύο βάσεων αποτελεί τότε μια βάση του $\mathsf{M}_3(\mathbb{K})$. ■

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, $\cdots$, $\mathcal{V}_n$ είναι υπόχωροι ενός $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$, τότε το άθροισμα υπόχωρων
$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n = \big\{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_n \in \mathcal{E} \mid \vec{v}_i \in \mathcal{V}_i \ 1 \leq i \leq n\big\}$$
καλείται **ευθύ άθροισμα** αν κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ του $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $\vec{x} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_n$, δηλαδή:
$$\vec{x} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_n = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_n, \ \text{ όπου } \vec{v}_i, \vec{u}_i \in \mathcal{V}_i, \ 1 \leq i \leq n \implies \vec{v}_1 = \vec{u}_1, \ \vec{v}_2 = \vec{u}_2, \ \cdots, \ \vec{v}_n = \vec{u}_n$$
Αν το άθροισμα των υπόχωρων $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n$ είναι ευθύ, θα γράφουμε:
$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_n$$

Άσκηση 23. *Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ ένα σύνολο διανυσμάτων του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$.*

(2)

$$\mathcal{E} = \langle \vec{e}_1 \rangle \oplus \langle \vec{e}_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \vec{e}_n \rangle$$

Λύση. «$\Longrightarrow$» Υποθέτουμε ότι το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$. Τότε κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του συνόλυ $\mathcal{B}$: $\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n$, όπου $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Επειδή $\lambda_i\vec{e}_i \in \langle \vec{e}_i \rangle$, προκύπτει ότι $\vec{x} \in \langle \vec{e}_1 \rangle + \langle \vec{e}_2 \rangle + \cdots + \langle \vec{e}_n \rangle$ και επομένως $\mathcal{E} = \langle \vec{e}_1 \rangle + \langle \vec{e}_2 \rangle + \cdots + \langle \vec{e}_n \rangle$. Έστω $\vec{x} = \kappa_1\vec{e}_1 + \kappa_2\vec{e}_2 + \cdots + \kappa_n\vec{e}_n$ μια άλλη γραφή του $\vec{x}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του συνόλου $\mathcal{B}$. Τότε

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n = \kappa_1\vec{e}_1 + \kappa_2\vec{e}_2 + \cdots + \kappa_n\vec{e}_n \quad \Longrightarrow \quad (\lambda_1 - \kappa_1)\vec{e}_1 + (\lambda_2 - \kappa_2)\vec{e}_2 + \cdots + (\lambda_n - \kappa_n)\vec{e}_n = \vec{0}$$

και άρα λόγω γραμμικής ανεξαρτησίας των διανυσμάτων του συνόλου $\mathcal{B}$ έπεται ότι $\lambda_i = \kappa_i$, $1 \leq i \leq n$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ του $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $\vec{x} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_n$, και επομένως $\mathcal{E} = \langle \vec{e}_1 \rangle \oplus \langle \vec{e}_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \vec{e}_n \rangle$.

«$\Longleftarrow$» Υποθέτουμε ότι $\mathcal{E} = \langle \vec{e}_1 \rangle \oplus \langle \vec{e}_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \vec{e}_n \rangle$. Τότε κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ του $\mathcal{E}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{e}_2 + \cdots + \vec{x}_n$, όπου $\vec{x}_i \in \langle \vec{e}_i \rangle$, $1 \leq i \leq n$. Τότε όμως $\vec{x} = \lambda_i\vec{e}_i$, για κάποια $\lambda_i \in \mathbb{K}$ και επομένως $\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n$. Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{E}$. Αν $\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n = \vec{0}$, τότε θα έχουμε: $\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n = \vec{0} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + \cdots + 0\vec{e}_n$, και άρα λόγω μοναδικότηγτας της γραφής του διανύσματος $\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n$, θα έχουμε $\lambda_i = 0$, $1 \leq i \leq n$. Άρα το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και επομένως είναι μια βάση του $\mathcal{E}$. ■

Άσκηση 24. *Αν $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, $\cdots$, $\mathcal{V}_n$ είναι υπόχωροι ενός $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Το άθροισμα των υπόχωρων $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n$ είναι ευθύ:*

$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_n$$

(2)

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_n = \vec{0}, \ \text{όπου} \ \vec{v}_i \in \mathcal{V}_i \ 1 \leq i \leq n \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_i = \vec{0}, \ 1 \leq i \leq n$$

(3)

$$\forall i = 1, 2, \cdots, n: \quad \mathcal{V}_i \bigcap \Big(\mathcal{V}_1 + \cdots + \mathcal{V}_{i-1} + \mathcal{V}_{i+1} + \cdots + \mathcal{V}_n\Big) = \{\vec{0}\}$$

Λύση. (1) $\Longrightarrow$ (2) Υποθέτουμε ότι το άθροισμα των υπόχωρων $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \cdots, \mathcal{V}_n$ είναι ευθύ, και έστω $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_n = \vec{0}$, όπου $\vec{v}_i \in \mathcal{V}_i$, $1 \leq i \leq n$. Τότε, επειδή $\forall i = 1, 2, \cdots, n$ έχουμε $\vec{0} \in \mathcal{V}_i$, από την μοναδικότητα της γραφής έπεται ότι:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_n = \vec{0} = \vec{0} + \vec{0} + \cdots + \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_i = \vec{0} \ \ \forall i = 1, 2, \cdots, n$$

(2) $\Longrightarrow$ (3) Υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη (2) και έστω $\vec{x} \in \mathcal{V}_i \cap \big(\mathcal{V}_1 + \cdots + \mathcal{V}_{i-1} + \mathcal{V}_{i+1} + \cdots + \mathcal{V}_n\big)$. Τότε $\vec{x} \in \mathcal{V}_i$ και $\vec{x} \in V_1 + \cdots + \mathcal{V}_{i-1} + \mathcal{V}_{i+1} + \cdots + \mathcal{V}_n$, και επομένως $\vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_{i-1} + \vec{x}_{i+1} + \cdots \vec{x}_n$, όπου $\vec{x}_j \in \mathcal{V}_j$, $1 \leq j \neq i \leq n$. Τότε θα έχουμε:

$$\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_{i-1} + (-\vec{x}) + \vec{x}_{i+1} + \cdots \vec{x}_n = \vec{0}$$

και επομένως απο τη συνθήλη (2) προκύπτει ότι:

$$\vec{x}_1 = \cdots = \vec{x}_{i-1} = (-\vec{x}) = \vec{x}_{i+1} = \cdots \vec{x}_n = \vec{0}$$

$\vec{x} = \vec{0}$. Αυτό σημαίνει ότι $\mathcal{V}_i \cap \big(\mathcal{V}_1 + \cdots + \mathcal{V}_{i-1} + \mathcal{V}_{i+1} + \cdots + \mathcal{V}_n\big) = \{\vec{0}\}$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Υποθέτουμε ότι $\mathcal{V}_i \cap \big(\mathcal{V}_1 + \cdots + \mathcal{V}_{i-1} + \mathcal{V}_{i+1} + \cdots + \mathcal{V}_n\big) = \big\{\vec{0}\big\}$, και έστω

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_n = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_n, \quad \text{όπου} \quad \vec{v}_i, \vec{u}_i \in \mathcal{V}_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

Τότε, $\forall i = 1, 2 \cdots, n$, θα έχουμε

$$\vec{v}_i - \vec{u}_i = (\vec{u}_1 - \vec{v}_1) + \cdots + (\vec{u}_{i-1} - \vec{v}_{i-1}) + (\vec{u}_{i+1} - \vec{v}_{i+1}) + \cdots + (\vec{u}_n - \vec{v}_i)$$

Επειδή $\vec{v}_i - \vec{u}_i \in \mathcal{V}_i$ και $\vec{u}_j - \vec{v}_j \in \mathcal{V}_j$, $\forall j = 1, 2, \cdots, n$ με $j \neq i$, έπεται ότι $(\vec{u}_1 - \vec{v}_1) + \cdots + (\vec{u}_{i-1} - \vec{v}_{i-1}) + (\vec{u}_{i+1} - \vec{v}_{i+1}) + \cdots + (\vec{u}_n - \vec{v}_i) \in \big(\mathcal{V}_1 + \cdots + \mathcal{V}_{i-1} + \mathcal{V}_{i+1} + \cdots + \mathcal{V}_n\big)$. Τότε

$$\vec{v}_i - \vec{u}_i \in \mathcal{V}_i \in \mathcal{V}_i \bigcap \Big(\mathcal{V}_1 + \cdots + \mathcal{V}_{i-1} + \mathcal{V}_{i+1} + \cdots + \mathcal{V}_n\Big) = \big\{\vec{0}\big\}$$

Άρα $\vec{v}_i = \vec{u}_i$, και επειδή το $i = 1, 2, \cdots, n$ επιλέχθηκε τυχαία, έπεται ότι $\vec{v}_i = \vec{u}_i$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$, δηλαδή ισχύει η μοναδικότητα της γραφής ενός διανύσματος του $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n$ ως άθροισμα διανυσμάτων των υπόχωρων $\mathcal{V}_i$, $1 \leq i \leq n$. Επομένως το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n$ είναι ευθύ. ■

Αν A και B είναι υποσύνολα ενός συνόλου X, τότε γνωρίζουμε ότι:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Όπως έχουμε αποδείξει στο μάθημα, η παραπάνω σχέση γενικεύεται για υπόχωρους: αν $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ είναι υπόχωροι ενος $\mathbb{K}$-διανσυματικού χώρου $\mathcal{E}$ πεπερασμένης διάστασης, τότε:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U} + \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V} - \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$$

Τι συμβαίνει για τρεις υπόχωρους;

Αν A, B και C είναι υποσύνολα ενός συνόλου X, τότε[3]:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Άσκηση 25. *Αν $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ είναι υπόχωροι ενός $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$ πεπερασμένης διάστασης, να εξετασθεί αν ισχύει ότι:*

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}+\mathcal{V}+\mathcal{W}) = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U}+\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V}+\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{W}-\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})-\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}\cap\mathcal{W})-\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}\cap\mathcal{W})+\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}\cap\mathcal{V}\cap\mathcal{W})$$

Λύση. Έστω $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ και θεωρούμε τους υπόχωρους:

$$\mathcal{U} = \big\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\big\}$$
$$\mathcal{V} = \big\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\big\}$$
$$\mathcal{W} = \big\{(z, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z \in \mathbb{R}\big\}$$

Τότε προφανώς θα έχουμε:

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathbb{R}^2 \quad \text{και άρα} \quad \mathcal{U} + \mathcal{V} + \mathcal{W} = \mathbb{R}^2$$
$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\vec{0}\}$$

Έτσι το πρώτο μέλος της ζητούμενης ισότητας είναι 2 και το δεύτερο μέλος είναι ίσο με $3 = 1 + 1 + 1$. Άρα η ζητούμενη ισότητα **δεν** ισχύει.

Θα δείξουμε ότι ισχύει πάντα η ακόλουθη ανισότητα:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}+\mathcal{V}+\mathcal{W}) \leq \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U}+\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V}+\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{W}-\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})-\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}\cap\mathcal{W})-\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}\cap\mathcal{W})+\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}\cap\mathcal{V}\cap\mathcal{W})$$

Θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V} + \mathcal{W}) &= \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) + \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{W} - \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\big((\mathcal{U} + \mathcal{V}) \cap \mathcal{W}\big) = \\ &= \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U} + \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V} + \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{W} - \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) - \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\big((\mathcal{U} + \mathcal{V}) \cap \mathcal{W}\big) \qquad (\dagger) \end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά έχουμε:

$$(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) + (\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \subseteq (\mathcal{U} + \mathcal{V}) \cap \mathcal{W} \qquad (\dagger\dagger)$$

---

[3]Δείξτε το σαν Άσκηση.

Πράγματι, έστω $\vec{x} \in (\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) + (\mathcal{V} \cap \mathcal{W})$. Τότε $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$, όπου $\vec{u} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ και $\vec{v} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. Επομένως $\vec{x}\mathcal{U} + \mathcal{V}$ και επειδή ο $\mathcal{W}$ είναι υπόχωρος και $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{W}$, θα έχουμε $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{W}$. Άρα $\vec{x} \in (\mathcal{U} + \mathcal{V}) \cap \mathcal{W}$ και επομένως $(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) + (\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \subseteq (\mathcal{U} + \mathcal{V}) \cap \mathcal{W}$.

Από τη σχέση (††) έπεται ότι

$$\begin{aligned} &\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\big((\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) + (\mathcal{V} \cap \mathcal{W})\big) \le \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\big((\mathcal{U} + \mathcal{V}) \cap \mathcal{W}\big) \implies \\ \implies\ &-\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\big((\mathcal{U} + \mathcal{V}) \cap \mathcal{W}\big) \le -\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\big((\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) + (\mathcal{V} \cap \mathcal{W})\big) \end{aligned} \tag{$*$}$$

Όμως

$$\begin{aligned} &\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\big((\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) + (\mathcal{V} \cap \mathcal{W})\big) = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) + \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) - \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \implies \\ &-\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\big((\mathcal{U} + \mathcal{V}) \cap \mathcal{W}\big) \le -\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) - \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) + \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \end{aligned} \tag{$**$}$$

Από τις σχέσεις (†) και $(**)$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned} &\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V} + \mathcal{W}) = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U} + \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V} + \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{W} - \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) - \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\big((\mathcal{U} + \mathcal{V}) \cap \mathcal{W}\big) \le \\ &\le \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U} + \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V} + \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{W} - \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) - \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) - \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) + \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \end{aligned}$$

■