

# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

**ΤΜΗΜΑ Β'** (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

## ΠΡΟΧΕΙΡΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ 2

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebra/LAI2019/LAI2019.html>

**Παρασκευή 1 Νοεμβρίου 2019**

**Πρόχειρη Δοκιμασία.** Αν  $x$  είναι ένας πραγματικός αριθμός, να υπολογιστεί η ορίζουσα του  $n \times n$  πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{pmatrix}$$

Λύση. (1) Αν  $n = 1$ , τότε  $A = (0)$  και άρα  $|A| = 0$ .

Αν  $n = 2$ , τότε θα έχουμε:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Αν  $n \geq 3$ , Θα έχουμε:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i - \Gamma_{i+1} \\ 2 \leq i \leq n-1}]{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -x & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία} \\ \text{της πρώτης στήλης}]{=} \\ &= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & x \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots + \Sigma_n}]{=} \\ &= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & x \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία} \\ \text{της πρώτης στήλης}]{=} \end{aligned}$$

$$(-1)^{n+1}(n-1) \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -x & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -x & x \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Ορίζουσα κάτω τριγωνικού} \\ \hline \hline (n-2) \times (n-2) \text{ πίνακα} \end{array}$$

$$(-1)^{n+1}(n-1)x^{n-2}$$

Επομένως, αν  $n \geq 3$ :

$$|A| = (-1)^{n+1}(n-1)x^{n-2}$$

Συνοψίζοντας θα έχουμε:

$$|A| = \begin{cases} 0, & \text{αν } n = 1 \\ (-1)^{n+1}(n-1)x^{n-2}, & \text{αν } n \geq 2 \end{cases}$$

■