ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Τμημα **Β′** (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

Προχειρη Δοκιμασια **4**

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI/LAI2019/LAI2019.html

Παρασκευή 22 Νοεμβρίου 2019

Πρόχειρη Δοκιμασία. *Στο σύνολο* $\mathbb{R}^+ = \big\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\big\}$ *των θετικών πραγματικών αριθμών ορίζουμε πράξεις ως εξής:*

(a) *Πρόσθεση:*

$$\oplus : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, \qquad x \oplus y := xy$$

όπου $((xy))$ *συμβολίζει τον συνηθισμένο πολλαπλασιασμό πραγματικών αριθμών.*

(b) *Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός:*

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, \qquad \lambda \odot x := x^\lambda$$

1. *Να εξετάσετε αν με τις παραπάνω πράξεις το σύνολο* $\mathbb{R}^+$ *αποτελεί* $\mathbb{R}$*-διανυσματικό χώρο.*

2. *Αν το σύνολο* $\mathbb{R}^+$ *είναι* $\mathbb{R}$*-διανυσματικός χώρος, να προσδιορισθούν όλοι οι υπόχωροί του.*

3. *Αν το σύνολο* $\mathbb{R}^+$ *είναι* $\mathbb{R}$*-διανυσματικό χώρος και* $x \in \mathbb{R}^+$*, να περιγραφεί ο υπόχωρος* $\langle x \rangle$ *του* $\mathbb{R}^+$*.*

4. *Ποιά είναι η σχέση μεταξύ των διανυσματικών χώρων*[1] $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *και* $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$*;*

Λύση. **1.** Έστω $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ και $r, s \in \mathbb{R}$. Τότε:

(α) $(x \oplus y) \oplus z = (xy) \oplus z = (xy)z = x(yz) = x(y \oplus z) = x \oplus (y \oplus z)$.

(β) $x \oplus y = xy = yx = y \oplus x$.

(γ) Θέλουμε να εξετάσουμε αν υπάρχει ένα στοιχείο $\mathfrak{o} \in \mathbb{R}^+$ έτσι ώστε $x \oplus \mathfrak{o} = x = \mathfrak{o} \oplus x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^+$. 'ρα

$$x \oplus \mathfrak{o} = x \iff x\mathfrak{o} = x \iff \mathfrak{o} = 1$$

διότι το $x \neq 0$. Συνεπώς, το μηδενικό διάνυσμα είναι το στοιχείο $\mathfrak{o} = 1$.

(δ) Θεωρούμε στοιχείο $x \in \mathbb{R}^+$. Θέλουμε να εξετάσουμε αν υπάρχει ένα στοιχείο $y \in \mathbb{R}^+$ έτσι ώστε: $x \oplus y = \mathfrak{o} = y \oplus x$. Επειδή από το προηγούμενο αξίωμα, $\mathfrak{o} = 1$, θα έχουμε: $x \oplus y = 1 \Leftrightarrow xy = 1$ και αφού $x \in \mathbb{R}^+$ έπεται ότι $y = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^+$. Πράγματι, έχουμε

$$x \oplus \frac{1}{x} = x\frac{1}{x} = 1 = \frac{1}{x}x = \frac{1}{x} \oplus x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^+$. 'ρα, το αντίθετο του διανύσματος $x \in \mathbb{R}^+$ ως προς την πρόσθεση $\oplus$ είναι το διάνυσμα $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}^+$.

(ζ) $r \odot (x \oplus y) = r \odot (xy) = (xy)^r = x^r y^r = x^r \oplus y^r = (r \odot x) \oplus (r \odot y)$.

[1] Οι πράξεις $+$ και $\cdot$ συμβολίζουν τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμολύ πραγματικών αριθμών.

(η) $(r+s)\odot x = x^{r+s} = x^r x^s = x^r \oplus x^s = (r\odot x)\oplus(s\odot x)$.

(θ) $r\odot(s\odot x) = r\odot(x^s) = (x^s)^r = x^{sr} = (sr)\odot x$.

(ι) $1\odot x = x^1 = x$.

Επομένως, η τριάδα $(\mathbb{R}^+,\oplus,\odot)$ αποτελεί διανυσματικό χώρο υπεράνω του $\mathbb{R}$.

2. Γνωρίζουμε ότι το σύνολο $\{1\}$ και όλος ο χώρος $\mathbb{R}^+$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^+$. Έστω $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^+$ ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^+$ έτσι ώστε $\mathcal{V}\neq\{1\}$, δηλαδή ο $\mathcal{V}$ δεν είναι ο μηδενικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^+$. ʼρα υπάρχει ένα $x\in\mathcal{V}$ με $x\neq 1$. Έστω $k\in\mathbb{R}^+$. Τότε έχουμε

$$k = x^{\log_x k} = \log_x k\odot x\in\mathcal{V}$$

αφού $\log_x k\in\mathbb{R}$ και $x\in\mathcal{V}$. Συνεπώς έχουμε ότι $\mathbb{R}^+\subseteq\mathcal{V}$ και άρα $\mathcal{V}=\mathbb{R}^+$. Επομένως οι μόνοι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^+,\oplus,\odot)$ είναι το $\{1\}$ και όλος ο χώρος $\mathbb{R}^+$.

3. Αν $x=1$, δηλαδή x είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε προφανώς $\langle x\rangle = \big\{1\big\}$. Αν $x\neq 1$, τότε από το μέρος **2**. έπεται ότι $\langle x\rangle=\mathbb{R}^+$. Επομένως κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^+$ παράγει τον $\mathbb{R}^+$.

4. Θεωρούμε την εκθετική συνάρτηση

$$f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^+,\quad f(x)=e^x$$

η οποία γνωρίζουμε ότι είναι «1-1» και «επί» με αντίστροφη τη λογαριθμική συνάρτηση

$$g\colon\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R},\quad g(x)=\log_e(x)$$

Τότε για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$, θα έχουμε:

$$f(x+y)=e^{x+y}=e^x e^y=e^x\oplus e^y=f(x)\oplus f(y)$$
$$f(r\cdot x)=e^{r\cdot x}=(e^x)^r=f(x)^r=r\odot f(x)$$

Με άλλα λόγια οι $\mathbb{R}$-διανυσματικοί χώροι $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}^+$ είναι σε «1-1» και «επί» αντιστοιχία μέσω μιας απεικόνισης η οποία[2] στέλνει τις πράξεις πρόσθεσης $+$ και βαθμωτού πολλαπλασιασμού $\cdot$ στον $\mathbb{R}$-διανυνυσματικό χώρο $(\mathbb{R},+,\cdot)$, στις αντίστοιχες πράξεις πρόσθεσης $\oplus$ και βαθμωτού πολλαπλασιασμού $\odot$ στον $\mathbb{R}$-διανυνυσματικό χώρο $(\mathbb{R}^+,\oplus,\odot)$. ■

[2] Όπως θα δούμε αργότερα μια τέτοια απεικόνιση καλείται ισομορφισμός και μας επιτρέπει να ταυτίζουμε τους εμπλεκόμενους διανυσματικούς χώρους.