

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β'

ΠΡΟΧΕΙΡΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ 6 (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebra/LAI2019/LAI2019.html>

Παρασκευή 12 Δεκεμβρίου 2019

Πρόχειρη Δοκιμασία. Έστω \mathcal{U} και \mathcal{V} δύο υπόχωροι του \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}_6[x]$ και υποθέτουμε ότι:

$$\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U} = 3 \quad \text{και} \quad \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} = 5$$

(1) Να βρεθούν οι πιθανές διαστάσεις για την τομή $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

(2) Για κάθε πιθανή τιμή της διάστασης $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ της τομής $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ των υπόχωρων \mathcal{U} και \mathcal{V} , να δοθούν συγκεκριμένα παραδείγματα υπόχωρων \mathcal{U} και \mathcal{V} του $\mathbb{K}_6[x]$ για τους οποίους έχουμε την τιμή αυτή.

Λύση. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \quad (\dagger)$$

Χρησιμοποιώντας ότι $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) \leq \dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}_6[x] = 7$, διότι $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{K}_6[x]$, θα έχουμε:

$$3 + 5 - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \leq 7 \implies 1 \leq \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$$

Επειδή ο $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του \mathcal{U} , έπεται ότι θα έχουμε $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \leq \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U} = 3$ και επομένως:

$$1 \leq \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \leq 3$$

(1) Αν $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 1$, τότε από τη σχέση (\dagger) έπεται ότι $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = 7$. Επειδή ο $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{K}_6[x]$ και $\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}_6[x] = 7$, θα έχουμε ότι $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathbb{K}_6[x]$. Αντίστροφα, αν $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathbb{K}_6[x]$, τότε από τη σχέση (\dagger) έπεται ότι $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 1$. Άρα:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 1 \iff \mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathbb{K}_6[x]$$

– Παράδειγμα υπόχωρων \mathcal{U} και \mathcal{V} του $\mathbb{K}_6[x]$ οι οποίοι ικανοποιούν τα παραπάνω δεδομένα αποτελούν οι:

$$\mathcal{U} = \langle 1, x, x^2 \rangle \quad \text{και} \quad \mathcal{V} = \langle x^2, x^3, x^4, x^5, x^6 \rangle$$

διότι προφανώς $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U} = 3$, $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} = 5$, και $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{ax^2 \in \mathbb{K}_6[x] \mid a \in \mathbb{K}\} = \langle x^2 \rangle$ και $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 1$.

(2) Αν $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 3$, τότε από τη σχέση (\dagger) έπεται ότι $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = 5$. Επειδή $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} = 5$ και ο \mathcal{V} είναι υπόχωρος του $\mathcal{U} + \mathcal{V}$, έπεται ότι $\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{V}$. Αυτό όμως προφανώς σημαίνει ότι $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Αντίστροφα αν $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, τότε προφανώς $\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{V}$ και τότε $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} = 5$. Από τη σχέση (\dagger) προκύπτει τότε ότι $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 3$. Άρα:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 3 \iff \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V} \iff \mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{V}$$

– Παράδειγμα υπόχωρων \mathcal{U} και \mathcal{V} του $\mathbb{K}_6[x]$ οι οποίοι ικανοποιούν τα παραπάνω δεδομένα αποτελούν οι:

$$\mathcal{U} = \langle 1, x, x^2 \rangle \quad \text{και} \quad \mathcal{V} = \langle 1, x, x^2, x^3, x^4 \rangle$$

διότι προφανώς $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U} = 3$, $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} = 5$, και $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{K}_6[x] \mid k \in \mathbb{K}\} = \langle 1, x, x^2 \rangle$ και $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 3$.

- (3) Έστω $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 2$. Τότε $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = 6$ και προφανώς $\mathcal{U} \not\subseteq \mathcal{V}$ (διότι διαφορετικά αν $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ θα είχαμε ότι $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{U}$ και άρα $2 = \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U} = 3$ που είναι άτοπο) και $\mathcal{U} + \mathcal{V} \neq \mathbb{K}_6[x]$. Αντίστροφα αν $\mathcal{U} \not\subseteq \mathcal{V}$ και $\mathcal{U} + \mathcal{V} \neq \mathbb{K}_6[x]$, τότε $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) \neq 7$ και $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) \neq 5$ διότι διαφορετικά θα είχαμε $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{V}$ το οποίο σημαίνει ότι $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ το οποίο είναι άτοπο. Άρα:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 2 \iff \mathcal{U} \not\subseteq \mathcal{V} \text{ και } \mathcal{U} + \mathcal{V} \neq \mathbb{K}_6[x]$$

– Παράδειγμα υπόχωρων \mathcal{U} και \mathcal{V} του $\mathbb{K}_6[x]$ οι οποίοι ικανοποιούν τα παραπάνω δεδομένα αποτελούν οι:

$$\mathcal{U} = \langle 1, x, x^2 \rangle \quad \text{και} \quad \mathcal{V} = \langle x, x^2, x^3, x^4, x^6 \rangle$$

διότι προφανώς $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U} = 3$, $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} = 5$, και $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{K}_6[x] \mid k \in \mathbb{K}\} = \langle x, x^2 \rangle$ και $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 2$. ■