ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

Προχειρη Δοκιμασια 7

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI/LAI2019/LAI2019.html

Παρασκευή 20 Δεκεμβρίου 2019

Πρόχειρη Δοκιμασία. *Έστω η ακόλουθη βάση του* $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1 = (1,0,1), \quad \vec{e}_2 = (1,1,0), \quad \vec{e}_3 = (0,1,1)\big\}$$

και έστω $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *η μοναδική γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε:*

$$f(\vec{e}_1) = (-1,2,0), \quad f(\vec{e}_2) = (0,-1,1), \quad f(\vec{e}_3) = (-2,3,1)$$

(1) *Να βρεθεί η γραμμική απεικόνιση* f.
(2) *Να βρεθεί μια βάση για τον πυρήνα* $\mathsf{Ker}(f)$ *της* f *η οποία να συμπληρωθεί σε μια βάση* $\mathcal{C}$ *του* $\mathbb{R}^3$.
(3) *Να βρεθεί μια βάση της εικόνας* $\mathsf{Im}(f)$ *της* f, *η οποία να συμπληρωθεί σε μια βάση* $\mathcal{D}$ *του* $\mathbb{R}^3$.
(4) *Πότε το διάνυσμα* $\vec{x} = (a,b,c)$ *του* $\mathbb{R}^3$ *ανήκει στην εικόνα* $\mathsf{Im}(f)$ *της* f;
(5) *Να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης* $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$ *και ο πίνακας μετάβασης* $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}$.
(6) *Να βρεθούν οι συνιστώσες του διανύσματος* $(1,1,1)$ *ως προς τις βάσεις* $\mathcal{C}$ *και* $\mathcal{D}$.

Λύση. (1) Έστω $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Επειδή το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$, υπάρχουν $a,b,c \in \mathbb{R}^3$:

$$(x,y,z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = a(1,0,1) + b(1,1,0) + c(0,1,1) = (a+b, b+c, a+c) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a+b = x \\ b+c = y \\ a+c = z \end{cases}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα με αγνώστους τα a,b,c, βλέπουμε εύκολα ότι: $\begin{cases} a = \dfrac{x-y+z}{2} \\ \\ b = \dfrac{x+y-z}{2} \\ \\ c = \dfrac{-x+y+z}{2} \end{cases}$.

Επομένως:

$$(x,y,z) = \frac{x-y+z}{2}\vec{e}_1 + \frac{x+y-z}{2}\vec{e}_2 + \frac{-x+y+z}{2}\vec{e}_3 =$$

Τότε:

$$f(x,y,z) = f\left(\frac{x-y+z}{2}\vec{e}_1 + \frac{x+y-z}{2}\vec{e}_2 + \frac{-x+y+z}{2}\vec{e}_3\right) =$$
$$= \frac{x-y+z}{2}f(\vec{e}_1) + \frac{x+y-z}{2}f(\vec{e}_2) + \frac{-x+y+z}{2}f(\vec{e}_3) =$$
$$= \frac{x-y+z}{2}(-1,2,0) + \frac{x+y-z}{2}(0,-1,1) + \frac{-x+y+z}{2}(-2,3,1)$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η παραπάνω παράσταση ισούται με: $\left(\dfrac{x-y-3z}{2},\, -x+3z,\, y\right)$.

Άρα:

$$f(x,y,z) = \left(\frac{x-y-3z}{2},\, -x+3z,\, y\right)$$

(2) Έστω $(x,y,z) \in \mathsf{Ker}(f)$, δηλαδή $f(x,y,z) = (0,0,0)$. Τότε: $\left(\frac{x-y-3z}{2},\, -x+3z,\, y\right) = (0,0,0)$ και άρα:

$$\begin{cases} x-y-3z=0 \\ -x+3z=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y=0 \quad \text{και} \quad x=3z, \quad z\in\mathbb{R}$$

Άρα $\mathsf{Ker}(f) = \big\{(3z,0,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z\in\mathbb{R}\big\} = \big\{z(3,0,1)\in\mathbb{R}^3 \mid z\in\mathbb{R}\big\} = \big\langle(3,0,1)\big\rangle$, και επομένως το μονοσύνολο $\big\{\vec{\epsilon}_1=(3,0,1)\big\}$ είναι μια βάση του $\mathsf{Ker}(f)$. Συμπληρώνουμε σε μια βάση του $\mathbb{R}^3$: επειδή

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{C} = \big\{\vec{\epsilon}_1=(3,0,1),\ \vec{\epsilon}_2=(0,1,0),\ \vec{\epsilon}_3=(0,0,1)\big\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$ η οποία συμπληρώνει τη βάση του $\mathsf{Ker}(f)$.

(3) Γνωρίζουμε από τη Θεωρία ότι το σύνολο $\big\{f(\vec{\epsilon}_2), f(\vec{\epsilon}_3)\big\}$ είναι μια βάση του $\mathsf{Im}(f)$. Επειδή: $f(\vec{\epsilon}_2) = (-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$ και $f(\vec{\epsilon}_3) = (-\frac{3}{2},\frac{3}{2},0)$, έπεται ότι το σύνολο $\big\{(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}),\ (-\frac{3}{2},\frac{3}{2},0)\big\}$ είναι μια βάση της $\mathsf{Im}(f)$. Προφανώς τότε, για να απλοποιήσουμε τα διανύσματα, το σύνολο $\big\{\vec{\epsilon}'_2) = (-1,0,1),\ \vec{\epsilon}'_3=(-1,1,0)\big\}$ είναι μια βάση του $\mathsf{Im}(f)$. Επειδή

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{D} = \big\{\vec{\epsilon}'_1=(1,0,0),\ \vec{\epsilon}'_2=(-1,0,1),\ \vec{\epsilon}'_3=(-1,1,0)\big\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$ η οποία συμπληρώνει τη βάση της $\mathsf{Im}(f)$.

(4) Επειδή το σύνολο $\big\{\vec{\epsilon}'_2) = (-1,0,1),\ \vec{\epsilon}'_3=(-1,1,0)\big\}$ είναι μια βάση του $\mathsf{Im}(f)$, έπεται ότι:

$$(a,b,c)\in\mathsf{Im}(f) \iff (a,b,c)\in\big\langle(-1,0,1),\ (-1,1,0)\big\rangle \iff$$

$$\iff \exists\,\kappa,\lambda\in\mathbb{R}:\ (a,b,c) = \kappa(-1,0,1)+\lambda(-1,1,0) = (-\kappa-\lambda,\lambda,\kappa) \iff \begin{cases} a=-\kappa-\lambda \\ b=\lambda \\ c=\kappa \end{cases}$$

$$\iff a=-b-c \iff a+b+c=0$$

(5) Για να προσδιορίσουμε τον πίνακα μετάβασης $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$ εκφράζουμε τα διανύσματα της βάσης $\mathcal{D}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{C}$:

(α΄)

$$\vec{\epsilon}'_1 = (1,0,0) = a\vec{\epsilon}_1 + b\vec{\epsilon}_2 + c\vec{\epsilon}_3 = a(3,0,1)+b(0,1,0)+c(0,0,1) = (3a,b,a+c) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3a=1 \\ b=0 \\ a+c=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3a=\frac{1}{3} \\ b=0 \\ c=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

Επομένως:

$$\vec{\epsilon}'_1 = \frac{1}{3}\vec{\epsilon}_1 + 0\vec{\epsilon}_2 - \frac{1}{3}\vec{\epsilon}_3$$

(β′)

$$\vec{\epsilon}'_2 = (-1,0,1) = a\vec{\epsilon}_1 + b\vec{\epsilon}_2 + c\vec{\epsilon}_3 = a(3,0,1) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = (3a, b, a+c) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} 3a = -1 \\ b = 0 \\ a + c = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = 0 \\ c = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Επομένως:

$$\vec{\epsilon}'_2 = -\frac{1}{3}\vec{\epsilon}_1 + 0\vec{\epsilon}_2 + \frac{4}{3}\vec{\epsilon}_3$$

(γ′)

$$\vec{\epsilon}'_3 = (-1,1,0) = a\vec{\epsilon}_1 + b\vec{\epsilon}_2 + c\vec{\epsilon}_3 = a(3,0,1) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = (3a, b, a+c) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} 3a = -1 \\ b = 1 \\ a + c = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = 1 \\ c = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Επομένως:

$$\vec{\epsilon}'_2 = -\frac{1}{3}\vec{\epsilon}_1 + 1\vec{\epsilon}_2 + \frac{1}{3}\vec{\epsilon}_3$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Για την εύρεση του πίνακα μετάβασης $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}$ εκφράζουμε τα διανύσματα της βάσης $\mathcal{C}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{D}$. Εναλλακτικά, γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}} = (M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}})^{-1}$$

Υπολογίζοντας τον αντίστροφο του $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$ προκύπτει ότι:

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(6) Γνωρίζουμε ότι αν X είναι το διάνυσμα στήλη των συνιστωσών του διανύσματος $\vec{x}$ ως προς τη βάση $\mathcal{C}$ και Y είναι το διάνυσμα στήλη των συνιστωσών του διανύσματος $\vec{x}$ ως προς τη βάση $\mathcal{D}$, τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$X = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}\, Y \qquad \text{και} \qquad Y = M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}\, X$$

Θα έχουμε

$$(1,1,1) = a\,\vec{\epsilon}_1 + b\,\vec{\epsilon}_2 + c\,\vec{\epsilon}_3 \quad \Longrightarrow \quad (1,1,1) = a(3,0,1), +b(0,1,0) + c(0,0,1) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad (1,1,1) = (3a, b, a+c) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 3a = 1 \\ b = 1 \\ a + c = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 1 \\ c = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Άρα

$$(1,1,1) = \frac{1}{3}\vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2 + \frac{2}{3}\vec{\epsilon}_3 \quad \Longrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Αν $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ είναι το διάνυσμα στήλη των συνιστωσών του διανύσματος $(1,1,1)$ ως προς τη βάση $\mathcal{D}$, τότε θα έχουμε:

$$Y = M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}\, X = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Άρα

$$(1,1,1) = 3\vec{\epsilon}'_1 + \vec{\epsilon}'_2 + \vec{\epsilon}'_3 \qquad \blacksquare$$