ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Τμημα $\mathbf{B'}$

Προχειρη Δοκιμασια **8** (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI/LAI2019/LAI2019.html

Παρασκευή 10 Ιανουαρίου 2020

Πρόχειρη Δοκιμασία. *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση*

$$f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x,y,z,w) = (x+z,\ y+w)$$

(1) *Να βρεθεί ο πίνακας A της f ως προς τις κανονικές βάσεις $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ και $\mathcal{C} = \{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2\}$ των $\mathbb{R}^4$ και $\mathbb{R}^2$ αντίστοιχα.*

(2) *Να βρεθεί μια βάση για τον πυρήνα $\mathsf{Ker}(f)$ και μια βάση για την εικόνα $\mathsf{Im}(f)$ της f.*

(3) *Να βρεθεί ένας αντιστρέψιμος 2×2 πίνακας Q και ένας αντιστρέψιμος 4×4 πίνακας P έτσι ώστε:*

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } r = \mathbf{r}(A)$$

Λύση. (1) Θα έχουμε:

$$f(\vec{e}_1) = f(1,0,0,0) = (1,0) = \vec{\epsilon}_1 = 1\vec{\epsilon}_1 + 0\vec{\epsilon}_2$$
$$f(\vec{e}_2) = f(0,1,0,0) = (0,1) = \vec{\epsilon}_2 = 0\vec{\epsilon}_1 + 1\vec{\epsilon}_2$$
$$f(\vec{e}_3) = f(0,0,1,0) = (1,0) = \vec{\epsilon}_1 = 1\vec{\epsilon}_1 + 0\vec{\epsilon}_2$$
$$f(\vec{e}_4) = f(0,0,0,1) = (0,1) = \vec{\epsilon}_2 = 0\vec{\epsilon}_1 + 1\vec{\epsilon}_2$$

Επομένως:

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Έστω $(x,y,z,w) \in \mathsf{Ker}(f)$ και επομένως $f(x,y,z,w) = \vec{0} = (0,0)$. Τότε $(x+z, y+w) = (0,0)$, δηλαδή $x+z=0$ και $y+w=0$. Προφανώς τότε $z=-x$ και $w=-y$, και επομένως

$$\mathsf{Ker}(f) = \big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid z=-x \text{ και } w=-y\big\} = \big\{(x,y,-x,-y) \in \mathbb{R}^4 \mid z=-x \text{ και } w=-y\big\} =$$
$$= \big\{x(1,0,-1,0) + y(0,1,0,-1) \in \mathbb{R}^4 \mid x,y \in \mathbb{R}\big\} = \big\langle (1,0,-1,0),\ (0,1,0,-1)\big\rangle$$

Προφανώς τα διανύσματα $\vec{e}\,'_3 = (1,0,-1,0)$ και $\vec{e}\,'_4 = (0,1,0,-1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και επομένως αποτελούν μια βάση του $\mathsf{Ker}(f)$.

Συμπληρώνουμε τη βάση $\{\vec{e}\,'_3,\ \vec{e}\,'_4\}$ σε μια βάση

$$\mathcal{B}' = \big\{\vec{e}\,'_1 = (1,0,0,0),\ \ \vec{e}\,'_2 = (1,0,0,0),\ \ \vec{e}\,'_3 = (1,0,-1,0),\ \ \vec{e}\,'_4 = (0,1,0,-1)\big\}$$

του $\mathbb{R}^4$. Το σύνολο $\mathcal{B}'$ είναι βάση του $\mathbb{R}^4$, διότι:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Από τη Θεωρία γνωρίζουμε τότε ότι τα διανύσματα $f(\vec{e}\,'_1)$ και $f(\vec{e}\,'_2)$ αποτελούν μια βάση $\mathcal{C}'$ της $\mathsf{Im}(f)$. Υπολογίζουμε:

$\vec{\epsilon}\,'_1 := f(\vec{e}\,'_1) = f(1,0,0,0) = (1,0) = \vec{\epsilon}_1 \quad$ και $\quad \vec{\epsilon}\,'_2 := f(\vec{e}\,'_2) = f(0,1,0,0) = (0,1) = \vec{\epsilon}_2$

Έτσι μια βάση της εικόνας $\mathsf{Im}(f)$ είναι η

$$\mathcal{C}' = \{\vec{\epsilon}\,'_1,\ \vec{\epsilon}\,'_2\} = \{\vec{\epsilon}_1,\ \vec{\epsilon}_2\} = \mathcal{C}$$

Ιδιαίτερα προκύπτει ότι η βαθμίδα της f είναι

$$\mathbf{r}(f) = 2$$

(3) Θα προσδιορίσουμε τον πίνακα $B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}$ της f ως προς το ζευγάρι βάσεων $\mathcal{B}'$ και $\mathcal{C}'$. Επειδή $\mathbf{r}(f) = 2$, από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'} = \begin{pmatrix} I_2 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned} f(\vec{e}\,'_1) &= \vec{\epsilon}\,'_1 = 1\vec{\epsilon}\,'_1 + 0\vec{\epsilon}\,'_2 \\ f(\vec{e}\,'_2) &= \vec{\epsilon}\,'_2 = 0\vec{\epsilon}\,'_1 + 1\vec{\epsilon}\,'_2 \\ f(\vec{e}\,'_3) &= \vec{0} = 0\vec{\epsilon}\,'_1 + 0\vec{\epsilon}\,'_2 \\ f(\vec{e}\,'_4) &= \vec{0} = 0\vec{\epsilon}\,'_1 + 0\vec{\epsilon}\,'_2 \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει ο πίνακας $B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}$.

Επειδή $\mathcal{B}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^4$, ο πίνακας μετάβασης $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ από τη βάση $\mathcal{B}$ στην βάση $\mathcal{B}'$, αποτελείται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B}'$ οι οποίες είναι οι στήλες του πίνακα $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$:

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

και επειδή $\mathcal{C}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$, ο πίνακας μετάβασης $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$ από τη βάση $\mathcal{C}$ στην βάση $\mathcal{C}'$, αποτελείται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{C}'$ οι οποίες είναι οι στήλες του πίνακα $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$:

$$Q = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Επαληθεύουμε:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \blacksquare$$