Κεφάλαιο 1

Πίνακες και Συστήματα

1.1 Μέγεθος – Πράξεις

(i) Να ευρεθεί το μέγεθος των πινάκων:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & \sqrt{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt[3]{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ -\sqrt[4]{2} & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Λύση Ο A είναι 3×5 πίνακας, ο B είναι 1×5 πίνακας, ο C είναι 5×1 πίνακας και ο D είναι 3×3 πίνακας.

(ii) Ποιες από τις ακόλουθες πράξεις μεταξύ των ανωτέρω πινάκων είναι επιτρεπτές και ποιο είναι το μέγεθος των πινάκων που προκύπτουν μετά την εκτέλεση των πράξεων;

$$A + B, \quad A + A, \quad BA, \quad AB, \quad BC, \quad CB, \quad DA, \quad AD.$$

Λύση Η πρόσθεση πινάκων είναι επιτρεπτή μόνο αν οι προσθετέοι πίνακες είναι ιδίου μεγέθους. Συνεπώς, μόνο η πράξη $A + A$ είναι επιτρεπτή και ο πίνακας που προκύπτει είναι ένας 3×5 πίνακας.
Ο πολλαπλασιασμός δύο πινάκων είναι επιτρεπτός μόνο αν το πλήθος των στηλών τού πρώτου συμπίπτει με το πλήθος των γραμμών τού δευτέρου. Ο πίνακας που προκύπτει έχει τόσες γραμμές όσες έχει ο πρώτος πίνακας και τόσες στήλες όσες έχει ο δεύτερος πίνακας. Έτσι τα μόνα επιτρεπτά γινόμενα είναι τα:
BC που είναι ένας 1×1 πίνακας, CB που είναι ένας 5×5 πίνακας και DA που είναι ένας 3×5 πίνακας.

(iii) Στο σύνολο $M_2(\mathbb{R})$ των 2×2 πινάκων με συνιστώσες από τους πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$ να εκτελεστούν οι ακόλουθες πράξεις:

$$AB, \quad BA, \quad (A + B)^2, \quad A^2 + 2AB + B^2, \quad AC, \quad CA, \quad (A + C)^2, \quad A^2 + 2AC + C^2,$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Τι παρατηρείτε;

Λύση

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

και γι' αυτό

$$(A + B)^2 = A(A + B) + B(A + B) = AA + AB + BA + BB = \begin{pmatrix} 18 & 18 \\ 18 & 18 \end{pmatrix} =$$

$$A^2 + 2AB + B^2.$$

$$AC = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \neq CA = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$$

και γι' αυτό

$$(A + C)^2 = AA + AC + CA + CC = \begin{pmatrix} 24 & 28 \\ 35 & 45 \end{pmatrix} \neq$$

$$\begin{pmatrix} 26 & 34 \\ 29 & 43 \end{pmatrix} = A^2 + 2AC + C^2.$$

Παρατηρούμε ότι για δύο τετραγωνικούς πίνακες A και B ισχύει η σχέση $AB = BA$, αν και μόνο αν ισχύει η σχέση $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

(iv) Έστω δύο $n \times n$ πίνακες A και B που ανήκουν στο σύνολο $M_2(\mathbb{R})$ και ικανοποιούν την ισότητα $AB = BA$. Να δειχθεί ότι $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.

(v) Θεωρούμε τους ακόλουθους 2×2 πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{και} \ B = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Να υπολογιστεί το γινόμενο AB.

Λύση

$$AB = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi & -\cos\phi\sin\theta - \cos\theta\sin\phi \\ \cos\phi\sin\theta + \cos\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi) & -\sin(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) & \cos(\theta + \phi) \end{pmatrix}$$

(vi) Να ευρεθούν 4×4 πίνακες A και B με

(a) $AB \neq BA$,

(b) $A \neq \mathbf{0}_4$, $B \neq \mathbf{0}_4$ αλλά $AB = \mathbf{0}_4$,

(c) $A \neq \mathbf{0}_4$ αλλά $A^2 = \mathbf{0}_4$,

(d) $A \neq \mathbf{0}_4, A^2 \neq \mathbf{0}_4$ αλλά $A^3 = \mathbf{0}_4$,

(e) $A \neq \mathbf{0}_4, A^2 \neq \mathbf{0}_4, A^3 \neq \mathbf{0}_4$ αλλά $A^4 = \mathbf{0}_4$,

(f) $A^2 = A$ αλλά $A \neq \mathbf{0}_4$ και $A \neq \mathbf{I}_4$,

(g) $A^3 = A$ αλλά $A \neq \mathbf{0}_4, A \neq \mathbf{I}_4, A \neq -\mathbf{I}_4$.

Λύση (a) Θεωρούμε τους 4×4 πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Εκτελώντας τους πολλαπλασιασμούς AB και BA προκύπτουν οι ακόλουθοι δύο πίνακες

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Προφανώς, $AB \neq BA$.

(b) Θεωρούμε τους 4×4 πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό AB διαπιστώνουμε ότι το αποτέλεσμα ισούται με τον μηδενικό 4×4 πίνακα.

(c) Θεωρούμε τον 4×4 πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό $AA = A^2$ διαπιστώνουμε ότι το αποτέλεσμα ισούται με τον μηδενικό 4×4 πίνακα.

(d) Θεωρούμε τον 4×4 πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Εκτελώντας τους πολλαπλασιασμούς $AA = A^2$ και $AAA = A^3$ παίρνουμε.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) Προτείνουμε την επίλυσή της από τον αναγνώστη.
(f), (g)

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ικανοποιεί όλες τις αιτούμενες από τα (f) και (g) συνθήκες.

(vii) Ένας πίνακας P ονομάζεται *ταυτοδύναμος*, αν $P^2 = P$. Να δειχθεί ότι οι ακόλουθοι πίνακες είναι ταυτοδύναμοι:

$$\begin{pmatrix} 25 & -20 \\ 30 & -24 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Λύση Αρκεί να εκτελεστεί σε κάθε περίπτωση ο αντίστοιχος πολλαπλασιασμός πινάκων.

Οι Ασκήσεις επιλύονται από τους διδάσκοντες Ν.Μαρμαρίδη και Κ. Μέξη στο πλαίσιο τού Μαθήματος Γραμμική Άλγεβρα Ι, α' Εξαμήνου Σπουδών Τμήματος Μαθηματικών, Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Ιωάννινα, Οκτώβριος 2004

1.2 Πράξεις επί των Πινάκων. Αντίστροφος Πίνακα. Ορίζουσες

(i) Έστω ότι A και B είναι δύο $n \times n$ πίνακες και έστω ότι ο $I_n - AB$ είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας.
Να δειχθεί ότι

$$(I_n - BA)(I_n + B(I_n - AB)^{-1}A) = I_n.$$

Να συμπεράνετε ότι ο $(I_n - BA)$ είναι επίσης αντιστρέψιμος.

Λύση (i)

$$\begin{aligned}
&(I_n - BA)(I_n + B(I_n - AB)^{-1}A) = \\
&I_n - BA + (I_n - BA)B(I_n - AB)^{-1}A = \\
&I_n - BA + B(I_n - AB)^{-1}A - BAB(I_n - AB)^{-1}A = \\
&I_n - BA + B[(I_n - AB)^{-1}A - AB(I_n - AB)^{-1}A] = \\
&I_n - BA + B[(I_n - AB)^{-1} - AB(I_n - AB)^{-1}]A = \\
&I_n - BA + B[(I_n - AB)(I_n - AB)^{-1}]A = \\
&I_n - BA + BA = I_n.
\end{aligned}$$

Σημείωση. Από τη Θεωρία τής Γραμμικής Άλγεβρας που ωστόσο δεν αναπτύχθηκε μέχρι τώρα, είναι γνωστό ότι αν για δύο $n \times n$ πίνακες A, B ισχύει $AB = I_n$, τότε ισχύει και $BA = I_n$. Γι' αυτό προτρέπουμε τον αναγνώστη να αποδείξει ότι επίσης ισχύει:

$$(I_n + B(I_n - AB)^{-1}A)(I_n - BA) = I_n.$$

(ii) Έστω ότι οι A, B και $A + B$ είναι αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες. Να δειχθεί ότι

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B$$

Λύση (ii)

$$\begin{aligned}
&(A^{-1} + B^{-1})(A(A + B)^{-1}B) = A^{-1}A(A + B)^{-1}B + B^{-1}A(A + B)^{-1}B = \\
&(A + B)^{-1}B + B^{-1}A(A + B)^{-1}B = (I_n + B^{-1}A)(A + B)^{-1}B = \\
&(B^{-1}B + B^{-1}A)(A + B)^{-1}B = B^{-1}(B + A)(A + B)^{-1}B = B^{-1}B = I_n.
\end{aligned}$$

Σημείωση. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τα όσα αναφέραμε στην αμέσως προηγούμενη άσκηση προτρέπουμε τον αναγνώστη να αποδείξει ότι επίσης ισχύει:

$$(A(A + B)^{-1}B)(A^{-1} + B^{-1}) = I_n.$$

(iii) Έστω ότι οι A και $A + I_n$ είναι αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες. Να δειχθεί ότι

$$(A + I_n)^{-1} + (A^{-1} + I_n)^{-1} = I_n.$$

(iv) Για ποιες τιμές τού m είναι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} m+1 & 2 \\ 2 & m-1 \end{pmatrix}$ αντιστρέψιμος;

Λύση (iv) Ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν η ορίζουσά του είναι μη–μηδενική. Εδώ έχουμε:

$$\det A = (m+1)(m-1) - 4 = m^2 - 1 - 4 = m^2 - 5.$$

Επομένως, ο A είναι αντιστρέψιμος για κάθε $m \neq \pm\sqrt{5}$.

(v) Να υπολογιστούν οι ορίζουσες των ακόλουθων πινάκων:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{pmatrix}.$$

(Η ορίζουσα τού τελευταίου πίνακα ονομάζεται *ορίζουσα Vandermonde*.)

Λύση (v) Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα τού δεύτερου και τρίτου πίνακα. Η ορίζουσα τού δεύτερου πίνακα υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix} =$$

$$(\alpha+\beta+\gamma) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)0 = 0.$$

Η ορίζουσα τού τρίτου πίνακα υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & \beta-\alpha & \beta^2-\alpha^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & \beta-\alpha & \beta^2-\alpha^2 \\ 0 & \gamma-\alpha & \gamma^2-\alpha^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta-\alpha & \beta^2-\alpha^2 \\ \gamma-\alpha & \gamma^2-\alpha^2 \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha) \begin{vmatrix} 1 & \beta+\alpha \\ 1 & \gamma+\alpha \end{vmatrix} =$$

$$(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta-\alpha) = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta).$$

Σημείωση. για την πρώτη ισότητα τού ανωτέρω υπολογισμού χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\det A = \det {}^t A$.

(vi) Να υπολογιστεί η ορίζουσα τού πίνακα

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

εκτελώντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς επί των γραμμών τού πίνακα, μέχρις ότου να προκύψει ένας άνω τριγωνικός πίνακας με ορίζουσα ίση με την αρχική.

Λύση (vi)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 7 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 12.$$

(vii) Να προσδιοριστούν όλοι οι $2\times$ ελάσσονες πίνακες τού ακόλουθου πίνακα:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

(viii) Ποιο είναι το πλήθος των 1×1 ελασσόνων πινάκων ενός 2×2, των 2×2 ελασσόνων πινάκων ενός 3×3, των $(n-1) \times (n-1)$ ελασσόνων πινάκων ενός $n \times n$ πίνακα;

Λύση (vii) Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $n\times n$ τετραγωνικός πίνακας. Σε κάθε συνιστώσα του a_{ij} αντιστοιχεί ένας ελάσσονας $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας· υπενθυμίζουμε ότι αυτός προκύπτει κατόπιν διαγραφής τής i-οστής γραμμής και τής j-οστής στήλης τού A.
Συνεπώς, έχουμε n^2 ελάσσονες πίνακες μεγέθους $(n-1) \times (n-1)$.

(ix) Στους ακόλουθους δύο 3×3 πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ να επιβεβαιωθούν οι τύποι

(α) $\det A \det B = \det(AB)$, (β) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$, (γ) ${}^t(AB) = ({}^tB)({}^tA)$.

που ισχύουν για οποιουσδήποτε δύο $n \times n$ πίνακες.

(x) Να βρείτε παραδείγματα 2×2 πινάκων όπου

(α) ${}^t(AB) \neq ({}^tA)({}^tB)$, (β) $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$, (γ) $\det(A+B) \neq \det A + \det B$.

(xi) Αν A και B είναι δύο $n \times n$ πίνακες τέτοιοι ώστε ${}^tA = A^{-1}$ και ${}^tB = B^{-1}$, να δείξετε ότι

$$\det((A+B)(A-B)) = \det({}^tAB - {}^tBA)$$

Λύση (xi) Έχουμε:

$$\begin{aligned} &{}^tAB - {}^tBA = A^{-1}B - B^{-1}A = (A^{-1}B + I_n) - (B^{-1}A + I_n) = \\ &A^{-1}(B+A) - B^{-1}(A+B) = (A^{-1} - B^{-1})(A+B) = ({}^tA - {}^tB)(A+B). \end{aligned}$$

Επομένως, $\det[{}^tAB - {}^tBA] = \det[({}^tA - {}^tB)(A+B)] = \det[{}^t(A-B)](A+B) = \det[(A-B)(A+B)] = \det[(A+B)(A-B)]$

Οι Ασκήσεις επιλύονται από τους διδάσκοντες Ν.Μαρμαρίδη και Κ. Μέξη στο πλαίσιο τού Μαθήματος Γραμμική Άλγεβρα Ι, α' Εξαμήνου Σπουδών Τμήματος Μαθηματικών, Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Ιωάννινα, Οκτώβριος 2004

1.3 Γραμμικά Συστήματα και Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί

(i) Ποιες από τις επόμενες εξισώσεις με αγνώστους τα x_1, x_2, x_3 είναι γραμμικές;

$$(1)\ x_1 + 2x_3 = 3,\quad (2)\ x_1x_2 + x_2 = 1,\quad (3)\ x_1 - x_2 = \sin^2 x_1 + \cos^2 x_1,$$

$$(4)\ x_1 - x_2 = \sin^2 x_1 + \cos^2 x_2,\quad (5)\ |x_1| - |x_2| = 0,\quad (6)\ \pi x_1 + \sqrt{7}x_2 = \sqrt{3}.$$

Λύση (i)
Η (1) είναι γραμμική.
Η (2) δεν είναι γραμμική, αφού έχουμε γινόμενο αγνώστων.
Η (3) είναι γραμμική, αφού το δεξιό μέλος της ισούται πάνοτε με 1.
Η (4) δεν είναι γραμμική, αφού το δεξιό μέλος της εμπεριέχει μη–γραμμικές συναρτήσεις επί των αγνώστων.
Η (5) επίσης δεν είναι γραμμική, αφού τώρα έχουμε την εφαρμογή απόλυτων τιμών επί των αγνώστων.
Η (6) είναι γραμμική.

(ii) Να προσδιοριστούν οι λύσεις των ακόλουθων γραμμικών συστημάτων με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -5 \\ 2x_1 - x_2 &= 5 \end{aligned},\quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 6x_2 &= 12 \end{aligned},\quad \begin{aligned} x_2 &= 6 \\ x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned}.$$

Λύση (ii)
Θα επιλύσουμε το πρώτο και τρίτο σύστημα.
Για το πρώτο σύστημα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 15 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_2 \to -\frac{1}{5}\Gamma_2}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, το αντίστοιχο ισοδύναμο σύστημα είναι το:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -5 \\ x_2 &= -3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -5 - 2x_2 \\ x_2 &= -3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -3 \end{aligned}.$$

Για το τρίτο σύστημα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_1 \rightleftarrows \Gamma_2}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, το αντίστοιχο σύστημα είναι το

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ x_2 &= 6 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -2 \\ x_2 &= 6 \end{aligned}$$

(iii) Να προσδιοριστούν οι λύσεις των ακόλουθων γραμμικών συστημάτων με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 10 \end{aligned},\quad \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}.$$

Λύση (iii)
Προτείνουμε να ασχοληθεί ο αναγνώστης μόνος του με την επίλυση τής συγκεκριμένης άσκησης.

(iv) Με τη βοήθεια τής απαλοιφής Gauss να δειχθεί ότι καθένα από τα επόμενα συστήματα είναι ασυμβίβαστο (δεν διαθέτει λύση).

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_3 &= 1 \end{aligned} \quad .$$

Λύση (iv)
Θα ασχοληθούμε με το πρώτο από τα δύο συστήματα. Έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ -2 & -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_3 + 2\Gamma_1}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, το προκύπτον ισοδύναμο σύστημα είναι το:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -3x_2 &= -2 \\ 0x_3 &= 10 \end{aligned} \quad .$$

Η τρίτη εξίσωση φανερώνει ότι το συγκεκριμένο σύστημα είναι αδύνατο.

(v) Με τη βοήθεια τής απαλοιφής Gauss να δειχθεί ότι το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 3 \end{aligned} \quad .$$

διαθέτει περισσότερες από μία λύσεις.

Λύση (v)
Έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 4\Gamma_1}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 7\Gamma_1}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & -6 & -12 & -4 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_2}{=}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \frac{-1}{3}\Gamma_2}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς, το προκύπτον ισοδύναμο σύστημα είναι το:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= \tfrac{2}{3} \\ 0x_3 &= 0 \end{aligned} \quad .$$

Θέτοντας $x_3 = \lambda$ έχουμε:

$$x_2 = \frac{2}{3} - 2\lambda, \quad x_1 = 1 - 2x_2 - 3\lambda = 1 - \frac{4}{3} + 4\lambda - 3\lambda = -\frac{1}{3} + \lambda.$$

Κάθε τιμή τού $\lambda \in \mathbb{K}$ χορηγεί και μια λύση:

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{1}{3} + \lambda, \frac{2}{3} - 2\lambda, \lambda\right).$$

(vi) Να προσδιοριστούν οι λύσεις (αν υπάρχουν) των ακόλουθων συστημάτων:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 4z + t &= 0 \\ x + z - t &= 0 \\ 3x - 3y + 5z &= 0 \\ 4x - 3y + 6z - t &= 0 \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} x - 2y + z + w &= 1 \\ x - 2y + z - w &= -1 \\ x - 2y + z + 5w &= 5 \end{aligned}.$$

Λύση (vi)
Προτείνουμε να ασχοληθεί ο αναγνώστης μόνος του με την επίλυση τής συγκεκριμένης άσκησης.

(vii) Ένας τριψήφιος αριθμός N ισούται με το δεκαπενταπλάσιο τού αθροίσματος των ψηφίων του. Εάν αντιστραφεί η σειρά των ψηφίων του, τότε ο προκύπτων αριθμός υπερβαίνει κατά 396 τον αριθμό N. Το ψηφίο των μονάδων υπερβαίνει κατά 1 το άθροισμα των δύο υπολοίπων ψηφίων. Να σχηματίσετε ένα σύστημα τριών γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους τα τρία ψηφία τού αριθμού N και ακολούθως να λύσετε το σύστημα για να προσδιορίσετε τον N.

Λύση (vii)
Έστω ότι ο ζητούμενος τριψήφιος αριθμός είναι ο $N = xyz$ (γραμμένος με βάση το 10).
Έχουμε $100x + 10y + z = 15(x + y + z) \Leftrightarrow 85x - 5y - 14z = 0, \;\; (1)$.
Έχουμε $100z + 10y + x = 100x + 10y + z + 396 \Leftrightarrow -x + z = 4, \;\; (2)$.
Έχουμε $z = x + y + 1 \Leftrightarrow x + y - z = -1, \;\; (3)$.
Συνεπώς, το προκύπτον σύστημα είναι το ακόλουθο:

$$\begin{aligned} 85x - 5y - 14z &= 0 \\ -x + z &= 4 \\ x + y - z &= -1 \end{aligned}.$$

Θα το λύσουμε εφαρμόζοντας τη μέθοδο απαλοιφής Gauss.

$$\begin{pmatrix} 85 & -5 & -14 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_3}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 85 & -5 & -14 & 0 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_1}{=}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 85 & -5 & -14 & 0 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 85\Gamma_1}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -90 & 71 & 85 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 90\Gamma_2}{=}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 71 & 355 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \frac{1}{71}\Gamma_3}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Το προκύπτον ισοδύναμο σύστημα είναι το ακόλουθο:

$$\begin{aligned} x + y - z &= -1 \\ y &= 3 \\ z &= 5 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 3. \\ z &= 5 \end{aligned}$$

Επομένως, ο αριθμός είναι ο $N = 135$.

Οι Ασκήσεις επιλύονται από τους διδάσκοντες Ν.Μαρμαρίδη και Κ. Μέξη στο πλαίσιο τού Μαθήματος Γραμμική Άλγεβρα Ι, α' Εξαμήνου Σπουδών Τμήματος Μαθηματικών, Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Ιωάννινα, Νοέμβριος 2004

Τι ειπαν οι Μαθηματικοι για τα Μαθηματικα

Gauss, Karl Friedrich (1777-1855)

Αν κάποιος ασχολιόνταν με τις αλήθειες των Μαθηματικών τόσο πολύ και συνεχώς όπως εγώ, τότε θα κατέληγε στα ίδια συμπεράσματα με μένα.

1.4 Στοιχειώδεις Πίνακες-Υπολογισμός Αντιστρόφου

(i) Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Να δειχθεί ότι οι A και B είναι αντιστρέψιμοι με τους εξής δύο τρόπους:

(a) υπολογίζοντας τις $\det A$, $\det B$.

(b) υπολογίζοντας τους A^{-1} και B^{-1} με τη μέθοδο των στοιχειωδών μετασχηματισμών επί των γραμμών των πινάκων $[A \mid I_3]$ και $[B \mid I_3]$ αντιστοίχως.

Λύση (i)
(a)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)1 = -1 \neq 0.$$

Επομένως, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Επομένως, ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος.
(b) Υπενθυμίζουμε ότι

(a) με E_{ij} συμβολίζουμε τον πίνακα που προκύπτει από τον ταυτοτικό πίνακα κατόπιν εναλλαγής των i και j γραμμών του

(b) με $E_{ij}(r)$ συμβολίζουμε τον πίνακα που προκύπτει από τον ταυτοτικό πίνακα αντικαθιστώντας το στοιχείο στη θέση (i, j) από το στοιχείο r

(c) και ότι με $E_i(r)$ συμβολίζουμε τον πίνακα που προκύπτει από τον ταυτοτικό πίνακα αντικαθιστώντας το στοιχείο στη θέση (i, i) από το στοιχείο r.

Επιπλέον υπενθυμίζουμε ότι

(a) η εναλλαγή των i και j γραμμών ενός πίνακα αντιστοιχεί στον από αριστερά πολλαπλασιασμό τού πίνακα με τον E_{ij},

(b) ότι η πρόσθεση τού r-πολλαπλάσιου τής j-γραμμής στην i-γραμμή αντιστοιχεί με τον από αριστερά πολλαπλασιασμό τού πίνακα με τον πίνακα $E_{ij}(r)$.

(c) και ότι ο πολλαπλασιασμός τής i-γραμμής ενός πίνακα με κάποιο στοιχείο r αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό τού πίνακα από αριστερά με τον πίνακα $E_i(r)$.

$$[A \mid I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{13}]{\Gamma_1 \rightleftarrows \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_1(-1)]{\Gamma_1 \to (-1)\Gamma_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{23}]{\Gamma_2 \rightleftarrows \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{12}(-1)]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{13}(-1)]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Επομένως, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Στην περίπτωση τού πίνακα B προτείνουμε ως άσκηση στον αναγνώστη την επανάληψη τής ανωτέρω διαδικασίας. Ο αντίστροφος τού B είναι ο

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -15 & 13 \\ 4 & 7 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Να εκφραστούν οι A και B ως γινόμενο στοιχειωδών πίνακων.

Λύση (ii)

Από τον προηγούμενο προσδιορισμό τού αντιστρόφου τού A βλέπουμε ότι ο ταυτοτικός 3×3 πίνακας ισούται με το γινόμενο:

$$I_3 = E_{13}(-1)E_{12}(-1)E_{23}E_1(-1)E_{13}A.$$

Επομένως,

$$A = E_{13}^{-1}(E_1(-1))^{-1}E_{23}^{-1}(E_{12}(-1))^{-1}(E_{13}(-1))^{-1} = E_{13}E_1(-1)E_{23}E_{12}(1)E_{13}(1) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Παρόμοια είναι και η διαδικασία στην περίπτωση τού πίνακα B την οποία προτείνουμε ως άσκηση στον αναγνώστη. Εδώ δίνουμε απλώς το πώς γραφεται ο B ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

$$B = E_{21}(2)E_{31}(3)E_{32}(1)E_{12}(2)E_{13}(-13)E_{23}(6) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ορισμός Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας. Ονομάζουμε *βαθμίδα* τού A το πλήθος των μη-μηδενικών γραμμών του ισχυρά κλιμακωτού πίνακα που είναι γραμμοϊσοδύναμος τού A. Συνήθως η βαθμίδα τού A παριστάνεται με $\text{rank}(A)$.

(i) Να υπολογιστούν οι βαθμίδες των ακόλουθων πινάκων:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&6&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&2&3\\0&0&5&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&3\\0&-2\\5&-1\\-2&3\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1&3&1&-2&-3\\1&4&3&-1&-4\\2&3&-4&-7&-3\\3&8&1&-7&-8\end{pmatrix}.$$

Λύση (iii)
Θα εκτελέσουμε τους μετασχηματισμούς επί των γραμμών των πινάκων μόνο στην περίπτωση τού πίνακα D. Στις άλλες περιπτώσεις θα δώσουμε απλώς τις βαθμίδες των πινάκων και προτείνουμε στον αναγνώστη να εκτελέσει μόνος του τους ανάλογους μετασχηματισμούς. Έτσι έχουμε: rank(A) = 2, rank(B) = 2, rank(C)=2.
Ας υπολογίσουμε τη βαθμίδα τού πίνακα D.

$$\begin{pmatrix}1&3&1&-2&-3\\1&4&3&-1&-4\\2&3&-4&-7&-3\\3&8&1&-7&-8\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{\Gamma_3\to\Gamma_3-2\Gamma_1\\ \Gamma_4\to\Gamma_4-3\Gamma_1}]{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1}\begin{pmatrix}1&3&1&-2&-3\\0&1&2&1&-1\\0&-3&-6&-3&3\\0&-1&-2&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_3\rightleftarrows\Gamma_4}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&1&-2&-3\\0&1&2&1&-1\\0&-1&-2&-1&1\\0&-3&-6&-3&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_4\to\Gamma_4-3\Gamma_3}\begin{pmatrix}1&3&1&-2&-3\\0&1&2&1&-1\\0&-1&-2&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3+\Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&1&-2&-3\\0&1&2&1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1-3\Gamma_2}\begin{pmatrix}1&0&-5&-5&0\\0&1&2&1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Επομένως, rank(D) = 2.

Οι Ασκήσεις επιλύονται από τους διδάσκοντες Ν.Μαρμαρίδη και Κ. Μέξη στο πλαίσιο τού Μαθήματος Γραμμική Άλγεβρα Ι, α' Εξαμήνου Σπουδών Τμήματος Μαθηματικών, Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Ιωάννινα, Νοέμβριος 2004

Τι είπαν οι Μαθηματικοί για τα Μαθηματικά

Poisson, Siméon Denis (1781-1840)

Μόνο για δυο λόγους αξίζει κανείς να ζει · για να ανακαλύπτει και να διδάσκει Μαθηματικά.

Κεφάλαιο 2

Διανυσματικοί Χώροι

2.1 Η Έννοια τού Διανυσματικού Χώρου

(i) Θεωρούμε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ μαζί με τις πράξεις

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, (z, z') \mapsto z + z' \text{ και } \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, (r, z) \mapsto rz,$$

όπου $z + z'$ είναι η συνήθης πρόσθεση μιγαδικών αριθμών και rz είναι ο συνήθης πολλαπλασιασμός μιγαδικών αριθμών (*προσοχή: ο αριστερός παράγοντας r στο γινόμενο rz είναι πάντοτε πραγματικός*).
Να δειχθεί ότι ο $\mathbb{C}$ αποτελεί έναν $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο με πρόσθεση την πράξη «+» και βαθμωτό πολλαπλασιασμό την πράξη «·».

Λύση (i)

(a) Η πρόσθεση των μιγαδικών αριθμών είναι μια προσεταιριστική πράξη, αφού ως γνωστόν

$$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, (z + z') + z'' = z + (z' + z'').$$

(b) Επίσης η πρόσθεση των μιγαδικών αριθμών είναι μια μεταθετική πράξη, αφού ως γνωστόν

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, z + z' = z' + z.$$

(c) Προφανώς, το μηδέν των μιγαδικών αριθμών είναι το μηδενικό στοιχείο ως προς την πρόσθεση, αφού

$$\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = z = 0 + z.$$

(d) Το αντίθετο τού μιγαδικού αριθμού z είναι ο μιγαδικός αριθμός $-z$. Πράγματι,

$$z + (-z) = 0 = (-z) + z.$$

Επιπλέον, ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός, δηλαδή ο από τα αριστερά πολλαπλασιασμός των στοιχείων τού $\mathbb{C}$ με τα στοιχεία τού $\mathbb{R}$ ικανοποιεί τα τέσσερα υπολειπόμενα αξιώματα, δηλαδή

(e)

$$\forall r \in \mathbb{R}, \forall z, z' \in \mathbb{C}, r(z + z') = r(z + z').$$

(f)

$$\forall r, r' \in \mathbb{R}, \forall z, \in \mathbb{C}, (r + r')z = rz + r'z.$$

(g)

$$\forall r, r' \in \mathbb{R}, \forall z, \in \mathbb{C}, (rr')z = r(r')z.$$

(h)

$$\forall z \in \mathbb{C}, 1z = z.$$

(ii) Θεωρούμε το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}^+$ μαζί με τις πράξεις

$$\oplus : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, (a, b) \mapsto a \oplus b := ab$$

και

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, (r, a) \mapsto r \odot a := a^r,$$

όπου ab είναι ο συνήθης πολλαπλασιασμός πραγματικών αριθμών και a^r είναι η ύψωση τού πραγματικού αριθμού a στην δύναμη r.
Να δειχθεί ότι το σύνολο $\mathbb{R}^+$ αποτελεί έναν $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο με πρόσθεση την πράξη «$\oplus$» και βαθμωτό πολλαπλασιασμό την πράξη «$\odot$».

Λύση (ii)

(a) Για την πράξη τής πρόσθεσης των στοιχείων τού $\mathbb{R}^+$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\forall a, a', a'' \in \mathbb{R}^+,\\
&(a \oplus a') \oplus a'' = (aa') \oplus a'' = (aa')a'' = a(a'a'') = a \oplus (a' \oplus a'').
\end{aligned}$$

(b) Επίσης η πράξη τής πρόσθεσης είναι μεταθετική, αφού

$$\forall a, a' \in \mathbb{R}^+, a \oplus a' = aa' = a'a = a' \oplus a.$$

(c) Το μηδενικό στοιχείο τού $\mathbb{R}^+$ ως προς τη συγκεκριμένη πράξη είναι το $1 \in \mathbb{R}^+$, αφού

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, a \oplus 1 = a1 = a = 1a = 1 \oplus a.$$

(d) Το αντίθετο τού $a \in \mathbb{R}^+$ είναι το $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}^+$. Πράγματι, το αντίστροφο τού a υπάρχει εφόσον το $a \neq 0$ και

$$a \oplus \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \oplus a.$$

Επιπλέον, ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός των στοιχείων τού $\mathbb{R}$ με τα στοιχεία τού $\mathbb{R}^+$, ικανοποιεί τα τέσσερα υπολειπόμενα αξιώματα, δηλαδή

(e) $\forall r \in \mathbb{R}, \forall a, a' \in \mathbb{R}^+, r \odot (a \oplus a') = (a \oplus a')^r = (aa')^r = a^r a'^r = r \odot a \oplus r \odot a'$.

(f) $\forall r, r' \in \mathbb{R}, \forall a, \in \mathbb{R}^+, (r + r') \odot a = a^{(r+r')} = a^r a^{r'} = r \odot a \oplus r' \odot a$.

(g) $\forall r, r' \in \mathbb{R}, \forall a, \in \mathbb{R}^+, (rr') \odot a = a^{(rr')} = a^{(r'r)} = (a^{r'})^r = r \odot (r' \odot a)$.

(h) $\forall a \in \mathbb{R}^+, 1 \odot a = a^1 = a$.

(iii) Θεωρούμε το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}^+$ μαζί με τις πράξεις

$$\oplus : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, (a, b) \mapsto a \oplus b := ab - 1$$

και

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, (r, a) \mapsto r \odot a := a,$$

όπου ab είναι ο συνήθης πολλαπλασιασμός πραγματικών αριθμών.
Να εξεταστεί αν το σύνολο $\mathbb{R}^+$ αποτελεί έναν $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο με πρόσθεση την πράξη «$\oplus$» και βαθμωτό πολλαπλασιασμό την πράξη «$\odot$».

Λύση (iii) Η αντιστοιχία

$$\oplus : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, (a, b) \mapsto a \oplus b := ab - 1$$

δεν αποτελεί μια «καλά ορισμένη» απεικόνιση, αφού δεν ισχύει $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ ότι και $a \oplus b \in \mathbb{R}^+$. Επί παραδείγματι, αν $a = \frac{1}{2}$ και $b = \frac{1}{2}$, τότε

$$a \oplus b = \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - 1 \notin \mathbb{R}^+.$$

(iv) Να εξεταστεί αν το σύνολο $\mathbb{R}^+$ των θετικών πραγματικών αριθμών εφοδιασμένο με τις γνωστές πράξεις τής πρόσθεσης και τού πολλαπλασιασμού πραγματικών αριθμών (όπου ο πολλαπλασιασμός υπέχει τη θέση τού βαθμωτού πολλαπλασιασμού) αποτελεί έναν $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο.

Λύση (iv) Στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν ορίζεται ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός, αφού το γινόμενο πραγματικού με θετικό πραγματικό δεν είναι πάντοτε ένας θετικός πραγματικός αριθμός.

Οι Ασκήσεις επιλύονται από τους διδάσκοντες Ν.Μαρμαρίδη και Κ. Μέξη στο πλαίσιο τού Μαθήματος Γραμμική Άλγεβρα Ι, α' Εξαμήνου Σπουδών Τμήματος Μαθηματικών, Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Ιωάννινα, Νοέμβριος 2004

2.2 Υπόχωροι

(i) Να δειχθεί ότι καθένα από τα σύνολα $W_1 = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{C}\}$, $W_2 = \{x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{C}\}$ και $W_3 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{C}\}$ αποτελούν $\mathbb{C}$-υποχώρους τού $\mathbb{C}^3$.

Λύση (i) Θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση τού υποσυνόλου $W_1 \subseteq \mathbb{C}^3$. Οι περιπτώσεις των W_2 και W_3 εξετάζονται με τον ίδιο τρόπο.
(1) Το σύνολο W_1 είναι ένα σύνολο διάφορο τού κενού, επί παραδείγματι, το $(0, 0, 0) \in W_1$.
(2) Σύμφωνα με τον ορισμό τού υποχώρου, θα πρέπει να δείξουμε ότι $\forall u = (x_1, x_2, x_3), v = (y_1, y_2, y_3) \in W_1 \Rightarrow u + v \in W_1$. Πράγματι, όταν τα στοιχεία (x_1, x_2, x_3) και (y_1, y_2, y_3) ανήκουν στο σύνολο W_1, τότε $x_1 = 0$ και $y_1 = 0$ και συνεπώς το $(0, x_2, x_3) + (0, y_2, y_3) = (0, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ είναι επίσης στοιχείο τού W_1.
(3) Σύμφωνα με τον ορισμό τού υποχώρου, θα πρέπει να δείξουμε ότι $\forall z \in \mathbb{C}$ και $\forall u = (x_1, x_2, x_3) \in W_1 \Rightarrow zu \in W_1$. Όμως αφού $u = (x_1, x_2, x_3) \in W_1 \Rightarrow x_1 = 0$ και $z(0, x_2, x_3) = (0, zx_2, zx_3) \in W_1$.

(ii) Να εξεταστεί ποια από τα παρακάτω σύνολα αποτελούν υποχώρους τού $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $M_{2\times3}(\mathbb{R})$.

(a) Το σύνολο V_1 των πινάκων τής μορφής $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix}$, όπου $b = a + c$.

(b) Το σύνολο V_2 των πινάκων τής μορφής $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix}$, όπου $c > 0$.

(c) Το σύνολο V_3 των πινάκων τής μορφής $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$, όπου $a = -2c$ και $f = 2e + d$.

Λύση (ii) Θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις (b) και (c). Προτείνουμε να εξετάσει ο αναγνώστης μόνος του την περίπτωση (a).
(b) Το σύνολο $V_2 \subseteq M_{2\times3}(\mathbb{R})$ είναι ένα μη-κενό σύνολο, αφού οποιοσδήποτε 2×3 πίνακας με συνιστώσες $\in \mathbb{R}$, με θετική την $(1, 3)$-συνιστώσα του και μηδενικές τις $(2, 2)$ και $(2, 3)$-συνιστώσες του (επί παραδείγματι, ο $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$) είναι στοιχείο τού V_2. Αν ήταν ο V_2 ένας υπόχωρος τού $M_{2\times3}(\mathbb{R})$, τότε θα περιείχε και το μηδενικό στοιχείο τού $M_{2\times3}(\mathbb{R})$, δηλαδή τον πίνακα $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Όμως η $(1, 3)$-συνιστώσα τού συγκεκριμένου πίνακα δεν είναι θετική, αφού πρόκειται για τον αριθμό 0. Συνεπώς, το V_2 δεν είναι υπόχωρος τού $M_{2\times3}(\mathbb{R})$.
Σημείωση. Εάν W είναι ένας $\mathbb{K}$-υπόχωρος ενός $\mathbb{K}$-χώρου V, τότε αφού δεν είναι το κενό σύνολο θα περιέχει κάποιο $w \in W$. Αλλά τότε και το $(-1)w$ οφείλει να είναι στοιχείο τού W και ως εκ τούτου και το $w + (-1)w = 0$ είναι επίσης στοιχείο τού W. Άρα, εάν ο W είναι ένας $\mathbb{K}$-υπόχωρος ενός $\mathbb{K}$-χώρου V, τότε περιέχει αναγκαστικά το μηδενικό στοιχείο τού V.
(c)
(1) Το $V_3 \subseteq M_{2\times3}(\mathbb{R})$ περιέχει το μηδενικό διάνυσμα $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ τού $M_{2\times3}(\mathbb{R})$ και γι' αυτό είναι διάφορο τού κενού συνόλου.
(2) Έστω ότι $\left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{smallmatrix}\right)$ και $\left(\begin{smallmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \end{smallmatrix}\right)$ είναι στοιχεία τού V_3, τότε $a_1 = -2a_3$, $a_6 =$

$2a_5 + a_4$ και $b_1 = -2b_3, b_6 = 2b_5 + b_4$. Συνεπώς, το άθροισμά τους

$$\begin{pmatrix} -2a_3 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & 2a_5 + a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2b_3 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & 2b_5 + b_4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -2(a_3 + b_3) & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ a_4 + b_4 & a_5 + b_5 & 2(a_5 + b_5) + (a_4 + b_4) \end{pmatrix}$$

είναι επίσης στοιχείο τού V_3.

(3) Έστω ότι λ είναι ένα στοιχείο τού $\mathbb{R}$ και ότι $\left(\begin{smallmatrix} -2a_3 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{smallmatrix}\right)$ είναι ένα στοιχείο τού V_3, τότε το βαθμωτό γινόμενο

$$\lambda \begin{pmatrix} -2a_3 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & 2a_5 + a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda a_3 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ \lambda a_4 & \lambda a_5 & \lambda(2a_5 + a_4) \end{pmatrix}$$

είναι επίσης στοιχείο τού V_3. Συνεπώς, ο V_3 αποτελεί έναν $\mathbb{R}$-υπόχωρο τού $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

(iii) Να δειχθεί με τη βοήθεια ενός αντιπαραδείγματος ότι η συνολοθεωρητική ένωση $W \cup U$ δύο υποχώρων W και U ενός $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου V δεν αποτελεί πάντοτε υπόχωρο τού V.

Λύση (iii) Έστω ο $\mathbb{R}$-χώρος $\mathbb{R}^2$ και οι υπόχωροί του $\mathbb{R}\times\{0\} = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ και $\{0\}\times\mathbb{R} = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$. Ένα στοιχείο $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ανήκει στην ένωση $W = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$ αν και μόνο αν είτε $a = 0$ είτε $b = 0$. Θεωρούμε τα στοιχεία $(1, 0) \in W$ και $(0, 1) \in W$. Εάν το σύνολο W ήταν ένας $\mathbb{R}$-υπόχωρος τού $\mathbb{R}^2$, τότε θα έπρεπε και το άθροισμα $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$ να ήταν επίσης στο W. Αυτό όμως είναι αδύνατο. Συνεπώς, η ένωση W δεν είναι ένας $\mathbb{R}$-υπόχωρος τού W.

(iv) Έστω ο $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ των 2×2 πινάκων με συνιστώσες από τους πραγματικούς αριθμούς και τα ακόλουθα δύο υποσύνολά του:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & c + d \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Να δειχθεί ότι αμφότερα τα σύνολα V και W είναι υπόχωροι τού $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ και να προσδιοριστεί η μορφή των στοιχείων τής τομής $V \cap W$.

Λύση (iv) Προτρέπουμε τον αναγνώστη να αποδείξει μόνος του ότι τα V και W είναι $\mathbb{R}$-υπόχωροι τού $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Ένα στοιχείο $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ τού $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ανήκει στην τομή $V \cap W$, αν και μόνο αν

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix} \text{ και } \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & c + d \end{pmatrix},$$

για κάποια $a, b, c, d \in \mathbb{R}$· δηλαδή αν και μόνο αν $p = 0, r = q$ και $s = 2r$. Συνεπώς, η τομή $V \cap W$ αποτελείται ακριβώς από τούς πίνακες τής μορφής $\begin{pmatrix} 0 & r \\ r & 2r \end{pmatrix}$.

Σημείωση. Υπενθυμίζουμε, ότι η τομή δύο $\mathbb{K}$-υποχώρων ενός $\mathbb{K}$-χώρου V είναι πάντοτε ένας $\mathbb{K}$-υπόχωρος τού V, αφού

(1) $V \cap W \neq \emptyset$, επειδή το $0 \in V \cap W$.

(2) Αν $a, b \in V \cap W$, τότε $a, b \in V$ και $a, b \in W$. Επομένως, $a+b \in V$ και $a+b \in W$ και γι' αυτό $a + b \in V \cap W$.

(3) Τέλος, αν $\lambda \in \mathbb{K}$ και $a \in V \cap W$, τότε $a \in V$, $a \in W$. Επομένως, $\lambda a \in V$ και $\lambda a \in W$ και γι' αυτό $\lambda a \in V \cap W$.

(v) Έστω ένα σύστημα m γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους υπεράνω τού σώματος των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Να εξεταστεί εάν το σύνολο $\mathcal{S}$ των λύσεων τού ανωτέρω συστήματος είναι υπόχωρος τού $\mathbb{R}^n$ στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

(1) Όταν για κάθε i, $1 \leq i \leq m$, $b_i = 0$.
(2) Όταν υπάρχει κάποιο i, $1 \leq i \leq m$, με $b_i \neq 0$.

Υπόδειξη *Να ερμηνευθεί το σύστημα ως μια εξίσωση πινάκων τής μορφής $AX = B$, όπου A είναι ο $m \times n$ πίνακας συντελεστών τού συστήματος, X είναι ο άγνωστος $n \times 1$ πίνακας και B είναι κάποιος σταθερός $m \times 1$ πίνακας.*

Λύση (v) Το ανωτέρω σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση πινάκων

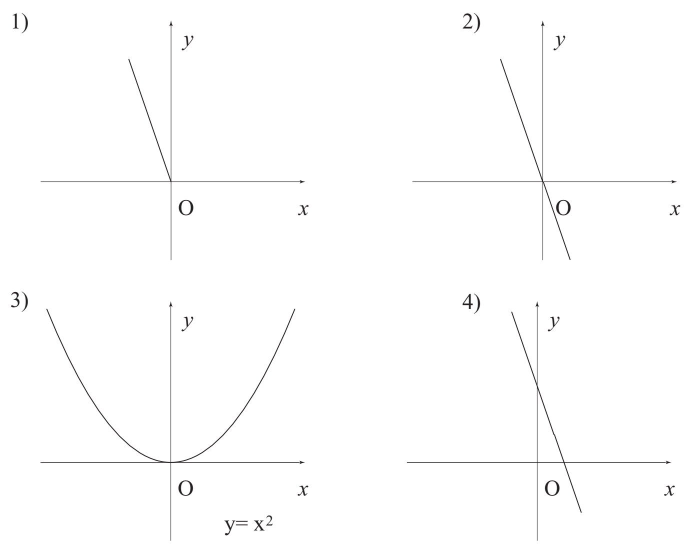
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

με άγνωστο τον $n \times 1$ πίνακα που αποτελείται από τα x_i.
Θέτοντας $A = (a_{ij})$, $X = (x_j)$, $B = (b_i)$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq i \leq n$ έχουμε:

$$AX = B. \tag{$*$}$$

(1) Εάν ο B είναι ο μηδενικός πίνακας $\mathbf{0}$ και οι L_1, L_2 αποτελούν λύσεις τής εξίσωσης $(*)$, δηλαδή $AL_1 = \mathbf{0}$ και $AL_2 = \mathbf{0}$, τότε και ο πίνακας $L_1 + L_2$ είναι λύση τής $(*)$, αφού $A(L_1 + L_2) = AL_1 + AL_2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$.
Επιπλέον, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε λύση L τής $(*)$ έχουμε $A(\lambda L) = \lambda(AL) = \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Ταυτίζοντας το σύνολο των στοιχείων τού $\mathbb{R}^n$ με τους $n \times 1$ πίνακες, διαπιστώνουμε ότι στην προκειμένη περίπτωση το σύνολο των λύσεων S αποτελεί εναν υπόχωρο τού $\mathbb{R}^n$.
(2) Εάν ο $B \neq \mathbf{0}$ και οι L_1, L_2 αποτελούν λύσεις τής εξίσωσης $(*)$, τότε $A(L_1 + L_2) = AL_1 + AL_2 = B + B$. Συνεπώς για να αποτελεί το άθροισμα $L_1 + L_2$ λύση τής $(*)$ θα πρέπει $2B = B$, δηλαδή $B = \mathbf{0}$. Αυτό είναι άτοπο, επομένως το σύνολο των λύσεων S δεν είναι ένας υπόχωρος τού $\mathbb{R}^n$.

(vi) Ποια από τα παρακάτω υποσύνολα τού $\mathbb{R}^2$ είναι $\mathbb{R}$–υπόχωροι τού $\mathbb{R}^2$.



Λύση (vi)
(1) Ας συμβολίσουμε με S_1 το σύνολο των στοιχείων τού $\mathbb{R}^2$ που περιγράφει το γράφημα (1). Παρατηρούμε ότι S_1 αποτελείται από τα ζεύγη $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ με $b \geq 0$. Ας υποθέσουμε ότι το S_1 είναι ένας υπόχωρος τού $\mathbb{R}^2$. Εάν το (a, b) με $b > 0$ ανήκει στο S_1, τότε πρέπει το $-(a, b) = (-a, -b)$ να ανήκει επίσης στο S_1. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού το $-b$ είναι ένας αρνητικός αριθμός.
(2)Ας συμβολίσουμε με S_2 το σύνολο των στοιχείων τού $\mathbb{R}^2$ που περιγράφει το γράφημα (2). Πρόκειται για το σύνολο των στοιχείων τού $\mathbb{R}^2$ τα οποία αποτελούν μια ευθεία γραμμή που διέρχεται από την απαρχή των συντεταγμένων. Κάθε ευθεία γραμμή που διέρχεται από την απαρχή των συντεταγμένων είναι ένας $\mathbb{R}$-υπόχωρος τού $\mathbb{R}^2$.
(3) Ας συμβολίσουμε με S_3 το σύνολο των στοιχείων τού $\mathbb{R}^2$ που περιγράφει το γράφημα (3). Παρατηρούμε ότι S_3 αποτελείται από όλα τα ζεύγη $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ με $b = a^2$. Συνεπώς, η δεύτερη συνιστώσα οποιουδήποτε ζεύγους τού S_3 είναι ίση ή μεγαλύτερη από το μηδέν. Επιχειρηματολογώντας όπως στην περίπτωση (1), διαπιστώνουμε ότι το S_3 δεν είναι ένας υπόχωρος τού $\mathbb{R}^2$.
(4) Ας συμβολίσουμε με S_4 το σύνολο των στοιχείων τού $\mathbb{R}^2$ που περιγράφει το γράφημα (4). Πρόκειται για το σύνολο των στοιχείων τού $\mathbb{R}^2$ τα οποία αποτελούν μια ευθεία γραμμή που ***δεν διέρχεται*** από την απαρχή των συντεταγμένων. Με άλλα λόγια το S_4 δεν περιέχει το μηδενικό στοιχείο $(0, 0)$ τού $\mathbb{R}^2$. Επομένως, το S_4 δεν είναι ένας $\mathbb{R}$-υπόχωρος τού $\mathbb{R}^2$.

Ορισμός Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $m{\times}m$ πίνακας με συνιστώσες από ένα σώμα $\mathbb{K}$. (Υπενθυμίζουμε : $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ή $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.)
Ο πίνακας A ονομάζεται *συμμετρικός* αν $\forall i, j, 1 \leq i, j \leq m, a_{ij} = a_{ji}$, δηλαδή αν ${}^tA = A$.
Ο πίνακας A ονομάζεται *αντισυμμετρικός* αν $\forall i, j, 1 \leq i, j \leq m, a_{ij} = -a_{ji}$, δηλαδή αν ${}^tA = -A$.

(vii) Να προσδιοριστούν όλοι οι $m \times m$ πίνακες που είναι συγχρόνως συμμετρικοί και αντισυμμετρικοί.

Λύση (vii)
Έστω A ένας $m \times m$ πίνακας που είναι συγχρόνως συμμετρικός ($A = {}^tA$) και αντισυμμετρικός (${}^tA = -A$). Τότε, $A = -A$ και γι' αυτό $2A = \mathbf{0}$. Άρα, $A = \mathbf{0}$.

(viii) Να επαληθεύσετε ότι για κάθε $m \times m$ πίνακα A ισχύει η σχέση

$$A = \frac{1}{2}\left[\left(A + {}^tA\right) + \left(A - {}^tA\right)\right]$$

και ακολούθως να εξετάσετε εάν το σύνολο $\mathcal{S}$ (αντιστοίχως $\mathcal{T}$) των $m \times m$ συμμετρικών (αντιστοίχως αντισυμμετρικών) πινάκων είναι ένας $\mathbb{K}$–υπόχωρος τού $\mathbb{K}$–διανυσματικού χώρου $M_{m\times m}(\mathbb{K})$ των $m \times m$ πινάκων με συνιστώσες από το $\mathbb{K}$

Λύση (viii)

$$\frac{1}{2}\left[(A + {}^tA) + (A - {}^tA)\right] = \frac{1}{2}\left(A + {}^tA + A - {}^tA\right) = \frac{1}{2}(2A) = A.$$

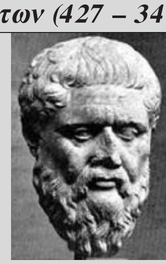
Προτείνουμε στον αναγνώστη να διαπιστώσει μόνος του ότι αμφότερα τα σύνολα $\mathcal{S}$ και $\mathcal{T}$ είναι $\mathbb{K}$-υπόχωροι τού $M_{m\times m}(\mathbb{K})$.

Οι Ασκήσεις επιλύονται από τους διδάσκοντες Ν.Μαρμαρίδη και Κ. Μέξη στο πλαίσιο τού Μαθήματος Γραμμική Άλγεβρα Ι, α' Εξαμήνου Σπουδών Τμήματος Μαθηματικών, Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Ιωάννινα, Νοέμβριος 2004

Τι είπαν οι Φιλόσοφοι για τα Μαθηματικά

Πλάτων (427 – 347 π.Χ.)



Η αργή εξέλιξη τής Στερεομετρίας με οδήγησε στο να αντιπαρέλθω τον συγκεκριμένο κλάδο.

2.3 Γραμμικώς ανεξάρτητα Διανύσματα – Παραγόμενοι Υπόχωροι

(i) Να εξεταστεί εάν τα διανύσματα $u = (2, -1, 1)$, $v = (0, 2, -1)$ και $w = (1, -1, 0)$ τού $\mathbb{R}^3$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς εξαρτημένα.

Λύση (i)
Θα εξετάσουμε για ποιές τιμές των $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, ισχύει η σχέση:

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0_{\mathbb{R}^3}. \qquad (*)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των u, v, w στην $(*)$ παίρνουμε:

$$\begin{gathered}\lambda_1(2, -1, 1) + \lambda_2(0, 2, -1) + \lambda_3(1, -1, 0) = \\ (2\lambda_1 + \lambda_3, -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2) = (0, 0, 0).\end{gathered}$$

Επομένως, η ανωτέρω σχέση είναι αληθής, αν και μόνο αν

$$\begin{array}{rrrl} 2\lambda_1 & & +\lambda_3 & = 0 \\ -\lambda_1 & +2\lambda_2 & -\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & & = 0 \end{array}. \qquad (**)$$

Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα τού συστήματος

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Με αφετηρία τον ανωτέρω πίνακα και εκτελώντας την ακολουθία μετασχηματισμών

$$\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_3, \Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_1, \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1, \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_2, \Gamma_3 \to \frac{1}{3}\Gamma_3$$

προκύπτει τελικώς ο γραμμοϊσοδύναμος πίνακας

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

που χορηγεί το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{array}{rrrl} \lambda_1 & -\lambda_2 & & = 0 \\ & \lambda_2 & -\lambda_3 & = 0 \\ & & \lambda_3 & = 0 \end{array}.$$

Πρόκειται για ένα σύστημα ισοδύναμο τού $(**)$ με μοναδική λύση, ως προς $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, τη μηδενική. Συνεπώς τα διανύσματα u, v, w είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητα.

Σημείωση. Στην περίπτωση ομογενών συστημάτων, όπως το ανωτέρω, δεν είναι απαραίτητος ο σχηματισμός τού επαυξημένου πίνακα τού συστήματος, αφού ο πίνακας των σταθερών ισούται με μηδέν. Με άλλα λόγια κάθε μετασχηματισμός επί των γραμμών τού πίνακα των συντελεστών ενός ομογενούς συστήματος χορηγεί ισοδύναμο ομογενές σύστημα.

(ii) Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $u = (2, 1, -4)$, $v = (-1, 3, 2)$ και $w = (3, 1, -6)$ τού $\mathbb{R}^3$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς εξαρτημένα και να ευρεθεί μια σχέση εξάρτησής τους.

Λύση (ii)
Θα εξετάσουμε για ποιές τιμές των $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, ισχύει η σχέση:

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0_{\mathbb{R}^3}. \tag{$*$}$$

Εάν διαπιστώσουμε ότι υπάρχει μια τριάδα $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$ που ικανοποιεί την $(*)$, τότε τα u, v, w είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς εξαρτημένα.
Λαμβάνοντας υπόψιν τις συγκεκριμένες τιμές των u, v, w, η $(*)$ είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\begin{array}{rrrl} 2\lambda_1 & -\lambda_2 & +3\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 & +3\lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \\ -4\lambda_1 & +2\lambda_2 & -6\lambda_3 & = 0 \end{array}. \tag{$**$}$$

Ο επαυξημένος πίνακας τού συστήματος είναι:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -6 & 0 \end{array}\right).$$

Με αφετηρία τον ανωτέρω πίνακα και εκτελώντας την ακολουθία μετασχηματισμών

$$\Gamma_3 \to \frac{1}{2}\Gamma_3,\ \Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2,\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2,\ \Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1,\ \Gamma_2 \to -\frac{1}{7}\Gamma_2$$

προκύπτει τελικώς ο γραμμοϊσοδύναμος πίνακας

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

που χορηγεί το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{array}{rrrl} \lambda_1 & +3\lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \\ & \lambda_2 & -\frac{1}{7}\lambda_3 & = 0 \end{array}.$$

Πρόκειται για ένα σύστημα ισοδύναμο τού $(**)$ με χώρο λύσεων

$$\mathcal{S} = \left\{\left(-\frac{10}{7}\kappa,\ \frac{1}{7}\kappa,\ \kappa\right) \mid \kappa \in \mathbb{R}\right\}.$$

Οποιαδήποτε πραγματική τιμή τού κ χορηγεί μια τριάδα $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, η οποία ικανοποιεί την $(*)$. Έτσι επιλέγοντας $\kappa = 7$ παίρνουμε την ακόλουθη σχέση γραμμικής εξάρτησης:

$$-10u + v + 7w = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

(iii) Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $u = (1, 2, 3)$, $v = (0, 1, 2)$ και $w = (0, 0, 1)$ τού $\mathbb{R}^3$ παράγουν τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$.

Λύση (iii)
Θα αποδείξουμε ότι κάθε διάνυσμα $z = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ γράφεται ως $\mathbb{R}$-γραμμικός συνδυασμός των u, v, w. Με άλλα λόγια θα αποδείξουμε ότι αν $z = (\alpha, \beta, \gamma)$ είναι οποιοδήποτε διάνυσμα τού $\mathbb{R}^3$, τότε υπάρχουν κατάλληλοι συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ (εξαρτώμενοι από το z), τέτοιοι ώστε:

$$z = \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w.$$

Δηλαδή,

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \lambda_1(1, 2, 3) + \lambda_2(0, 1, 2) + \lambda_3(0, 0, 1).$$

Η ανωτέρω σχέση είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\begin{array}{cccl} \lambda_1 & & & = \alpha \\ 2\lambda_1 & +\lambda_2 & & = \beta \\ 3\lambda_1 & & +\lambda_3 & = \gamma \end{array},$$

οι λύσεις τού οποίου είναι οι $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = \beta - 2\alpha$, $\lambda_3 = \gamma - 3\alpha$. Επομένως,

$$z = (\alpha, \beta, \gamma) = \alpha(1, 2, 3) + (\beta - 2\alpha)(0, 1, 2) + (\gamma - 3\alpha)(0, 0, 1).$$

(iv) Για ποια τιμή τού $k \in \mathbb{R}$, είναι το διάνυσμα $u = (1, -2, k)$ ένας $\mathbb{R}$-γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $v = (3, 0, -2)$ και $w = (2, 1, -5)$;

Λύση (iv)
Θα πρέπει

$$u = \lambda_1 v + \lambda_2 w, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή,

$$(1, -2, k) = \lambda_1(3, 0, -2) + \lambda_2(2, 1, -5).$$

Η ανωτέρω σχέση είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\begin{array}{ccl} 3\lambda_1 & +2\lambda_2 & = 1 \\ & \lambda_2 & = -2 \\ -2\lambda_1 & -5\lambda_2 & = k \end{array},$$

οι λύσεις τού οποίου ως προς λ_1, λ_2 και k είναι οι $\lambda_1 = \frac{5}{3}$, $\lambda_2 = -2$ και $k = \frac{20}{3}$.

(v) Έστω V ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος και u, v δύο $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματά του.
Να δειχθεί ότι $\forall a \in \mathbb{R}$, το διάνυσμα $(2 + a)u + (1 + a^2)v$ είναι διάφορο τού μηδενικού διανύσματος 0_V.

Λύση (v)
Εάν ήταν $(2 + a)u + (1 + a^2)v = 0_V$, τότε θα είχαμε $2 + a = 0$ και $1 + a^2 = 0$, εφόσον τα u, v είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητα. Αλλά για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το $1 + a^2 > 0$, επομένως το $(2 + a)u + (1 + a^2)v$ είναι πάντοτε διάφορο τού 0_V.

(vi) Έστω ο διανυσματικός χώρος $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ των $n\times n$ πινάκων με συνιστώσες από ένα σώμα $\mathbb{K}$, όπου $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ή $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Εάν οι πίνακες $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ είναι $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητοι και ο πίνακας $P \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ είναι αντιστρέψιμος, να δειχθεί ότι οι πίνακες $P^{-1}AP$, $P^{-1}BP$ και $P^{-1}CP$ είναι επίσης $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητοι.

Λύση (vi)
Έστω ότι για κάποια $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ έχουμε

$$\lambda_1(P^{-1}AP) + \lambda_2(P^{-1}BP) + \lambda_3(P^{-1}CP) = \mathbf{0}. \tag{$*$}$$

(Υπενθυμίζουμε ότι με $\mathbf{0}$ παριστάνουμε τον μηδενικό $n \times n$ πίνακα.) Η σχέση $(*)$ γράφεται:

$$P^{-1}(\lambda_1 A)P + P^{-1}(\lambda_2 B)P + P^{-1}(\lambda_3 C)P = P^{-1}(\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C)P = \mathbf{0}. \tag{$**$}$$

Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση $(**)$ από τα αριστερά με τον πίνακα P και από τα δεξιά με τον πίνακα P^{-1} προκύπτει η σχέση

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C = P\mathbf{0}P^{-1} = \mathbf{0}.$$

Συνεπώς, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, αφού οι πίνακες A, B, C είναι $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητοι.

(vii) (a) Να δειχθεί ότι για κάθε πίνακα $A = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ισχύει η σχέση $A^2 - (\alpha+\delta)A + (\det A)I_2 = \mathbf{0}$.

(b) Να συμπεράνετε ότι οι πίνακες A^2, A και I_2 είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς εξαρτημένοι.

(c) Να δείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, οι πίνακες A^n, A^{n-1} και A^{n-2} είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς εξαρτημένοι.

Λύση (vii)
(a)
Έστω ένας 2×2 πίνακας $A = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}A^2 - (\alpha+\delta)A + (\det A)I_2 &= \begin{pmatrix}\alpha^2+\beta\gamma & \alpha\beta+\beta\delta\\ \alpha\gamma+\delta\gamma & \gamma\beta+\delta^2\end{pmatrix} - (\alpha+\delta)\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} +\\ (\alpha\delta-\beta\gamma)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{$*$}$$

(b)
Η σχέση $(*)$, ορίζει μια σχέση $\mathbb{R}$-γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των A^2, A και $I_2 = A^0$, αφού τουλάχιστον ένας των συντελεστών τής $(*)$ είναι μη-μηδενικός. (Πρόκειται για τον συντελεστή «1» τού A^2.)
(c)
Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση $(*)$ από τα δεξιά με τον πίνακα A^{n-2} έπεται

$$A^n - (\alpha+\delta)A^{n-1} + (\det A)A^{n-2} = \mathbf{0}.$$

Συνεπώς, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, το σύνολο $\{A^n, A^{n-1}, A^{n-2}\}$ είναι ένα $\mathbb{K}$-γραμμικώς εξαρτημένο σύνολο.

(viii) Έστω $\mathcal{F}$ ο $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος των πραγματικών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα τρία διανύσματα τού $\mathcal{F}$

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x, \quad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x, \quad f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$$

είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητα.

(b) Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα δύο διανύσματα τού $\mathcal{F}$

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x) - \cos(x), \quad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -3\sin(x) + \cos(x)$$

είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητα.

(c) Να εξεταστεί εάν τα ακόλουθα δύο διανύσματα τού $\mathcal{F}$

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2^{x+1} - 3^x, \quad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -2^x + \frac{3^x}{2}$$

είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητα.

Λύση (viii)

(a)

Συμβολίζουμε με $\zeta_{\mathcal{F}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ το μηδενικό στοιχείο τού $\mathbb{R}$-χώρου $\mathcal{F}$, δηλαδή τη συνάρτηση $r \mapsto \zeta_{\mathcal{F}}(r) = 0, \forall r \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = \zeta_{\mathcal{F}}$ όπου $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \in \mathbb{R}$. Σύμφωνα με τον ορισμό ισότητας συναρτήσεων έχουμε:

$$\forall r \in \mathbb{R}, (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(r) = \lambda_1 r + \lambda_2 e^r + \lambda_3 \sin(r) = \zeta_{\mathcal{F}}(r) = 0. \qquad (*)$$

Σημείωση. Υπενθυμίζουμε ότι δύο απεικονίσεις (συναρτήσεις) $f : A \to B$ και $g : C \to D$ είναι ίσες, αν και μόνο αν $A = C, B = D$ και $\forall a \in A, f(a) = g(a)$.

Εφόσον, η σχέση $(*)$ ισχύει $\forall r \in \mathbb{R}$, θα ισχύει και για τις ακόλουθες τρεις τιμές $r_1 = 0, r_2 = \frac{\pi}{2}$ και $r_3 = \pi$. Υπολογίζοντας τις τιμές τής συνάρτησης που δίνεται από τη σχέση $(*)$ επί των r_1, r_2 και r_3 παίρνουμε τις ακόλουθες τρεις σχέσεις:

$$\lambda_1 0 + \lambda_2 1 + \lambda_3 0 = 0,$$
$$\lambda_1 \frac{\pi}{2} + \lambda_2 e^{\frac{\pi}{2}} + \lambda_3 1 = 0,$$
$$\lambda_1 \pi + \lambda_2 e^{\pi} + \lambda_3 0 = 0.$$

Από την πρώτη προκύπτει ότι $\lambda_1 = 0$, από την δεύτερη ότι $\lambda_2 = 0$ και από την τρίτη ότι $\lambda_3 = 0$. Συνεπώς, οι συγκεκριμένες τρεις συναρτήσεις, δηλαδή οι f_1, f_2 και f_3 είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητες.

(b)

Η μέθοδος επίλυσης τού παρόντος ερωτήματος είναι παρόμοια με εκείνη τού (a) και γι' αυτό προτείνουμε στον αναγνώστη να απαντήσει στο ερώτημα με τις κατ' ιδίαν δυνάμεις.

(c)

Εάν οι f_1 και f_2 είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς εξαρτημένες, τότε θα υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = \zeta_{\mathcal{F}}$. Επειδή αμφότερες οι f_1, f_2 είναι $\neq \zeta_{\mathcal{F}}$, έπεται ότι $\lambda_1 \neq 0$ και $\lambda_2 \neq 0$. Έτσι, οι f_1 και f_2 είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς εξαρτημένες, αν και μόνο αν υπάρχει ένα μη-μηδενικό στοιχείο $\lambda \in \mathbb{R}$ με $f_1 = \lambda f_2$. Πράγματι, επιλέγοντας $\lambda = -2$, έχουμε $\forall r \in \mathbb{R}, 2^{r+1} - 3^r = (-2)(-2^r + \frac{3^r}{2})$. Συνεπώς, οι f_1, f_2 είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς εξαρτημένες.

(ix) Έστω ότι V είναι ο $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος $\mathbb{K}^4 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_i \in \mathbb{K}, i = 1, \ldots, 4\}$, όπου $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ή $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και ότι

$$\mathcal{T}(a) = \{(a, 0, a, 0), (0, a, 0, a), (a, a, 0, a), (0, 0, a, a) \mid a \in \mathbb{K}\} \subset V,$$

όπου a είναι ένας σταθερός αριθμός στο $\mathbb{K}$.

(a) Να δειχθεί ότι για οποιοδήποτε $a \in \mathbb{K}, a \neq 0$ το σύνολο $\mathcal{T}(a)$ είναι ένα σύνολο $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων.

(b) Να δειχθεί ότι για οποιοδήποτε $a \in \mathbb{K}, a \neq 0$ το σύνολο $\mathcal{T}(a)$ παράγει τον χώρο V.

Λύση (ix)
Προτείνουμε στον αναγνώστη να επιλύσει μόνος του τη συγκεκριμένη άσκηση.

(x) Να δειχθεί ότι τα διανύσματα 1 και i, όπου $i^2 = -1$, τού $\mathbb{R}$- διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητα.

Λύση (x)
Θα προσδιορίσουμε τις τιμές των $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ και $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 1 + \lambda_2 i = 0_{\mathbb{C}}$. Όμως, από τα σχολικά μαθηματικά είναι γνωστό ότι ένας μιγαδικός αριθμός $a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ ισούται με το μηδενικό στοιχείο τού $\mathbb{C}$, αν και μόνον αν $a = b = 0$.

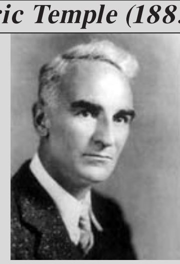
(xi) Να δειχθεί ότι τα διανύσματα 1 και i, όπου $i^2 = -1$, τού $\mathbb{C}$- διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς εξαρτημένα.

Λύση (xi)
Θα ασχοληθούμε με τις τιμές των $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ και $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ με $\lambda_1 1 + \lambda_2 i = 0_{\mathbb{C}}$, $(*)$. Οι μη-μηδενικές τιμές $\lambda_1 = -i$ και $\lambda_2 = 1$ ικανοποιούν την $(*)$· συνεπώς το $\{1, i\}$ είναι ένα σύνολο $\mathbb{C}$-γραμμικώς εξαρτημένων διανυσμάτων.

Σημείωση. Η παρούσα και η αμέσως προηγούμενη άσκηση καταδεικνύουν τη σημασία που έχει το σύνολο των βαθμωτών. Το $\{1, i\} \subset \mathbb{C}$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητο, αλλά $\mathbb{C}$-γραμμικώς εξαρτημένο.

Τι ειπαν οι Μαθηματικοι για τα Μαθηματικα

Bell, Eric Temple (1883 – 1960)



Ο Ευκλείδης μού δίδαξε ότι χωρίς υποθέσεις δεν υπάρχουν αποδείξεις. Γι' αυτό οφείλουμε να εξετάζουμε τις υποθέσεις οποιουδήποτε επιχειρήματος.

Οι Ασκήσεις επιλύονται από τους διδάσκοντες Ν.Μαρμαρίδη και Κ. Μέξη στο πλαίσιο τού Μαθήματος Γραμμική Άλγεβρα Ι, α' Εξαμήνου Σπουδών Τμήματος Μαθηματικών, Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Ιωάννινα, Νοέμβριος 2004

2.4 Βάσεις

(i) Έστω ο υπόχωρος $V = \{(a, b, c, d) \mid d = a + b\}$ τού $\mathbb{K}^4$. Να προσδιοριστεί μια $\mathbb{K}$-βάση και η διάσταση τού V.

Λύση (i)
Λόγω τής συνθήκης $d = a + b$, ο χώρος V αποτελείται ακριβώς από τις τετράδες $(a, b, c, a + b)$.
Εάν $z = (a, b, c, a + b) \in V$, τότε

$$z = a(1, 0, 0, 1) + b(0, 1, 0, 1) + c(0, 0, 1, 0).$$

Παρατηρούμε ότι το σύνολο

$$U = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}$$

είναι υποσύνολο τού V και ότι κάθε στοιχείο τού V είναι $\mathbb{K}$-γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων τού U. Για να αποτελεί βάση το U θα πρέπει να είναι επίσης ένα $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο. Πράγματι, εάν

$$(0, 0, 0, 0) = \lambda_1(1, 0, 0, 1) + \lambda_2(0, 1, 0, 1) + \lambda_3(0, 0, 1, 0) =$$
$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2), \quad \lambda_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, 3,$$

τότε έπεται αμέσως ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Άρα το U είναι ένα $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο στοιχείων τού V και ως εκ τούτου αποτελεί μια βάση τού V.

(ii) Έστω ο υπόχωρος $V = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0\}$ τού $\mathbb{K}^3$. Να εξεταστεί αν καθένα από τα ακόλουθα δύο υποσύνολα τού V αποτελούν $\mathbb{K}$-βάση τού V.

(a) $\{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$, (b) $\{(1, 1, -2), (0, 3, -3)\}$.

Λύση (ii)
Θα προσδιορίσουμε πρώτα την $\mathbb{K}$-διάσταση τού V, αφού αν γνωρίζουμε ότι αυτή είναι $n < \infty$, τότε κάθε γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο τού V με n στοιχεία είναι και βάση τού V.

Σύμφωνα με τον ορισμό τού V, ένα στοιχείο $z = (a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ ανήκει στον V, αν και μόνο αν $a + b + c = 0$, δηλαδή αν και μόνο αν $c = -(a + b)$. Επομένως, τα διανύσματα τού V είναι ακριβώς τα διανύσματα τού $\mathbb{K}^3$ τής μορφής $(a, b, -(a + b))$. Παρατηρούμε ότι

$$(a, b, -(a + b)) = a(1, 0, -1) + b(0, 1, -1),$$

όπου τα $(1, 0, -1)$ και $(0, 1, -1)$ είναι στοιχεία τού V. Επομένως, κάθε $z \in V$ είναι ένας $\mathbb{K}$-γραμμικός συνδυασμός των $(1, 0, -1)$ και $(0, 1, -1)$. Επιπλέον, το σύνολο που αποτελείται από τα $(1, 0, -1)$ και $(0, 1, -1)$ είναι ένα $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο, αφού η σχέση $\lambda_1(1, 0, -1)+\lambda_2(0, 1, -1) = (0, 0, 0)$ ισχύει αν και μόνο αν $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = 0$. Άρα, $\dim_{\mathbb{K}} V = 2$.
(a) Από τις ανωτέρω παρατηρήσεις προκύπτει ότι για να αποδείξουμε ότι το υποσύνολο $\{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\} \subseteq V$ είναι μια βάση τού V, αρκεί να

αποδείξουμε την $\mathbb{K}$-γραμμική ανεξαρτησία του.
Πράγματι, αν

$$\lambda_1(1, -1, 0) + \lambda_2(0, 1, -1) = (0, 0, 0), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \quad \text{τότε}$$
$$(\lambda_1, -\lambda_1 + \lambda_2, -\lambda_2) = (0, 0, 0)$$

από όπου προκύπτει αμέσως ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
(b) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την προγούμενη και γι' αυτό προτείνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

(iii) Έστω ο ακόλουθος υπόχωρος τού $\mathbb{K}^n$

$$V = \{(a_1, a_2, \ldots a_n) \mid k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_n a_n = 0\},$$

όπου $k_1, k_2, \ldots, k_n$ είναι κάποιοι συγκεκριμένοι αριθμοί από το $\mathbb{K}$. Να προσδιοριστεί μια $\mathbb{K}$-βάση και η διάσταση τού V.

Λύση (iii)
(1) Εάν όλοι οι συντελεστές $k_1, k_2, \ldots, k_n$ είναι ίσοι με μηδέν, τότε κάθε στοιχείο τού $\mathbb{K}^n$ ανήκει στον υπόχωρο V. Άρα, $V = \mathbb{K}^n$ και οποιαδήποτε βάση τού $\mathbb{K}^n$ είναι και βάση τού V.
(2) Εάν κάποιος από τους συντελεστές $k_1, k_2, \ldots, k_n$ δεν είναι ίσος με μηδέν, ας πούμε ο k_ℓ, όπου ℓ είναι κάποιος συγκεκριμένος δείκτης μεταξύ των $1, 2, \ldots, n$, τότε ο V είναι ένας γνήσιος υπόχωρος τού $\mathbb{K}^n$, αφού το στοιχείο e_ℓ δεν ανήκει στο V. (Το e_ℓ είναι το διάνυσμα τού V που όλες οι συνιστώσες του είναι ίσες με μηδέν εκτός από την ℓ-συνιστώσα του η οποία ισούται με 1.)
Θεωρούμε τα $n-1$ το πλήθος διανύσματα

$$v_i = (s_{i1}, \ldots, s_{ij}, \ldots, s_{in}) \in \mathbb{K}^n, 1 \leq i \leq n, \ i \neq \ell,$$

όπου

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{όταν } j = i, \\ -k_i(k_\ell)^{-1}, & \text{όταν } j = \ell, \\ 0, & \text{όταν } j \neq i \text{ και } j \neq \ell \end{cases}.$$

Για κάθε i, $1 \leq i \leq n, \ i \neq \ell$, τα διανύσματα v_i ανήκουν στον V, αφού

$$\sum_{j=1}^{n} k_j s_{ij} = k_i 1 + k_\ell(-k_i(k_\ell)^{-1}) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα v_i είναι $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητα.
Πράγματι, αν

$$\sum_{i=1, i\neq\ell}^{n} \lambda_i v_i = 0_{\mathbb{K}^n},$$

τότε

$$\sum_{i=1,\ i\neq\ell}^{n} \lambda_i v_i = (\lambda_1, \ldots \lambda_{\ell-1}, -\sum_{i=1, i\neq\ell}^{n} \lambda_i k_i (k_\ell)^{-1}, \lambda_{\ell+1}, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0).$$

Επομένως,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{\ell-1} = \lambda_{\ell+1} = \cdots = \lambda_n = 0$$

και γι' αυτό το σύνολο των $v_i, 1 \leq i \leq n, i \neq \ell$, είναι ένα $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο.
Ισχυριζόμαστε ότι ο αριθμός $n-1$ είναι το μέγιστο πλήθος των γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων τού V. Πράγματι, αν ο V διέθετε n το πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα, τότε αυτά θα αποτελούσαν βάση τού $\mathbb{K}^n$ και ο V θα συνέπιπτε με τον $\mathbb{K}^n$, πράγμα αδύνατο.
Άρα, το σύνολο $\{v_i \mid 1 \leq i \leq n, i \neq \ell\}$ αποτελεί μια βάση τού V και η διάσταση τού V ισούται με $n-1$.

(iv) Για ποιες τιμές τού $k \in \mathbb{K}$, αποτελεί το σύνολο $\{(k, 1, 1), (1, k, 1), (1, 1, k)\}$ μια $\mathbb{K}$-βάση τού $\mathbb{K}^3$;

Λύση (iv)
Ο χώρος $\dim \mathbb{K}^3$ έχει $\mathbb{K}$-διάσταση 3. Επομένως, το S είναι μια βάση τού $\mathbb{K}^4$ αν και μόνο αν είναι $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητο. Δηλαδή, αν και μόνο αν η σχέση

$$\lambda_1(k, 1, 1) + \lambda_2(1, k, 1) + \lambda_3(1, 1, k) = (0, 0, 0)$$

είναι αληθής μόνο για $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Με άλλα λόγια, αν και μόνο αν το σύστημα

$$\begin{array}{rrrl} k\lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 & +k\lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \end{array}$$

έχει τη μοναδική λύση $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα τού συστήματος

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \end{array}\right).$$

Με αφετηρία τον ανωτέρω πίνακα και εκτελώντας την ακολουθία μετασχηματισμών

$$\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_3, \Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1, \Gamma_3 \to \Gamma_3 - k\Gamma_1, \Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2,$$

προκύπτει τελικώς ο γραμμοϊσοδύναμος πίνακας

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & 0 \end{array}\right)$$

και το αντίστοιχο ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{array}{rrrl} \lambda_1 & +\lambda_2 & +k\lambda_3 & = 0 \\ & (k-1)\lambda_2 & +(1-k)\lambda_3 & = 0 \\ & & (2-k-k^2)\lambda_3 & = 0 \end{array}.$$

Το σύστημα έχει μη-μηδενικές λύσεις, αν και μόνο αν είτε η μία είτε και οι δύο τελευταίες εξισώσεις του έχουν μηδενικούς συντελεστές· δηλαδή αν και μόνο αν είτε $k - 1 = 0$ είτε $2 - k - k^2 = 0$. Επομένως, το σύστημα έχει μη-μηδενικές λύσεις, αν και μόνο αν είτε $k = 1$ είτε $k = -2$.
Άρα, για κάθε τιμή τού $k \in \mathbb{K}$, $k \neq 1, -2$, το σύνολο $\mathcal{S}$ αποτελεί μια βάση τού $\mathbb{K}^3$.

(v) Έστω $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ μια $\mathbb{R}$-βάση τού $\mathbb{R}^3$. Για ποιες τιμές τού z αποτελεί το σύνολο $C = \{v_1 + z, v_2, v_3\}$ επίσης μια $\mathbb{R}$-βάση τού $\mathbb{R}^3$;

Λύση (v)
Το C ***δεν αποτελεί*** μια βάση τού $\mathbb{R}^3$, αν και μόνο αν το είναι C ένα $\mathbb{R}$-γραμμικώς εξαρτημένο σύνολο. Με άλλα λόγια, αν και μόνο αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, όχι όλα ίσα με μηδέν, έτσι ώστε

$$\lambda_1(v_1 + z) + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}. \qquad (*)$$

Παρατηρούμε ότι στην ανωτέρω σχέση το λ_1 οφείλει να είναι ένα μη-μηδενικό στοιχείο τού $\mathbb{R}$, αφού αν $\lambda_1 = 0$, τότε τα λ_2 και λ_3 είναι ίσα με μηδέν επειδή τα v_2, v_3 είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητα. Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda_1 \neq 0$. Τώρα, η σχέση $(*)$ γράφεται

$$v_1 + z = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) v_2 + \left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right) v_3.$$

Συνεπώς, για κάθε $z \neq -v_1 + av_2 + bv_3$, $a, b \in \mathbb{R}$ το $C = \{v_1 + z, v_2, v_3\}$ είναι μια βάση τού $\mathbb{R}^3$.

(vi) Έστω V ένας τετραδιάστατος $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος και $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ μια βάση του.

(a) Να δειχθεί ότι το σύνολο $\mathcal{B}' = \{v_2, v_3, v_4, v_1\}$ είναι επίσης μια βάση τού V.

(b) Έστω ότι οι συνιστώσες ενός διανύσματος $v \in V$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι οι $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$. Ποιες είναι οι συνιστώσες τού v ως προς τη βάση $\mathcal{B}'$;

Λύση (vi)
(a)
Επειδή το $\mathcal{B}'$ έχει τέσσερα στοιχεία, είναι επαρκές να αποδείξουμε ότι το $\mathcal{B}'$ είναι $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητο.
Εάν $\lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_3 + \lambda_3 v_4 + \lambda_4 v_1 = 0_{\mathbb{K}^3}$, τότε λόγω τής μεταθετικότητας τής πρόσθεσης έπεται $\lambda_4 v_1 + \lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_3 + \lambda_3 v_4 = 0_{\mathbb{K}^3}$ και επειδή το $\mathcal{B}$ είναι $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητο έχουμε $\lambda_i = 0, \forall i, 1 \leq i \leq 4$.
(b)
Αν οι συνιστώσες τού v ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι οι $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, δηλαδή αν $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4$, τότε $v = \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 + \lambda_1 v_1$ και οι συνιστώσες τού v ως προς την $\mathcal{B}'$ είναι οι $(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_1)$.
Σημείωση. Προτείνουμε στον αναγνώστη να επαναλάβει την άσκηση υπολογίζοντας πρώτα τον πίνακα μετάβασης $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ από την $\mathcal{B}'$ στην $\mathcal{B}$ και εν συνεχεία πολλαπλασιάζοντας από τα δεξιά τον $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ με το 4×1 διάνυσμα που έχει ως συνιστώσες τις συνιστώσες τού v ως προς τη βάση $\mathcal{B}$. Ο 4×1 πίνακας που προκύπτει συνίσταται από τις συνιστώσες τού v ως προς τη βάση $\mathcal{B}'$

(vii) Έστω ο χώρος $\mathbb{R}^3$ και οι ακόλουθες τρεις $\mathbb{R}$-βάσεις του:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 &= \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\},\\
\mathcal{B}_2 &= \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), (0,1,0), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}\\
\mathcal{B}_3 &= \{(1,1,1),(1,-1,0),(1,1,-2)\}.
\end{aligned}$$

Να προσδιοριστούν οι ακόλουθοι πίνακες μετάβασης:

(a) P_{12}, από τη βάση $\mathcal{B}_1$ στη βάση $\mathcal{B}_2$.

(b) P_{21}, από τη βάση $\mathcal{B}_2$ στη βάση $\mathcal{B}_1$.

(c) P_{13}, από τη βάση $\mathcal{B}_1$ στη βάση $\mathcal{B}_3$.

(d) P_{31}, από τη βάση $\mathcal{B}_3$ στη βάση $\mathcal{B}_1$.

(e) P_{23}, από τη βάση $\mathcal{B}_2$ στη βάση $\mathcal{B}_3$.

(f) P_{32}, από τη βάση $\mathcal{B}_3$ στη βάση $\mathcal{B}_2$.

(g) Έστω $v \in \mathbb{R}^3$ με συνιστώσες (a, b, c) ως προς τη βάση $\mathcal{B}_1$. Να προσδιοριστούν οι συνιστώσες τού v ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_2$ και $\mathcal{B}_3$.

(h) Έστω $v \in \mathbb{R}^3$ με συνιστώσες (a, b, c) ως προς τη βάση $\mathcal{B}_3$. Να προσδιοριστούν οι συνιστώσες τού v ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_1$ και $\mathcal{B}_2$.

Λύση (vii)

(a)

Για κάθε $i, 1 \leq i \leq 3$, η i-οστή στήλη τού πίνακα μετάβασης P_{12} αποτελείται από τις συνιστώσες τού i-οστού στοιχείου τής $\mathcal{B}_2$, όταν αυτό εκφράζεται ως $\mathbb{R}$-γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων τής βάσης $\mathcal{B}_1$. Συνεπώς, έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,0) + 0(0,1,0) + \frac{\sqrt{2}}{2}(0,0,1),\\
&(0,1,0), = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1),\\
&\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,0) + 0(0,1,0) + \frac{\sqrt{2}}{2}(0,0,1).
\end{aligned}$$

Άρα, ο πίνακας μετάβασης είναι ο

$$P_{12} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Για να υπολογίσουμε τον πίνακα μετάβασης P_{21} θα πρέπει να εκφράσουμε τα διανύσματα τής βάσης $\mathcal{B}_1$ ως $\mathbb{R}$-γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων τής $\mathcal{B}_2$. Δηλαδή, θα πρέπει να προσδιορίσουμε εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς $\kappa_1, \lambda_1, \mu_1$ για τους οποίους ισχύει:

$$(1,0,0) = \kappa_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \lambda_1(0,1,0) + \mu_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς $\kappa_2, \lambda_2, \mu_2$ για τους οποίους ισχύει:

$$(0,1,0) = \kappa_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \lambda_2(0,1,0) + \mu_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

και εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς $\kappa_3, \lambda_3, \mu_3$ για τους οποίους ισχύει:

$$(0,0,1) = \kappa_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \lambda_3(0,1,0) + \mu_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Επομένως οφείλουμε να λύσουμε τα ακόλουθα τρία συστήματα:

$$\begin{array}{llll} \frac{\sqrt{2}}{2}\kappa_1 & +0\lambda_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\mu_1 & =1 \\ 0\kappa_1 & +1\lambda_1 & 0\mu_1 & =0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\kappa_1 & +0\lambda_1 & \frac{\sqrt{2}}{2}\mu_1 & =0 \end{array}, \qquad \begin{array}{llll} \frac{\sqrt{2}}{2}\kappa_2 & +0\lambda_2 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\mu_2 & =0 \\ 0\kappa_2 & +1\lambda_2 & 0\mu_2 & =1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\kappa_2 & +0\lambda_2 & \frac{\sqrt{2}}{2}\mu_2 & =0 \end{array}$$

και

$$\begin{array}{llll} \frac{\sqrt{2}}{2}\kappa_3 & +0\lambda_3 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\mu_3 & =0 \\ 0\kappa_3 & +1\lambda_3 & 0\mu_3 & =0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\kappa_3 & +0\lambda_3 & \frac{\sqrt{2}}{2}\mu_3 & =1 \end{array},$$

το πρώτο ως προς $\kappa_1, \lambda_1, \mu_1$, το δεύτερο ως προς $\kappa_2, \lambda_2, \mu_2$ και το τρίτο ως προς $\kappa_3, \lambda_3, \mu_3$.

Η λύση τού πρώτου είναι η $(\kappa_1, \lambda_1, \mu_1) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, τού δεύτερου η $(\kappa_2, \lambda_2, \mu_2) = (0,1,0)$ και τού τρίτου η $(\kappa_3, \lambda_3, \mu_3) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Άρα, ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{B}_2$ στη βάση $\mathcal{B}_1$ είναι ο

$$P_{21} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Σημείωση. Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$ είναι δυό βάσεις ενός n-διάστατου χώρου και $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ οι αντίστοιχοι πίνακες μετάβασης, τότε $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = I_n$ και $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = I_n$. Συνεπώς, αν γνωρίζουμε τον ένα εκ των δύο, τότε ο άλλος είναι ο αντίστροφός του. Προτείνουμε στον αναγνώστη να ελέγξει τον ισχυρισμό μας, διαπιστώνοντας ότι αμφότερα τα γινόμενα $P_{21}P_{12}$ και $P_{12}P_{21}$, των ανωτέρω δύο πινάκων P_{12} και P_{21}, ισούνται με τον ταυτοτικό 3×3 πίνακα.

Στα ερωτήματα (c) έως και (f) θα δώσουμε απλώς τα αποτελέσματα προτρέποντας τον αναγνώστη να εφαρμόσει τη διαδικασία που παρουσιάσαμε εκτενώς στο ερώτημα (a).

(c)

$$P_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(d)

$$P_{31} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(e)

$$P_{23} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(f)

$$P_{32} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}.$$

(g)

(1)

Εάν $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, τότε οι συνιστώσες του ως προς τη βάση $\mathcal{B}_1$ είναι οι (a, b, c), αφού $v = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$. Σύμφωνα με τη θεωρία που αφορά τους πίνακες μετάβασης, οι συνιστώσες (x, y, z) τού v ως προς τη βάση $\mathcal{B}_2$ θα προκύψουν από το γινόμενο τού P_{21} με τον 3×1 πίνακα που έχει συνιστώσες τα a, b, c. Έτσι έχουμε:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P_{21} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{2}}{2}c \\ b \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{2}}{2}c \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, $(x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{2}}{2}c, b, -\frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{2}}{2}c\right)$ και το διάνυσμα

$$v = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$$

γράφεται με τη βοήθεια τής $\mathcal{B}_2$ ως

$$v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{2}}{2}c\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + b(0, 1, 0) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{2}}{2}c\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

(2)

Η διαδικασία προσδιορισμού των συνιστωσών (x, y, z) τού διανύσματος $v = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}_3$ είναι παρόμοια. Έτσι έχουμε:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P_{31} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+b+c}{3} \\ \frac{a-b}{6} \\ \frac{a+b-2c}{6} \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς το διάνυσμα

$$v = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$$

γράφεται με τη βοήθεια τής $\mathcal{B}_3$ ως

$$v = \frac{a + b + c}{3}(1, 1, 1) + \frac{a - b}{2}(1, -1, 0) + \frac{a + b - 2c}{2}(1, 1, -2).$$

(h)
Προτείνουμε να δοκιμάσει ο αναγνώστης μόνος του την επίλυση τής συγκεκριμένης άσκησης.

(viii) Έστω ο $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος $V = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{K}\}$.

(a) Να εκφραστεί κάθε $(a, b, c) \in V$ ως $\mathbb{K}$-γραμμικός συνδυασμός των ακόλουθων βάσεων:

$$\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\},$$
$$\mathcal{B}_3 = \{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}.$$

(b) Ποιος είναι ο πίνακας μετάβασης P_{12} από την $\mathcal{B}_1$ στην $\mathcal{B}_2$;

(c) Ποιος είναι ο πίνακας μετάβασης P_{23} από την $\mathcal{B}_2$ στην $\mathcal{B}_3$;

(d) Να δειχθεί ότι $P_{12}P_{23} = P_{13}$.

(e) Να δειχθεί εκτελώντας τους κατάλληλους πολλαπλασιασμούς ότι $P_{ij}P_{jk} = P_{ik}$, όπου $1 \leq i, j, k \leq 3$.

(f) Μπορείτε να διατυπώσετε και να αποδείξετε μια πρόταση που να αφορά τον πολλαπλασιασμό πινάκων μετάβασης;

Λύση (vii)
(a)
Το διάνυσμα $v = (a, b, c)$ γράφεται ως προς την $\mathcal{B}_1$:

$$(a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1),$$

ως προς την $\mathcal{B}_2$:

$$(a, b, c) = b(0, 1, 0) + a(1, 0, 0) + c(0, 0, 1)$$

και ως προς την $\mathcal{B}_3$:

$$(a, b, c) = c(0, 0, 1) + a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0).$$

(b)

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$P_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d)

$$P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι $P_{12}P_{23} = P_{13}$.
(e) Προτείνουμε να εκτελέσει ο αναγνώστης μόνος του τους αναφερόμενους πολλαπλασιασμούς.
(f) Η πρόταση είναι η ακόλουθη:
Έστω ότι V είναι ένας n-διάστατος διανυσματικός χώρος και ότι $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$ είναι οποιεσδήποτε τρεις βάσεις του. Εάν P_{12}, P_{23} και P_{13} είναι οι αντίστοιχοι πίνακες μετάβασης, τότε $P_{12}P_{23} = P_{13}$.
Απόδειξη Έστω ότι οι συνιστώσες ενός διανύσματος $v \in V$ είναι οι $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ως προς την $\mathcal{B}_1$, οι $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ως προς την $\mathcal{B}_2$ και οι $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ως προς την $\mathcal{B}_3$. Έχουμε:

$$P_{12}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad P_{23}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ και } P_{13}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

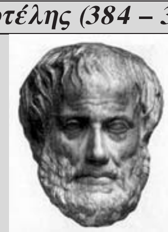
Συνεπώς,

$$P_{12}P_{23}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = P_{13}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Η ανωτέρω σχέση ισχύει για οποιονδήποτε $n \times 1$ πίνακα με συνιστώσες $c_1, c_2, \ldots, c_n$, επομένως $P_{12}P_{23} = P_{13}$.
Σημείωση Το παραπάνω επιχείρημα εδράζεται στην εξής παρατήρηση:
Έστω ότι ϵ_ℓ είναι ο $n \times 1$ πίνακας, που όλες οι συνιστώσες του είναι ίσες με μηδέν, εκτός τής $(\ell, 1)$-συνιστώσας του, η οποία ισούται με 1. Εάν (m_{ij}) είναι οποιοσδήποτε $n \times n$ πίνακας, τότε το γινόμενο $(m_{ij})e_\ell$ ισούται με τον $n \times 1$ πίνακα $\begin{pmatrix} m_{1\ell} \\ m_{2\ell} \\ \vdots \\ m_{n\ell} \end{pmatrix}$. Έτσι, εάν $P = (p_{ij})$ και $Q = (q_{ij})$ είναι δύο $n \times n$ πίνακες με την ιδιότητα $P\epsilon_\ell = Q\epsilon_\ell, \forall \ell, 1 \leq \ell \leq n$, τότε για κάθε ℓ, $1 \leq \ell \leq n$, η ℓ-οστή στήλη τού P ισούται με την ℓ-οστή στήλη τού Q και γι' αυτό οι πίνακες είναι ίσοι.

ΤΙ ΕΙΠΑΝ ΟΙ ΦΙΛΟΣΟΦΟΙ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Αριστοτέλης (384 – 322 π.Χ.)



Το όλο είναι περισσότερο από τη συνένωση των αντικειμένων που το απαρτίζουν.

Οι Ασκήσεις επιλύονται από τους διδάσκοντες Ν.Μαρμαρίδη και Κ. Μέξη στο πλαίσιο τού Μαθήματος Γραμμική Άλγεβρα Ι, α' Εξαμήνου Σπουδών Τμήματος Μαθηματικών, Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Ιωάννινα, Νοέμβριος 2004

2.5 Παραγόμενοι Υπόχωροι

(i) Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα υποσύνολα

$$U = \{(1,-1,-1,1),(1,-2,-2,1),(0,1,1,0)\} \text{ και } W = \{(1,0,0,1),(0,-1,-1,0)\}$$

τού $\mathbb{K}^4$ παράγουν τον ίδιο υπόχωρο τού $\mathbb{K}^4$.

Λύση (i)

Σημείωση. Υπενθυμίζουμε ότι αν $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$ είναι ένα μη κενό υποσύνολο ενός $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου V και W είναι ένα υποσύνολο τού V που προκύπτει από το U κατόπιν μιας ακολουθίας στοιχειωδών πράξεων επί των διανυσμάτων τού U, τότε οι παραγόμενοι χώροι $\langle U\rangle$ και $\langle W\rangle$ συμπίπτουν. Επιπλέον, υπενθυμίζουμε ότι αν M_U είναι ο πίνακας που έχει ως γραμμές τις συνιστώσες των $u_1, u_2, \ldots, u_s$ αντιστοίχως (*ως προς μια βάση* $\mathcal{B}$), τότε μια ακολουθία στοιχειωδών πράξεων επι των διανυσμάτων τού U αντιστοιχεί σε μια ακολουθία στοιχειωδών πράξεων επί των γραμμών τού M_U και οι γραμμές κάθε πίνακα που προκύπτει κατόπιν μιας ακολουθίας στοιχειωδών πράξεων αποτελούν τις συνιστώσες (*ως προς τη βάση* $\mathcal{B}$) ενός συνόλου διανυσμάτων W που παράγουν τον ίδιο χώρο με αυτόν που παράγει και ο U.

Εφαρμόζοντας τις ανωτέρω παρατηρήσεις στη συγκεκριμένη άσκηση, όπου ως βάση $\mathcal{B}$ χρησιμοποιούμε την κανονική βάση

$$\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

σχηματίζουμε πρώτα τον πίνακα με γραμμές τις συνιστώσες των διανυσμάτων τού U:

$$M_U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Με αφετηρία τον πίνακα M_U και εκτελώντας την ακολουθία μετασχηματισμών

$$\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1, \Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2, \Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2,$$

προκύπτει τελικώς ο γραμμοϊσοδύναμος πίνακας

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Οι πρώτες δύο γραμμές τού N είναι ακριβώς οι συνιστώσες των στοιχείων τού συνόλου W. Η τελευταία αντιστοιχεί στις συνιστώσες τού μηδενικού διανύσματος και προφανώς δεν επηρρεάζει διόλου τον παραγόμενο από τον W χώρο. Άρα, $\langle U\rangle = \langle W\rangle$.

(ii) Στον $\mathbb{K}$-χώρο $\mathbb{K}^3$ θεωρούμε τους ακόλουθους παραγόμενους υπόχωρους:

$$V = \langle\{(1,2,1),(2,2,-2),(1,3,3)\}\rangle \text{ και } W = \langle\{(1,2,2),(2,2,-6),(2,3,-1)\}\rangle$$

Να προσδιορίσετε βάσεις των V, W, $V \cap W$ και $\langle V \cup W \rangle$ και να διαπιστώσετε ότι

$$\dim_{\mathbb{K}} \langle V \cup W \rangle = \dim_{\mathbb{K}} V + \dim_{\mathbb{K}} W - \dim_{\mathbb{K}} (V \cap W)$$

Λύση (ii)
Θεωρούμε ως βάση τη κανονική βάση $\mathbb{K}^3$.

Θα προσδιορίσουμε πρώτα μια βάση τού V.
Σχηματίζουμε πρώτα τον πίνακα με γραμμές τις συνιστώσες των διανυσμάτων τού $U = \{(1, 2, 1), (2, 2, -2), (1, 3, 3)\}$. (Προσέξτε ότι $V = \langle U \rangle$.):

$$M_U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Με αφετηρία τον πίνακα M_U και εκτελώντας την ακολουθία μετασχηματισμών

$$\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1, \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1, \Gamma_3 \to \Gamma_3 + \frac{1}{2}\Gamma_2,$$

προκύπτει τελικώς ο γραμμοϊσοδύναμος πίνακας

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Τα διανύσματα που αντιστοιχούν στις γραμμές τού N είναι τα $(1, 2, 1)$, $(0, -2, -4)$ και το μηδενικό διάνυσμα $(0, 0, 0, 0)$. Ο υπόχωρος τού $\mathbb{K}^3$ που παράγεται από τα δύο πρώτα διανύσματα συμπίπτει με τον χώρο V. Επιπλέον τα δύο αυτά διανύσματα είναι $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητα (*γιατί;*) και γι' αυτό είναι μια βάση τού V. Άρα, $\dim_{\mathbb{K}} V = 2$.

Θα προσδιορίσουμε τώρα μια βάση τού W.
Ακολουθώντας μια παρόμοια διαδικασία διαπιστώνουμε ότι μια βάση τού W συνίσταται από τα $(1, 2, 2)$, $(0, -2, -10)$. Άρα, $\dim_{\mathbb{K}} W = 2$.

Θα προσδιορίσουμε τώρα τον χώρο $V \cap W$ και μια βάση του.
Έστω ότι το διάνυσμα (x, y, z) ανήκει στην τομή $V \cap W$. Τότε το (x, y, z) εκφρασμένο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων τής βάσης τού V που προσδιορίσαμε ισούται με

$$(x, y, z) = \lambda(1, 2, 1) + \mu(0, -2, 4), \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Επίσης το (x, y, z) εκφρασμένο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων τής βάσης τού W που προσδιορίσαμε ισούται με

$$(x, y, z) = \alpha(1, 2, 2) + \beta(0, -2, -10), \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Συνεπώς, κάθε $(x, y, z) \in V \cap W$ ικανοποιεί την ισότητα:

$$(\lambda, 2\lambda - 2\mu, \lambda - 4\mu) = (\alpha, 2\alpha - 2\beta, 2\alpha - 10\beta).$$

Η ανωτέρω ισότητα είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$\begin{array}{rrcrr} \lambda & & = & \alpha & \\ 2\lambda & -2\mu & = & 2\alpha & -2\beta \\ \lambda & -4\mu & = & 2\alpha & -10\beta \end{array}.$$

Εκτελώντας μετασχηματισμούς επί των γραμμών τού ανωτέρω συστήματος παίρνουμε το ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{array}{rcl} \lambda & = & \alpha \\ \mu & = & \beta \\ \alpha - 4\beta & = & 2\alpha - 10\beta \end{array}.$$

Θεωρώντας ως αγνώστους τα α, β βλέπουμε ότι το σύστημα έχει λύση για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ με $\alpha = 6\beta$.
Επομένως το (x, y, z) ανήκει στην τομή $V \cap W$ αν και μόνο αν $(x, y, z) = (\alpha, 2\alpha - 2\beta, 2\alpha - 10\beta) = (6\beta, 12\beta - 2\beta, 12\beta - 10\beta) = (6\beta, 10\beta, 2\beta)$, δηλαδή

$$V \cap W = \{(6\beta, 10\beta, 2\beta) = \beta(6, 10, 2) \mid \beta \in \mathbb{K}\}.$$

Επομένως, μια βάση τού $V \cap W$ είναι η $\{(6, 10, 2)\}$ και $\dim_{\mathbb{K}}(V \cap W) = 1$.
Θα προσδιορίσουμε τώρα τον χώρο $\langle V \cup W \rangle$ και μια βάση του.

Σημείωση. Έστω ότι T είναι ένας $\mathbb{K}$-χώρος και V, W δύο υποχώροι του. Εάν V' είναι ένα σύνολο διανυσμάτων που παράγει τον χώρο V και W' είναι ένα σύνολο διανυσμάτων που πράγει τον χώρο W, τότε ο χώρος $\langle V \cup W \rangle$ που παράγεται από το ***σύνολο*** $V \cup W$ ισούται με τον χώρο $\langle V' \cup W' \rangle$ που παράγεται από το σύνολο $V' \cup W'$.
Επειδή $V' \cup W' \subseteq V \cup W$, έχουμε $\langle V' \cup W' \rangle \subseteq \langle V \cup W \rangle$. Υπολείπεται η απόδειξη ότι $\langle V \cup W \rangle \subseteq \langle V' \cup W' \rangle$. Κάθε στοιχείο $z \in \langle V \cup W \rangle$ έχει τη μορφή

$$z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{m} \kappa_j w_j, \ \lambda_i, \kappa_j \in \mathbb{K},$$

όπου τα $v_i \in V, \forall i, 1 \leq i \leq n$ και τα $w_j \in W, \forall j, 1 \leq j \leq m$. Αλλά κάθε v_i είναι ένας $\mathbb{K}$-γραμμικός συνδυασμός στοιχείων τού V', αφού $V = \langle V' \rangle$. Δηλαδή

$$v_i = \sum_{h=1}^{k_i} \mu_{ih} v'_{ih}, \ \mu_{ih} \in \mathbb{K}$$

όπου $v'_{ih} \in V', \forall i, 1 \leq i \leq n$ και $\forall h, 1 \leq h \leq k_i$.
Παρομοίως,

$$w_j = \sum_{\ell=1}^{r_j} \xi_{j\ell} w'_{j\ell}, \ \xi_{j\ell} \in \mathbb{K}$$

όπου $w'_{j\ell} \in W', \forall j, 1 \leq j \leq m$ και $\forall \ell, 1 \leq \ell \leq r_j$.
Συνεπώς,

$$z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{h=1}^{k_i} \mu_{ih} v'_{ih} \right) + \sum_{j=1}^{m} \kappa_j \left(\sum_{\ell=1}^{r_j} \xi_{j\ell} w'_{j\ell} \right).$$

Με άλλα λόγια κάθε στοιχείο τού $\langle V \cup W \rangle$ είναι ένας $\mathbb{K}$-γραμμικός συνδυασμός στοιχείων από το σύνολο $V' \cup W'$, δηλαδή ανήκει στο χώρο $\langle V' \cup W' \rangle$. Άρα, $\langle V \cup W \rangle \subseteq \langle V' \cup W' \rangle$.

Έχοντας κατά νου την ανωτέρω σημείωση συμπεραίνουμε ότι ο $\langle V \cup W\rangle$ τής συγκεκριμένης άσκησης παράγεται από το σύνολο

$$\{(1, 2, 1), (2, 2, -2), (1, 3, 3)\} \cup \{(1, 2, 2), (2, 2, -6), (2, 3, -1)\}$$

Για να βρούμε μια βάση τού $\langle V \cup W\rangle$ σχηματίζουμε τον πίνακα

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -10 \end{pmatrix},$$

όπου οι πρώτες δύο γραμμές (αντιστοίχως οι δύο τελευταίες) αποτελούνται από τις συνιστώσες των στοιχείων τής βάσης τού V (αντιστοίχως τού W) που βρήκαμε προηγουμένως. Εκτελώντας στοιχειώδεις μετασχηματισματισμούς επί των γραμμών τού R καταλήγουμε στον πίνακα

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Άρα τα διανύσματα $(1, 2, 1), (0, -2, -4), (0, 0, 1)$ παράγουν τον χώρο $\langle V \cup W\rangle$ και επειδή είναι $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητα αποτελούν μια βάση του. Συνεπώς, $\dim_{\mathbb{K}}\langle V \cup W\rangle = 3$

Απομένει να επαληθεύσουμε τον τύπο που δίδεται στην άσκηση.
Εχουμε $\dim_{\mathbb{K}} V = 2, \dim_{\mathbb{K}} W = 2, \dim_{\mathbb{K}}(V \cap W) = 1$ και $\dim_{\mathbb{K}}\langle V \cup W\rangle = 3$. Έτσι ο τύπος

$$\dim_{\mathbb{K}}\langle V \cup W\rangle = \dim_{\mathbb{K}} V + \dim_{\mathbb{K}} W - \dim_{\mathbb{K}}(V \cap W)$$

ισχύει στη συγκεκριμένη περίπτωση.

(iii) Έστω ο $\mathbb{K}$-χώρος $M_{2\times 2}(K)$ και V ο $\mathbb{K}$-υπόχωρος που παράγεται από το σύνολο $N = \{A, B\}$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Να προσδιορίσετε μια βάση τού V και ακολούθως να επεκτείνετε τη συγκεκριμένη βάση τού V σε μια βάση τού $M_{2\times 2}(K)$.

Λύση (iii)
Θα εφαρμόσουμε στοιχειώδεις πράξεις επί των διανυσμάτων που παράγουν το σύνολο N. Εάν θεωρήσουμε ως βάση τη κανονική βάση τού $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$, δηλαδή το σύνολο $\mathcal{B}$ που αποτελείται από τα

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

τότε $A = -1E_{11} + 4E_{12} - 6E_{21} - 2E_{22}$ και $B = 2E_{11} - 2E_{12} + 3E_{21} + 1E_{22}$. Θεωρούμε τον πίνακα των συνιστωσών των A και B:

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Εκτελώντας την ακολουθία των στοιχειωδών μετασχηματισμών

$$\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 2\Gamma_1, \quad \Gamma_1 \to (-1)\Gamma_1, \quad \Gamma_2 \to \frac{1}{6}\Gamma_2$$

προκύπτει ο κλιμακωτός πίνακας

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Επομένως, τα στοιχεία τού $M_{2\times 2}\mathbb{K}$ που αντιστοιχούν στις συνιστώσες των γραμμών τού ανωτέρω πίνακα, δηλαδή τα

$$A' = 1E_{11} - 4E_{12} + 6E_{21} - 2E_{22}, \quad B' = 1E_{12} - \frac{3}{2}E_{21} - \frac{1}{2}E_{22}$$

σχηματίζουν μια βάση τού υποχώρου, ο οποίος παράγεται από το σύνολο N.

Για να συμπληρώσουμε το σύνολο $\{A', B'\}$ σε μια βάση τού $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ αρκεί να επεκτείνουμε τον 2×4 πίνακα P σε έναν 4×4 πίνακα Q κατά τέτοιο τρόπο, ώστε ο Q να αποτελείται από $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητες γραμμές. Πράγματι, ο πίνακας

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

αποτελείται από $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητες γραμμές (είναι κλιμακωτός με μη-μηδενικές γραμμές). Συνεπώς, οι τέσσερεις πίνακες που έχουν ως συνιστώσες (ως προς την ανωτέρω βάση $\mathcal{B}$) τις αντίστοιχες συνιστώσες των τεσσάρων γραμμών τού Q είναι $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητοι και επειδή $\dim_{\mathbb{K}} M_{2\times 2}(\mathbb{K}) = 4$, οι συγκεκριμένοι τέσσερεις πίνακες σχηματίζουν μια $\mathbb{K}$-βάση τού $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$. Με άλλα λόγια, το υποσύνολο τού $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ που αποτελείται από τους πίνακες

$$A' = E_{11} - 4E_{12} + 6E_{21} - 2E_{22}, \quad B' = E_{12} - \frac{3}{2}E_{21} - \frac{1}{2}E_{22}, \quad C' = E_{21} \text{ και } D' = E_{22}$$

αποτελεί μια $\mathbb{K}$-βάση τού $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$.

(iv) Να προσδιορίσετε μια βάση τού $\mathbb{K}^3$ που να περιέχει τα διανύσματα $v = (1, 0, 2)$ και $w = (0, 1, 3)$.

Λύση (iv)
Θεωρούμε την κανονική βάση $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, όπου $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ τού $\mathbb{K}^3$. Ο πίνακας των συνιστωσών των v και w ως προς την $\mathcal{B}$ είναι ο

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ο P είναι ένας κλιμακωτός πίνακας με μη-μηδενικές γραμμές. Άρα, είναι ένας 2×3 πίνακας με $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητες γραμμές. Επεκτείνουμε τον P σε έναν 3×3 πίνακα με $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητες γραμμές:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Το σύνολο $\{e_1 + 2e_3, e_2 + 3e_3, e_3\} = \{v, w, e_3\}$ αποτελεί μια $\mathbb{K}$-βάση τού $\mathbb{K}^3$.

(v) Να εξετασθεί η μεταβολή τής βαθμίδας τού πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & \lambda & 6 & 6 \\ -1 & 3 & \lambda - 3 & 0 \end{pmatrix}$$

καθώς το λ διατρέχει τα στοιχεία τού $\mathbb{R}$.

Λύση (v)
Ως γνωστόν, η βαθμίδα $\mathrm{r}(A)$ τού πίνακα A ισούται με τη διάσταση τού χώρου που παράγεται από τις γραμμές τού A. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι η βαθμίδα ενός πίνακα παραμένει αναλλοίωτη κατά την εκτέλεση στοιχειωδών μετασχηματισμών επί των γραμμών του. Συνεπώς, θα μετατρέψουμε τον A σε έναν γραμμοϊσοδύναμο κλιμακωτό πίνακα και εν συνεχεία θα προσδιορίσουμε τη βαθμίδα τού κλιμακωτού πίνακα.
Η ακολουθία

$$\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1, \quad \Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_1, \Gamma_3 \leftrightarrows \Gamma_2, \Gamma_3 \to \Gamma_3 - (\lambda + 4)\Gamma_2$$

των στοιχειωδών μετασχηματισμών επί των γραμμών τού A χορηγεί τον πίνακα

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda + 4) & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Εάν $\lambda = 0$, τότε ο

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι ένας κλιμακωτός πίνακας με δύο μη-μηδενικές γραμμές και γι' αυτό η διάσταση τού χώρου που παράγεται από τις γραμμές τού A' ισούται με 2. Συνεπώς, αν $\lambda = 0$, τότε $\mathrm{r}(A) = 2$.

Εάν $\lambda \neq 0$, τότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις $\lambda = -4$ και $\lambda \neq -4$.

Στην πρώτη περίπτωση ο πίνακας A' ισούται με

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ο αντίστοιχος γραμοϊσοδύναμος κλιμακωτός πίνακας είναι ο

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Προφανώς, η διάσταση τού χώρου που παράγεται από τις γραμμές τού A'' ισούται με 3. Συνεπώς, αν $\lambda = -4$, τότε $\mathrm{r}(A) = 3$.

Στην δεύτερη περίπτωση, δηλαδή όταν $\lambda \neq -4$, εκτελώντας επί τού A' τον στοιχειώδη μετασχηματισμό $\Gamma_3 \to -\frac{1}{\lambda(\lambda+4)}\Gamma_3$, προκύπτει ο πίνακας

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda+4} \end{pmatrix}.$$

Ο A'' είναι ένας κλιμακωτός πίνακας με τρεις μη-μηδενικές γραμμές· επομένως ο χώρος που παράγεται από τις γραμμές τού A'' έχει διάσταση 3. Επομένως, $\mathrm{r}(A) = 3$.

Εν κατακλείδι,

$$r(A) = \begin{cases} 2, & \text{αν } \lambda = 0, \\ 3, & \text{αν } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

(vi) Έστω W_1 και W_2 δύο $\mathbb{K}$-υπόχωροι ενός $\mathbb{K}$-χώρου V. Να αποδείξετε ότι

$$\langle W_1 \cup W_2 \rangle = W_1 + W_2.$$

Λύση (vi)
Προτείνουμε στον αναγνώστη να αποδείξει την άσκηση με τις δικές του δυνάμεις. Πιστεύουμε ότι η σημείωση που παραθέσαμε στην λύση τής Άσκησης 2.5.(ii) είναι χρήσιμη και στη συγκεκριμένη περίπτωση.

Τι ειπαν οι Ψυχολογοι για τους Μαθηματικους

Adler, Alfred (1870 – 1937)

Κάθε γενιά διαθέτει μερικούς σπουδαίους μαθηματικούς. Η Μαθηματική Επιστήμη δεν θα καταλάβαινε διόλου την απουσία των άλλων. Βέβαια, κι' αυτοί είναι χρήσιμοι ως δάσκαλοι και η έρευνά τους δεν βλάπτει κανέναν, μολονότι είναι άνευ σημασίας.
Ένας μαθηματικός είναι ή σπουδαίος ή τίποτα.

Οι Ασκήσεις επιλύονται από τους διδάσκοντες Ν.Μαρμαρίδη και Κ. Μέξη στο πλαίσιο τού Μαθήματος Γραμμική Άλγεβρα Ι, α' Εξαμήνου Σπουδών Τμήματος Μαθηματικών, Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Ιωάννινα, Νοέμβριος 2004

2.6 Πολυώνυμα

(i) Έστω τα πολυώνυμα $p(x) = 2x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 1$ και $t(x) = x^2 + 1$ τού $\mathbb{R}[x]$. Να ευρεθούν πολυώνυμα $q(x)$ και $r(x)$, τέτοια ώστε $p(x) = q(x)t(x) + r(x)$, όπου ή $\deg r(x) < \deg t(x)$ ή $r(x) = 0$.

Λύση (i)
Εκτελώντας τη διαδικασία διαίρεσης με υπόλοιπο παίρνουμε:

$$q(x) = 2x^2 + x + 2, \quad r(x) = 2x - 1.$$

(ii) Έστω $\langle U \rangle$ ο υπόχωρος τού $\mathbb{R}_2[x]$ που παράγεται από το σύνολο $U = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$, όπου $p_1(x) = x^2+2x+1$, $p_2(x) = x^2+3$ και $p_3(x) = x-1$. Να εξεταστεί ποια από τα ακόλουθα διανύσματα τού $\mathbb{R}_2[x]$ ανήκουν στον υπόχωρο $\langle U \rangle$.

(a) $f_1(x) = x^2 + x + 2$,

(b) $f_2(x) = 2x^2 + 2x + 3$,

(c) $f_3(x) = -x^2 + x - 4$,

(d) $f_4(x) = -2x^2 + 3x + 1$.

Λύση (ii)
Υπενθυμίζουμε ότι ένα διάνυσμα v ενός $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου V ανήκει στον παραγόμενο υπόχωρο $\langle U \rangle$, όπου $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subseteq V$, αν και μόνο αν το $\{v\} \cup U$ είναι ένα σύνολο $\mathbb{K}$-γραμμικώς εξαρτημένων διανυσμάτων.
Συνεπώς, ένα πολυώνυμο $f(x)$ ανήκει στον υπόχωρο $\langle U \rangle$, όπου $U = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$, αν και μόνο αν το σύνολο $\{f(x)\} \cup U$ είναι $\mathbb{K}$-γραμμικώς εξαρτημένο. Το τελευταίο είναι αληθές, αν και μόνο αν η βαθμίδα τού πίνακα με γραμμές τις αντίστοιχες συνιστώσες των διανυσμάτων τού συνόλου U (ως προς μια βάση $\mathcal{B}$) συμπίπτει με τη βαθμίδα τού πίνακα με γραμμές τις αντίστοιχες συνιστώσες των διανυσμάτων (ως προς την ίδια βάση $\mathcal{B}$) τού συνόλου $\{f(x)\} \cup U$.
Θεωρούμε τη βάση $\mathcal{C} = \{x^2, x, 1\}$ τού $\mathbb{R}_2[x]$ και σχηματίζουμε τον πίνακα A με γραμμές τις συνιστώσες των $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ ως προς τη $\mathcal{C}$. Έτσι έχουμε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι η βαθμίδα τού πίνακα A ισούται με 2, αφού κατόπιν μιας ακολουθίας στοιχειωδών πράξεων επί των γραμμών τού A προκύπτει ο γραμμοϊσοδύναμος τού A κλιμακωτός πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a)
Ο πίνακας A_1 με γραμμές τις συνιστώσες των $p_1(x), p_2(x), p_3(x), f_1(x)$ είναι

ο ακόλουθος:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας A_1 είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Με αφετηρία τον πίνακα B_1 και εκτελώντας την ακολουθία των στοιχειωδών μετασχηματισμών

$$\Gamma_3 \rightleftarrows \Gamma_4, \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1, \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2,$$

προκύπτει ο γραμμοϊσοδύναμος πίνακας

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Αφού $\mathrm{rank}C_1 = 2 = \mathrm{rank}A$, έπεται ότι το $f_1(x) \in \langle U \rangle$.
(b)
Ο πίνακας A_1 με γραμμές τις συνιστώσες των $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$, $f_2(x)$ είναι ο ακόλουθος:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ο A_2 είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Με αφετηρία τον πίνακα B_2 και εκτελώντας την ακολουθία των στοιχειωδών μετασχηματισμών

$$\Gamma_3 \rightleftarrows \Gamma_4, \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1, \Gamma_3 \to \Gamma_3 + 2\Gamma_2, \Gamma_3 \to (-1)\Gamma_3,$$

προκύπτει ο γραμμοϊσοδύναμος πίνακας

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Αφού $\text{rank}C_2 = 3 \neq 2 = \text{rank}A$, έπεται ότι το $f_2(x) \notin \langle U \rangle$.
(c) και (d)
Προτείνουμε να μελετήσει μόνος του ο αναγνώστης τις περιπτώσεις (c) και (d).

(iii) Να εξεταστεί αν το σύνολο

$$U = \{x^3 + 2x + 1, x^2 - x + 2, x^3 + 2, -x^3 + x^2 - 5x + 2\}$$

παράγει τον χώρο $\mathbb{R}_3[x]$.

Λύση (iii)
Το σύνολο U παράγει τον χώρο $\mathbb{R}_3[x]$, αν και μόνο αν η διάσταση $\dim_{\mathbb{R}}\langle U \rangle$ ισούται με 4 που είναι η διάσταση τού $\mathbb{R}_3[x]$. Η $\dim_{\mathbb{R}}\langle U \rangle$ ισούται με τη βαθμίδα τού πίνακα A, ο οποίος έχει ως γραμμές τις συνιστώσες των διανυσμάτων τού U ως προς μια βάση C τού $\mathbb{R}_3[x]$. Επιλέγοντας ως βάση τού $\mathbb{R}_3[x]$ την $C = \{x^3, x^2, x, 1\}$, ο πίνακας A ισούται με

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι η βαθμίδα τού πίνακα A ισούται με 3, αφού κατόπιν μιας ακολουθίας στοιχειωδών πράξεων επί των γραμμών τού A προκύπτει ο γραμμοϊσοδύναμος τού A κλιμακωτός πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

η βαθμίδα τού οποίου ισούται με 3. Επομένως, ο χώρος $\langle U \rangle$ έχει $\mathbb{R}$-διάσταση ίση με 3 και γι' αυτό είναι ένας γνήσιος υπόχωρος τού $\mathbb{R}_4[x]$.

(iv) Για ποιες τιμές τού $c \in \mathbb{R}$ είναι το σύνολο $\mathcal{T} = \{x + 3, 2x + c^2 + 2\} \subset \mathbb{R}_1[x]$ ένα $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο;

Λύση (iv)
Σύμφωνα με όσα είπαμε στις αμέσως προηγούμενες ασκήσεις, το σύνολο $\mathcal{T}$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητο, αν και μόνο τα στοιχεία τού συνόλου είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητα, αν και μόνο αν η βαθμίδα τού πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & c^2 + 2 \end{pmatrix}.$$

που οι γραμμές του έχουν ως συνιστώσες τις συνιστώσες των αντίστοιχων στοιχείων τού $\mathcal{T}$ ισούται με το πλήθος των στοιχείων του, δηλαδή με 2.
Παρατηρούμε ότι ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & c^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Επιπλέον, ο B είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον κλιμακωτό πίνακα

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

αν και μόνο αν $c^2 - 4 \neq 0$, αφού ο C μπορεί να προκύψει από τον A κατόπιν τού στοιχειώδους μετασχηματισμού $\Gamma_2 \to \frac{1}{c^2-4}\Gamma_2$ και ο A μπορεί να προκύψει από τον C κατόπιν τού στοιχειώδους μετασχηματισμού $\Gamma_2 \to (c^2 - 4)\Gamma_2$.
Επομένως, $\forall c \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, το $\mathcal{T}$ είναι ένα $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο.

(v) Να δειχθεί ότι το σύνολο

$$\mathcal{S} = \{x^2 + 1, x - 1, 2x + 2\}$$

αποτελεί μια βάση τού $\mathbb{R}$-χώρου $\mathbb{R}_2[x]$.

Λύση (v)
Επειδή $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[x] = 3$ και επειδή το $\mathcal{S}$ αποτελείται από 3 στοιχεία, αρκεί το $\mathcal{S}$ να είναι ένα $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο. Με άλλα λόγια, αρκεί $\operatorname{rank}(A) = 3$, όπου A είναι ο πίνακας ο οποίος αποτελείται από τις γραμμές που έχουν ως συνιστώσες, τις αντίστοιχες συνιστώσες των διανυσμάτων τού $\mathcal{S}$ ως προς τη βάση $\{x^2, x, 1\}$. Προτείνουμε στον αναγνώστη να περατώσει με τις δικές του δυνάμεις το υπόλοιπο τής άσκησης.

(vi) Έστω $\langle U \rangle$ ο υπόχωρος τού $\mathbb{R}_3[x]$ που παράγεται από το σύνολο

$$U = \{x^3 + x^2 - 2x + 1, x^2 + 1, x^3 - 2x, 2x^3 + 3x^2 - 4x + 3\}.$$

(a) Να ευρεθεί μια βάση τού $\langle U \rangle$ και να προσδιοριστεί η διάσταση $\dim_{\mathbb{R}} \langle U \rangle$.

(b) Να συμπληρωθεί η βάση που προσδιορίστηκε στο (a) σε μια βάση τού $\mathbb{R}_3[x]$.

Λύση (vi)
Θα προσδιορίσουμε μια βάση τού χώρου $\langle U \rangle$ εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις επί των διανυσμάτων τού U. Υπενθυμίζουμε ότι αυτό ισοδυναμεί με την εκτέλεση στοιχειωδών πράξεων επί των γραμμών τού πίνακα A που έχουν ως συνιστώσες τις αντίστοιχες συνιστώσες των διανυσμάτων τού U ως προς μια σταθερώς επιλεγμένη βάση τού $\mathbb{R}_3[x]$ (εν προκειμένω επιλέγουμε την $\{x^3, x^2, x, 1\}$).
Έτσι έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών τού A, προκύπτει ο γραμμοϊσοδύναμος πίνακας:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Από των ανωτέρω πίνακα διαπιστώνουμε ότι τα διανύσματα x^3+x^2-2x+1 και x^2+1 αποτελούν μια βάση τού $\langle U\rangle$ και γι' αυτό η διάσταση τού $\langle U\rangle$ ισούται με 2.
Θα συμπληρώσουμε τώρα την ευρεθείσα βάση σε μια βάση τού $\mathbb{R}_3[x]$. Προς τούτο αρκεί να βρούμε ένα σύνολο $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων τού $\mathbb{R}_3[x]$ που να περιέχει τα x^3+x^2-2x+1 και x^2+1. Με άλλα λόγια, αρκεί να βρούμε έναν πίνακα με βαθμίδα 4 που δύο από τις γραμμές του να αποτελούνται από τις συνιστώσες των ανωτέρω δύο διανυσμάτων. Ο πίνακας

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

είναι ένας κλιμακωτός πίνακας, με τέσσερεις μη-μηδενικές γραμμές. Οι πρώτες δύο εξ αυτών συνίστανται αντιστοίχως από τις συνιστώσες των x^3+x^2-2x+1 και x^2+1. Αφού λοιπόν η βαθμίδα τού C ισούται με 4, το αντίστοιχο σύνολο διανυσμάτων τού $\mathbb{R}_3[x]$, δηλαδή το

$$\{x^3+x^2-2x+1,\quad x^2+1,\quad x,\quad 1\}$$

αποτελεί μια βάση τού $\mathbb{R}_3[x]$.

(vii) Να ευρεθεί μια βάση τού $\mathbb{R}_3[x]$ που να περιέχει τα διανύσματα x^3+x και x^2-x.

Λύση (vii)
Προτείνουμε να αποδείξει μόνος του ο αναγνώστης τη συγκεκριμένη άσκηση. Σημειώστε, ότι πρώτα απ' όλα πρέπει να ελεγχθεί ότι το σύνολο $\{x^3+x, x^2-x\}$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητο.

(viii) Στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_1[x]$ θεωρούμε τις ακόλουθες δύο βάσεις:

$$\mathcal{S}=\{x, x-3\} \text{ και } \mathcal{T}=\{x-1, x+1\}.$$

(a) Να ευρεθεί ο πίνακας μετάβασης $P_{\mathcal{S}\mathcal{T}}$.

(b) Ποιες είναι οι συνιστώσες τού διανύσματος $p(x)=5x+1$ ως προς τη βάση $\mathcal{S}$ και ποιες ως προς τη βάση $\mathcal{T}$;

Λύση (viii)
(a)
Οι στήλες τού πίνακα μετάβασης $P_{\mathcal{S}\mathcal{T}}$ έχουν ως συνιστώσες τις συνιστώσες των διανυσμάτων τής βάσης $\mathcal{T}$ ως προς τη βάση $\mathcal{S}$. Αφού λοιπόν

$$x-1=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}(x-3) \text{ και } x+1=\frac{4}{3}x+\frac{-1}{3}(x-3)$$

ο πίνακας μετάβασης $P_{\mathcal{S}\mathcal{T}}$ ισούται με

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

(b)
Ο πίνακας μετάβασης $P_{\mathcal{BS}}$ από τη κανονική βάση $\mathcal{B} = \{x, 1\}$ στη $\mathcal{S}$ είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

και ο πίνακας μετάβασης $P_{\mathcal{BT}}$ από τη κανονική βάση $\mathcal{B} = \{x, 1\}$ στη $\mathcal{T}$ είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ο πίνακας μετάβασης $P_{\mathcal{SB}} = P_{\mathcal{BS}}^{-1}$ και ο πίνακας μετάβασης $P_{\mathcal{TB}} = P_{\mathcal{BT}}^{-1}$. Έτσι έχουμε:

$$P_{\mathcal{SB}} = P_{\mathcal{BS}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

και

$$P_{\mathcal{TB}} = P_{\mathcal{BT}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Οι συνιστώσες τού $p(x) = 5x + 1$ ως προς τη κανονική βάση $\mathcal{B}$ είναι οι $(5, 1)$. Επομένως, οι συνιστώσες τού $p(x)$ ως προς τη βάση $\mathcal{S}$ συμπίπτουν με τις συνιστώσες τού 2×1 πίνακα

$$P_{\mathcal{SB}}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

δηλαδή $p(x) = \frac{16}{3}x + \frac{-1}{3}(x - 3)$.
Οι συνιστώσες τού $p(x)$ ως προς τη βάση $\mathcal{T}$ συμπίπτουν με τις συνιστώσες τού 2×1 πίνακα

$$P_{\mathcal{TB}}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

δηλαδή $p(x) = 2(x - 1) + 3(x + 1)$.

(ix) Να δειχθεί ότι το σύνολο $\{2x^2+2x+2, x^3+x+1\}$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητο και ακολούθως να συμπληρωθεί αυτό σε μια βάση τού $\mathbb{R}_3[x]$ και σε μια βάση τού $\mathbb{R}_4[x]$.

Λύση (ix)
Οι συνιστώσες τού $p_1(x) = 2x^2 + 2x + 2$ (αντιστοίχως τού $p_2(x) = x^3 + x + 1$) ως προς τη βάση $\{x^3, x^2, x, 1\}$ τού $\mathbb{R}_3[x]$ είναι οι $(0, 2, 2, 2)$ (αντιστοίχως $(1, 0, 1, 1)$). Θεωρούμε τον 2×4 πίνακα με γραμμές τις συνιστώσες των $p_1(x)$ και $p_2(x)$, δηλαδή τον

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Εναλλάσσοντας τις δύο γραμμές και εν συνεχεία πολλαπλασιάζοντας την δεύτερη με $\frac{1}{2}$ προκύπτει ο –γραμμοϊσοδύναμος τού ανωτέρω– πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ο συγκεκριμένος πίνακας είναι κλιμακωτός με δυό μη-μηδενικές γραμμές, άρα η βαθμίδα του είναι 2. Επομένως, η διάσταση τού χώρου που παράγεται από τα $p_1(x)$ και $p_2(x)$ ισούται με 2 και τα $p_1(x), p_2(x)$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα τού $\mathbb{R}[x]$.

Συνεπώς, τα $p_1(x), p_2(x)$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητα και ως διανύσματα τού $\mathbb{R}_3[x]$, και ως διανύσματα τού $\mathbb{R}_4[x]$.

Σημείωση. Έστω ότι $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ είναι ένα σύνολο διανυσμάτων ενός $\mathbb{K}$-χώρου V. Εάν το $\mathcal{S}$ είναι ένα $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο τού V, τότε είναι ένα $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο και σε οποιονδήποτε υπόχωρο U τού V, υπό την προϋπόθεση ότι $\mathcal{S} \subseteq U$.

Η βαθμίδα τού πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ισούται με 4, αφού αυτός ο πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον κλιμακωτό πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Επομένως το σύνολο των διανυσμάτων $\{p_1(x), p_2(x), x, 1\}$ αποτελεί μια $\mathbb{R}$-βάση τού $\mathbb{R}_3[x]$.
Παρομοίως, η βαθμίδα τού πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ισούται με 5, αφού αυτός ο πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον κλιμακωτό πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Επομένως το σύνολο των διανυσμάτων $\{x^4, p_1(x), p_2(x), x, 1\}$ αποτελεί μια $\mathbb{R}$-βάση τού $\mathbb{R}_4[x]$.

(x) Στον $\mathbb{R}$-χώρο $\mathbb{R}_4[x]$ θεωρούμε τον υπόχωρο $\langle U\rangle$, όπου

$$U = \{x^3 + x + 1, x^4 + 2x^2 + 2x + 2, 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + x + 1\}.$$

Να προσδιοριστεί μια βάση τού $\langle U\rangle$ και εν συνεχεία να συμπληρωθεί σε μια βάση τού $\mathbb{R}_4[x]$.

Λύση (x)
Προτείνουμε στον αναγνώστη να επιλύσει μόνος του τη συγκεκριμένη άσκηση εφαρμόζοντας τις μέχρι τώρα αποκτηθείσες γνώσεις του.

(xi) Έστω οι $\mathbb{R}$-υπόχωροι $\mathbb{R}_{i_1}[x], \mathbb{R}_{i_2}[x], \ldots, \mathbb{R}_{i_n}[x]$ τού $\mathbb{R}[x]$, όπου $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$.
Να υπολογιστούν οι $\mathbb{R}$-υπόχωροι:

(a) $\langle \cup_{j=1}^{n} \mathbb{R}_{i_j}[x]\rangle$ και

(b) $\cap_{j=1}^{n} \mathbb{R}_{i_j}[x]$.

Λύση (xi)
Έστω $i_t = \max\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ και $i_s = \min\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$.
Επομένως,

$$\forall i_j, 1 \le j \le n, \ \ \mathbb{R}_{i_j}[x] \subseteq \mathbb{R}_{i_t}[x].$$

Συνεπώς,

$$\cup_{j=1}^{n} \mathbb{R}_{i_j}[x] = \mathbb{R}_{i_t}[x] \text{ και } \langle \cup_{j=1}^{n} \mathbb{R}_{i_j}[x]\rangle = \langle \mathbb{R}_{i_t}[x]\rangle = \mathbb{R}_{i_t}[x].$$

Σημείωση. Έστω V ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος και U ένα υποσύνολό του. Εάν το U είναι ένας $\mathbb{K}$-υπόχωρος τού V, τότε $U = \langle U\rangle$. Πράγματι, ισχύει πάντοτε $U \subseteq \langle U\rangle$. Επιπλέον, $\langle U\rangle \subseteq U$, αφού ο $\langle U\rangle$ αποτελείται ακριβώς από τους πεπερασμένους το πλήθος $\mathbb{K}$-γραμμικούς συνδυασμούς των στοιχείων τού U, αλλά κάθε τέτοιος $\mathbb{K}$-γραμμικός συνδυασμός ανήκει στο U, αφού στη συγκεκριμένη περίπτωση υποθέσαμε ότι ο U είναι ένας $\mathbb{K}$-υπόχωρος τού V.

Ακόμη,

$$\forall i_j, 1 \le j \le n, \ \ \mathbb{R}_{i_s}[x] \subseteq \mathbb{R}_{i_j}[x].$$

Επομένως,

$$\cap_{j=1}^{n} \mathbb{R}_{i_j}[x] = \mathbb{R}_{i_s}[x].$$

(xii) Έστω ότι a, b είναι δύο πραγματικοί αριθμοί με $a < b$ και $\mathcal{F}(a, b)$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ στο κλειστό διάστημα $[a, b]$.

(a) Να δειχθεί ότι το $\mathcal{F}(a, b)$ είναι ένας $\mathbb{R}$-υπόχωρος τού χώρου $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

(b) Θεωρώντας τα πολυώνυμα ως πολυωνυμικές συναρτήσεις, να δειχθεί ότι ο χώρος $\mathbb{R}[x]$ αποτελεί έναν $\mathbb{R}$-υπόχωρο τού $\mathcal{F}(a, b)$.

Λύση (xii)
Προτείνουμε την επίλυσή της από τον αναγνώστη.

Τι ειπαν οι Οικονομολογοι για τα Μαθηματικα
Bagehot, Walter (1826–1877)

Η ζωή είναι το σχολείο τής πιθανότητας.

Οι Ασκήσεις επιλύονται από τους διδάσκοντες Ν.Μαρμαρίδη και Κ. Μέξη στο πλαίσιο τού Μαθήματος Γραμμική Άλγεβρα Ι, α' Εξαμήνου Σπουδών Τμήματος Μαθηματικών, Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Ιωάννινα, Νοέμβριος 2004

3.2 Γραμμικές Απεικονίσεις, Ισομορφισμοί

(i) Έστω $\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ η (μοναδική) $\mathbb{C}$-γραμμική απεικόνιση που οι τιμές της πάνω στη κανονική βάση $\mathcal{E} = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ τού $\mathbb{C}^3$ είναι οι

$$\phi(\epsilon_1) = (1, 0, i), \quad \phi(\epsilon_2) = (0, 1, 1) \quad \phi(\epsilon_3) = (i, 1, 0).$$

Να εξετασθεί αν η ϕ είναι ένας $\mathbb{C}$-ισομορφισμός.

Λύση (i)
Επειδή πρόκειται για μια $\mathbb{C}$-γραμμική απεικόνιση από έναν τρισδιάστατο χώρο στον εαυτό του, η ϕ είναι ένας ισομορφισμός αν και μόνο αν είναι ένας επιμορφισμός. Επομένως είναι αρκετό να υπολογίσουμε τη διάσταση $\dim_{\mathbb{C}}(\phi(\mathbb{C}^3))$ τής εικόνας $\phi(\mathbb{C}^3)$.
Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι η $\dim_{\mathbb{C}}(\phi(\mathbb{C}^3))$ συμπίπτει με τη βαθμίδα τού πίνακα A με γραμμές τις συνιστώσες των $\phi(\epsilon_1), \phi(\epsilon_2), \phi(\epsilon_3)$ ως προς μια βάση τού $\mathbb{C}^3$.

Σημείωση. Υπενθυμίζουμε ότι *γραμμοβαθμίδα* ενός $m \times n$ πίνακα A με συνιστώσες από ένα σώμα $\mathbb{K}$ έχουμε ονομάσει τη διάσταση τού $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου ο οποίος παραγεται από τις γραμμές τού πίνακα, που τις θεωρούμε ως στοιχεία τού $\mathbb{K}^n$. Η *στηλοβαθμίδα* τού A ορίζεται αναλόγως· πρόκειται για τη διάσταση τού χώρου ο οποίος παράγεται από τις στήλες τού πίνακα, που τις θεωρούμε ως στοιχεία τού $\mathbb{K}^m$. Τέλος, έχουμε δεχθεί ως ορθό ότι η γραμμοβαθμίδα τού A συμπίπτει με την στηλοβαθμίδα του· αυτός ο κοινός αριθμός ονομάζεται *βαθμίδα* τού A. Σε ένα συμπλήρωμα των ασκήσεων θα αποδείξουμε το προαναφερθέν αποτέλεσμα.

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι την κανονική βάση $\mathcal{E}$ τού $\mathbb{C}^3$.

Ο πίνακας A ισούται με

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Εκτελώντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς επί των γραμμών τού A, προκύπτει ο κλιμακωτός πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ο οποίος διαθέτει δύο μη-μηδενικές γραμμές. Συνεπώς, η βαθμίδα τού A ισούται με 2 και γι' αυτό $\dim_{\mathbb{C}}(\phi(\mathbb{C}^3)) = 2$. Επομένως, η γραμμική απεικόνιση ϕ δεν είναι επιμορφισμός και γι' αυτό δεν είναι ούτε ισομορφισμός.

(ii) Έστω ότι $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι η $\mathbb{R}$-γραμμική απεικόνιση που ορίζεται από τη σχέση

$$\phi(\kappa, \lambda, \mu) = (3\kappa, \kappa - \lambda, 2\kappa + \lambda + \mu).$$

Να εξεταστεί αν η ϕ είναι μια αντιστρέψιμη απεικόνιση και (στην περίπτωση που είναι) να προσδιοριστεί η τιμή τής ϕ^{-1} πάνω σε οποιοδήποτε διάνυσμα (κ, λ, μ) τού $\mathbb{R}^3$.

Λύση (ii)
Εργαζόμαστε με τρόπο ανάλογο, όπως και στο ερώτημα (i). Θα εξετάσουμε τη διάσταση $\dim_{\mathbb{R}}(\phi(\mathbb{R}^3))$ τής εικόνας $\phi(\mathbb{R}^3)$.
Θεωρούμε την κανονική βάση $\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ τού $\mathbb{R}^3$. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι η διάσταση $\dim_{\mathbb{R}}(\phi(\mathbb{R}^3))$ συμπίπτει με τη βαθμίδα τού πίνακα που έχει ως γραμμές τις συνιστώσες των διανυσμάτων $\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$. Ας ονομάσουμε A τον συγκεκριμένο πίνακα.
Για να προσδιορίσουμε τον A, πρέπει να υπολογίσουμε τις τιμές $\phi(e_1)$, $\phi(e_2)$ και $\phi(e_3)$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \phi(e_1) &= (3, 1, 2) = 3e_1 + e_2 + 2e_3, \\ \phi(e_2) &= (0, -1, 1) = -e_2 + e_3, \\ \phi(e_3) &= (0, 0, 1) = e_3. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Συνεπώς, ο A ισούται με

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Η βαθμίδα τού A ισούται με 3, αφού εκτελώντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς επί των γραμμών τού A, προκύπτει ο κλιμακωτός πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

που διαθέτει τρεις μη-μηδενικές γραμμές. Συνεπώς, η γραμμοβαθμίδα τού A ισούται με 3 και γι' αυτό $\dim_{\mathbb{R}}(\phi(\mathbb{R}^3)) = 3$. Επομένως, η γραμμική απεικόνιση ϕ είναι ένας ισομορφισμός, δηλαδή υπάρχει η αντίστροφη γραμμική απεικόνιση ϕ^{-1}.
Θα προσδιορίσουμε τώρα την τιμή τής ϕ^{-1} πάνω σε οποιοδήποτε διάνυσμα $v = (\kappa, \lambda, \mu) = \kappa e_1 + \lambda e_2 + \mu e_3$ τού $\mathbb{R}^3$.
Επειδή η ϕ^{-1} είναι $\mathbb{R}$-γραμμική έχουμε:

$$\phi^{-1}(v) = \phi^{-1}(\kappa e_1 + \lambda e_2 + \mu e_3) = \kappa\phi^{-1}(e_1) + \lambda\phi^{-1}(e_2) + \mu\phi^{-1}(e_3).$$

Άρα, για να προσδιορίσουμε την τιμή $\phi^{-1}(v)$, αρκεί να υπολογίσουμε τις $\phi^{-1}(e_1)$, $\phi^{-1}(e_2)$ και $\phi^{-1}(e_3)$. Εφαρμόζοντας την ϕ^{-1} στις σχέσεις $(*)$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} e_1 &= \phi^{-1}(\phi(e_1)) = 3\phi^{-1}(e_1) + \phi^{-1}(e_2) + 2\phi^{-1}(e_3), \\ e_2 &= \phi^{-1}(\phi(e_2)) = -\phi^{-1}(e_2) + \phi^{-1}(e_3), \\ e_3 &= \phi^{-1}(\phi(e_3)) = \phi^{-1}(e_3). \end{aligned} \tag{$**$}$$

Οι ανωτέρω τρεις σχέσεις αποτελούν ένα σύστημα με αγνώστους τα $\phi^{-1}(e_i)$, $1 \le i \le 3$. Επιλύοντας το σύστημα έχουμε:

$$\begin{aligned} &\phi^{-1}(e_3) = e_3, \\ &\phi^{-1}(e_2) = -e_2 + e_3, \\ &\phi^{-1}(e_1) = \tfrac{1}{3}(e_1 - \phi^{-1}(e_2) - 2\phi^{-1}(e_3)) = \tfrac{1}{3}(e_1 + e_2 - e_3 - 2e_3) = \tfrac{1}{3}(e_1 + e_2 - 3e_3). \end{aligned}$$

Έτσι, αν το $v = \kappa e_1 + \lambda e_2 + \mu e_3$, τότε η τιμή του $\phi^{-1}(v)$ ισούται με

$$\begin{aligned}&\phi^{-1}(v) = \kappa\phi^{-1}(e_1) + \lambda\phi^{-1}(e_2) + \mu\phi^{-1}(e_3) = \\ &\frac{\kappa}{3}(e_1 + e_2 - 3e_3) + \lambda(-e_2 + e_3) + \mu e_3 = \\ &\frac{\kappa}{3}e_1 + \frac{\kappa - 3\lambda}{3}e_2 + (-\kappa + \lambda + \mu)e_3.\end{aligned}$$

(iii) (a) Έστω ότι $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ και $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ είναι δύο $\mathbb{R}$-γραμμικές απεικονίσεις. Να δειχθεί ότι η γραμμική απεικόνιση $\psi \circ \phi$ δεν είναι αντιστρέψιμη.

(b) Να γενικεύσετε την προηγούμενη παρατήρηση σε ένα θεώρημα και εν συνεχεία να εκτελέσετε την απόδειξή του.

Λύση (iii)
(a)
Εάν η $\psi\circ\phi$ ήταν ένας ισομορφισμός (και συνεπώς μια αντιστρέψιμη απεικόνιση), τότε θα ήταν η ϕ ένας μονομορφισμός και γι' αυτό ο πυρήνας $\mathrm{Ker}(\phi)$ θα συνέπιπτε με το μονοσύνολο $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Ωστόσο αυτό είναι αδύνατο, αφού από τον τύπο

$$3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(\phi) + \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(\phi)$$

έπεται ότι $\mathrm{Ker}(\phi) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, αφού $\mathrm{Im}(\phi) \subseteq \mathbb{R}^2$ και συνεπώς $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(\phi) \leq 2$.
(b)
Η γενίκευση τής προηγούμενης παρατήρησης έχει ως εξής:
Έστω ότι V, W και Z είναι $\mathbb{K}$-διανυσματικοί χώροι με $\dim_{\mathbb{K}} V > \dim_{\mathbb{K}} W$. Εάν οι $\phi : V \to W$ και $\psi : W \to Z$ είναι δύο $\mathbb{K}$-γραμμικές απεικονίσεις, τότε η σύνθεση $\psi \circ \phi$ δεν είναι ποτέ ένας μονομορφισμός και γι' αυτό ούτε ισομορφισμός.
Πράγματι, αν η $\psi \circ \phi$ ήταν μονομορφισμός, τότε θα ήταν επίσης και η ϕ ένας μονομορφισμός. Όμως από τον τύπο

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(\phi) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(\phi)$$

έπεται ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(\phi) > 0$, αφού $\dim_{\mathbb{K}} V > \dim_{\mathbb{K}} W \geq \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(\phi)$. Άρα, $\{0_{\mathbb{K}}\} \subsetneq \mathrm{Ker}(\phi)$.

(iv) Να προσδιοριστούν δύο γραμμικές απεικονίσεις ϕ και ψ από το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^2$ με $\phi \circ \psi = \zeta_{\mathbb{R}^2}$ αλλά $\psi \circ \phi \neq \zeta_{\mathbb{R}^2}$. (Με $\zeta_{\mathbb{R}^2}$ συμβολίζουμε τη μηδενική απεικόνιση από το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^2$.)

Λύση (iv)
Έστω ότι οι ϕ και ψ είναι δύο γραμμικές απεικονίσεις από το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^2$ με $\phi\circ\psi = \zeta_{\mathbb{R}^2}$, $(*)$. Είνα φανερό, ότι καμιά από τις δύο αυτές απεικονίσεις δεν μπορεί να είναι ισομορφισμός, αφού στην αντίθετη περίπτωση έπεται (λόγω τής $(*)$) ότι η άλλη είναι η μηδενική απεικόνιση. Αλλά καμιά από τις δύο απεικονίσεις δεν μπορεί να είναι η μηδενική απεικόνιση, αφού $\psi \circ \phi \neq \zeta_{\mathbb{R}^2}$, $(**)$.
Συνεπώς, $\dim \mathrm{Ker}(\phi) = 1 = \dim \mathrm{Ker}(\psi)$, $\dim \mathrm{Im}(\phi) = 1 = \dim \mathrm{Im}(\psi)$ και επειδή $\mathrm{Im}(\psi) \subseteq \mathrm{Ker}(\phi)$ (και πάλι λόγω τής $(*)$), έπεται ότι $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Ker}(\phi)$. Ακόμη, $\mathrm{Im}(\phi) \cap \mathrm{Ker}(\psi) = \{0_{\mathbb{R}}\}$, αφού αν $\mathrm{Im}(\phi) \cap \mathrm{Ker}(\psi) \neq \{0_{\mathbb{R}}\}$, τότε θα

είχαμε $\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Im}(\phi) \cap \mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Ker}(\psi)$ επειδή $\dim \mathrm{Im}(\phi) = 1 = \dim \mathrm{Ker}(\psi)$. Όμως δεν μπορεί να έχουμε $\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Ker}(\psi) =$, λόγω τής $(**)$.
Επομένως, αναζητούμε δύο γραμμικές απεικονίσεις $\phi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με

(a) $\dim \mathrm{Im}(\phi) = \dim \mathrm{Im}(\psi) = 1$,

(b) $\dim \mathrm{Ker}(\phi) = \dim \mathrm{Ker}(\psi) = 1$,

(c) $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Ker}(\phi)$ και

(d) $\mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\phi) = \{0_{\mathbb{R}}\}$.

Έστω $\mathcal{B} = \{(a_1, a_2), (b_1, b_2)\}$ μια βάση τού $\mathbb{R}^2$. Θεωρούμε τις ακόλουθες δύο $\mathbb{R}$-γραμμικές απεικονίσεις:

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \kappa(a_1, a_2) + \lambda(b_1, b_2) \mapsto \kappa(a_1, a_2),$$
$$\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \kappa(a_1, a_2) + \lambda(b_1, b_2) \mapsto (\kappa + \lambda)(b_1, b_2).$$

Αυτές οι δύο γραμμικές απεικονίσεις ικανοποιούν τα (a), (b), (c) και (d) που προαναφέραμε. Έχουμε:

$$(\phi \circ \psi)(\kappa(a_1, a_2) + \lambda(b_1, b_2)) = \phi((\kappa + \lambda)(b_1, b_2)) = (\kappa + \lambda)\phi((b_1, b_2)) = (0, 0)$$

και

$$(\psi \circ \phi)(\kappa(a_1, a_2) + \lambda(b_1, b_2)) = \psi(\kappa(a_1, a_2)) = \kappa\phi((a_1, a_2)) = \kappa(b_1, b_2).$$

Συνεπώς,

$$\phi \circ \psi = \zeta_{\mathbb{R}^2}$$

και

$$\psi \circ \phi \neq \zeta_{\mathbb{R}^2}.$$

Προτείνουμε στον αναγνώστη, αν το επιθυμεί, να προσδιορίσει κατά τα ανωτέρω εντελώς συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα.

(v) Έστω ότι V και W είναι δύο $\mathbb{K}$-γραμμικοί χώροι και

$$V \times W = \{(v, w) \mid v \in V, w \in W\}$$

το καρτεσιανό γινόμενο των V και W.
Θεωρούμε τις ακόλουθες απεκονίσεις:

$$+ : (V \times W) \times (V \times W) \to (V \times W), \quad ((v_1, w_1), (v_2, w_2)) \mapsto (v_1 + v_2, w_1 + w_2),$$

όπου η πρόσθεση στη πρώτη (αντιστοίχως δεύτερη) συνιστώσα είναι η πρόσθεση τού V (αντιστοίχως τού W)
και

$$\cdot : \mathbb{K} \times (V \times W) \to (V \times W), \quad (\lambda, (v, w)) \mapsto (\lambda v, \lambda w),$$

όπου ο πολλαπλασιασμός στη πρώτη (αντιστοίχως δεύτερη) συνιστώσα είναι ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός των στοιχείων τού $\mathbb{K}$ με τα στοιχεία τού V (αντιστοίχως τού W).

(a) Να δειχθεί ότι η τριάδα $(V \times W, +, \cdot)$ αποτελεί έναν $\mathbb{K}$-διανυσματικό χώρο. (Ο συγκεκριμένος χώρος ονομάζεται το *ευθύ γινόμενο* των χώρων V και W.)

(b) Εάν οι $\mathbb{K}$-χώροι V και W έχουν διαστάσεις $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, αντιστοίχως, τότε να υπολογιστεί η διάσταση τού $V \times W$.

(c) Έστω ότι οι V και W αποτελούν $\mathbb{K}$-υπόχωρους ενός $\mathbb{K}$-χώρου U. Να δειχθεί ότι η απεικόνιση

$$\phi : V \times W \to V + W, \quad (v, w) \mapsto v + w$$

είναι $\mathbb{K}$-γραμμική.

(d) Να δειχθεί ότι ο πυρήνας $\mathrm{Ker}\phi$ τής ανωτέρω απεικόνισης ισούται με

$$\{(u, -u) \mid \text{ όπου } u \in V \cap W\}.$$

(e) Να δειχθεί ότι

$$\dim_{\mathbb{K}}(V + W) = \dim_{\mathbb{K}}(V) + \dim_{\mathbb{K}}(W) - \dim_{\mathbb{K}}(V \cap W).$$

(f) Να δειχθεί ότι οι απεικονίσεις

$$\iota_V : V \to V \times W, \quad v \mapsto (v, 0_W) \quad \text{και} \quad \iota_W : W \to V \times W, \quad w \mapsto (0_V, w)$$

είναι $\mathbb{K}$-γραμμικοί μονομορφισμοί.

(g) Να δειχθεί ότι οι απεικονίσεις

$$\pi_V : V \times W \to V, \quad (v, w) \mapsto v \quad \text{και} \quad \pi_W : V \times W \to W, \quad (v, w) \mapsto w$$

είναι $\mathbb{K}$-γραμμικοί επιμορφισμοί με $\mathrm{Ker}\pi_V = \{0_V\} \times W$ και $\mathrm{Ker}\pi_W = V \times \{0_W\}$.

Λύση (v)
(a) Προτρέπουμε τον αναγνώστη να αποδείξει μόνος του το συγκεκριμένο υποερώτημα.
(b)
Έστω $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ μια βάση τού V και $\mathcal{B} = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n\}$ μια βάση τού W. Το σύνολο $\mathcal{D} = \{(e_i, 0_W), (0_V, \epsilon_j) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ αποτελεί μια βάση τού $V \times W$.
Πράγματι, αν

$$\sum_{i=1}^{m} \kappa_i (e_i, 0_W) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j (0_V, \epsilon_j) = (0_V, 0_W), \kappa_i, \lambda_j \in \mathbb{K},$$

τότε

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \kappa_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \epsilon_j \right) = (0_V, 0_W)$$

και γι' αυτό

$$\sum_{i=1}^{m} \kappa_i e_i = 0_V, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \epsilon_j = 0_W.$$

Εφόσον το σύνολο $\mathcal{B} \subset V$ (αντιστοίχως $\mathcal{C} \subset W$) είναι $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητο, έπεται ότι $\forall i,\ 1 \leq i \leq m,\ \kappa_i = 0_{\mathbb{K}}$ (αντιστοίχως $\forall j,\ 1 \leq j \leq n,\ \lambda_j = 0_{\mathbb{K}}$). Άρα, το σύνολο $\mathcal{D}$ είναι $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητο.
Υπολείπεται η απόδειξη ότι το $\mathcal{D}$ αποτελεί ένα σύνολο γεννητόρων τού $V \times W$.
Πράγματι, αν $(v, w) \in V \times W$, τότε

$$(v, w) = (v, 0_W) + (0_V, w) = \left(\sum_{i=1}^{m} \kappa_i e_i, 0_W \right) + \left(0_V, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \epsilon_j \right) =$$
$$\sum_{i=1}^{m} \kappa_i (e_i, 0_W) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (0_V, \epsilon_j).$$

Επομένως, ο χώρος $V \times W$ έχει $\mathbb{K}$-διάσταση $\dim_{\mathbb{K}} V + \dim_{\mathbb{K}} W = m + n$.
(c)
Προτρέπουμε τον αναγνώστη να επιβεβαιώσει με τις δικές του δυνάμεις ότι η απεικόνιση ϕ είναι $\mathbb{K}$-γραμμική.
(d)
Ένα στοιχείο (v, w) ανήκει στον $\mathrm{Ker}(\phi)$, αν και μόνο αν $\phi((v, w)) = v + w = 0_U$, αν και μόνο αν $v = -w$. Επομένως, το (v, w) ανήκει στον $\mathrm{Ker}(\phi)$ αν και μόνο αν $v = u$ και $w = -u$, όπου το στοιχείο u ανήκει στην τομή $V \cap W$.
(e)
Η γραμμική απεικόνιση ϕ είναι ένας επιμορφισμός, αφού κάθε στοιχείο $v + w \in V + W$ είναι εικόνα τού ζεύγους $(v, w) \in V \times W$, δηλαδή $\mathrm{Im}(\phi) = V + W$. Από τον θεμελιώδη τύπο των διαστάσεων που εδώ παίρνει τη μορφή

$$\dim_{\mathbb{K}}(V \times W) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(\phi) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(\phi)$$

συμπεραίνουμε

$$\dim_{\mathbb{K}}(V \times W) = \dim_{\mathbb{K}}(V + W) + \dim_{\mathbb{K}}(V \cap W).$$

Ώστε,

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) + \dim_{\mathbb{K}}(W) - \dim_{\mathbb{K}}(V \cap W) = \dim_{\mathbb{K}}(V + W).$$

(f) και (g)
Προτρέπουμε τον αναγνώστη να απαντήσει στα συγκεκριμένα υποερωτήματα με τις δικές του δυνάμεις.

(vi) Έστω ότι οι V και W αποτελούν $\mathbb{K}$-υπόχωρους ενός $\mathbb{K}$-χώρου U διάστασης $\dim_{\mathbb{K}} U = 7$.
Εάν $\dim_{\mathbb{K}} V = 4$ και $\dim_{\mathbb{K}} W = 5$, τότε να εξεταστεί ποιες είναι οι δυνατές τιμές για την $\mathbb{K}$-διάσταση τής τομής $V \cap W$.

Λύση (vi)
Από την υπόθεση έπεται ότι $\dim_{\mathbb{K}}(V) + \dim_{\mathbb{K}}(W) = 4 + 5 = 9$. Από τον τύπο τής άσκησης (e) προκύπτει επίσης

$$9 - \dim_{\mathbb{K}}(V + W) = \dim_{\mathbb{K}}(V \cap W).$$

Από τις σχέσεις $W \subseteq V + W \subseteq U$ συμπεραίνουμε ότι $5 \leq \dim_{\mathbb{K}}(V + W) \leq 7$. Με άλλα λόγια, η διάσταση $\dim_{\mathbb{K}}(V + W)$ μπορεί να ισούται με 5 ή 6 ή 7. Άρα, η διάσταση $\dim_{\mathbb{K}}(V \cap W)$ μπορεί να ισούται με 4 ή 3 ή 2 αντιστοίχως.

ΤΙ ΕΙΠΑΝ ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Kaplansky, Irving (1917–)

Εμείς (αυτός και ο Halmos) έχουμε τις ίδιες απόψεις για τη Γραμμική Άλγεβρα: σκεφτόμαστε χωρίς να χρησιμοποιούμε βάσεις, γράφουμε χωρίς να χρησιμοποιούμε βάσεις£ όταν όμως δεν λειτουργούν τα τσιπάκια, τότε κλείνουμε την πόρτα τού γραφείου μας και εκτελούμε υπολογισμούς με πίνακες σαν παλαβοί.

Οι Ασκήσεις επιλύονται από τους διδάσκοντες Ν.Μαρμαρίδη και Κ. Μέξη στο πλαίσιο τού Μαθήματος Γραμμική Άλγεβρα Ι, α' Εξαμήνου Σπουδών Τμήματος Μαθηματικών, Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Ιωάννινα, Δεκέμβριος 2004

3.3 Αναπαράσταση των γραμμικών Απεικονίσεων με Πίνακες

(i) Έστω $\phi : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ η $\mathbb{K}$-γραμμική απεικόνιση

$$(x, y, z) \mapsto (2x - z, x + y - z, z).$$

(a) Να ευρεθεί ο πίνακας $A_{\mathcal{B}}(\phi)$ που αναπαριστά τη ϕ ως προς τη κανονική βάση $\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$.

(b) Να ευρεθεί ο πίνακας $A_{C}(\phi)$ που αναπαριστάνει τη ϕ ως προς τη βάση $C = \{\epsilon_1 = (1, 0, 1), \epsilon_2 = (0, 1, 0), \epsilon_3 = (1, 1, 0)\}$.

(c) Να προσδιοριστεί ο αντιστρέψιμος πίνακας P με $A_C(\phi) = P^{-1}A_{\mathcal{B}}(\phi)P$.

(d) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, να υπολογιστούν οι δυνάμεις $A_{\mathcal{B}}(\phi)^n$.

Λύση (i)
(a) Ο πίνακας $A_{\mathcal{B}}(\phi)$ που αναπαριστά τη γραμμική απεικόνιση ϕ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι ο 3×3 πίνακας που οι συνιστώσες τής i-οστής του στήλης, $\forall i, 1 \le i \le 3$, συμπίπτουν με τις συνιστώσες τής εικόνας $\phi(e_i)$ όταν αυτή είναι εκφρασμένει ως γραμμικός συνδυασμός τής βάσης $\mathcal{B}$. Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε τις συνιστώσες των $\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)$ ως προς $\mathcal{B}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\phi(e_1) &= \phi((1, 0, 0)) = (2, 1, 0) = 2e_1 + 1e_2 + 0e_3,\\
\phi(e_2) &= \phi((0, 1, 0)) = (0, 1, 0) = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3,\\
\phi(e_3) &= \phi((0, 0, 1)) = (-1, -1, 1) = (-1)e_1 + (-1)e_2 + 1e_3.
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$A_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b)
Ο πίνακας $A_C(\phi)$ που αναπαριστά τη γραμμική απεικόνιση ϕ ως προς τη βάση C είναι ο 3×3 πίνακας που οι συνιστώσες τής i-οστής του στήλης, $\forall i, 1 \le i \le 3$, συμπίπτουν με τις συνιστώσες τής εικόνας $\phi(\epsilon_i)$ όταν αυτή είναι εκφρασμένη ως γραμμικός συνδυασμός τής βάσης C. Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε τις εικόνες $\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)$ και να τις εκφράσουμε ως γραμμικό συνδυασμό των $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$.
Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\phi(\epsilon_1) &= (1, 0, 1) = 1(1, 0, 1) + 0(0, 1, 0) + 0(1, 1, 0)\\
\phi(\epsilon_2) &= (0, 1, 0) = 0(1, 0, 1) + 1(0, 1, 0) + 0(1, 1, 0)\\
\phi(\epsilon_3) &= (2, 2, 0) = 0(1, 0, 1) + 0(0, 1, 0) + 2(1, 1, 0).
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$A_C(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c)
Οι πίνακες $A_{\mathcal{B}}(\phi)$ και $A_{\mathcal{C}}(\phi)$ αναπαριστούν τη γραμμική απεικόνιση ϕ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$. Σύμφωνα με τη θεωρία που αναπτύξαμε στο μάθημα τής Γραμμικής Άλγεβρας Ι, γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένας αντιστρέψιμος 3×3 πίνακας P με $A_{\mathcal{C}}(\phi) = P^{-1}A_{\mathcal{B}}(\phi)P$, όπου $P = P_{\mathcal{BC}}$ είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{B}$ στη βάση $\mathcal{C}$ και $P^{-1} = P_{\mathcal{CB}}$ είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{C}$ στη βάση $\mathcal{B}$.
Για να προσδιορίσουμε τον P αρκεί να εκφράσουμε τα στοιχεία τής βάσης $\mathcal{C}$ ως $\mathbb{K}$-γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων τής $\mathcal{B}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= (1, 0, 1) = 1e_1 + 0e_2 + 1e_1,\\
\epsilon_2 &= (0, 1, 0) = 0e_1 + 1e_2 + 0e_1,\\
\epsilon_3 &= (1, 1, 0) = 1e_1 + 1e_2 + 0e_1.
\end{aligned}$$

Η i-οστή στήλη τού P έχει ως συνιστώσες τις αντίστοιχες συνιστώσες τού διανύσματος ϵ_i, $1 \leq i \leq 3$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$. Άρα,

$$P = P_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Για να προσδιορίσουμε τον $P^{-1} = P_{\mathcal{CB}}$ αρκεί να εκφράσουμε τα στοιχεία τής βάσης $\mathcal{B}$ ως $\mathbb{K}$-γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων τής $\mathcal{C}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
e_1 &= (1, 0, 0) = 0(1, 0, 1) + (-1)(0, 1, 0) + 1(1, 1, 0) &&= 0\epsilon_1 + (-1)\epsilon_2 + 1\epsilon_3,\\
e_2 &= (0, 1, 0) = 0(1, 0, 1) + 1(0, 1, 0) + 0(1, 1, 0) &&= 0\epsilon_1 + 1\epsilon_2 + 0\epsilon_3,\\
e_3 &= (0, 0, 1) = 1(1, 0, 1) + 1(0, 1, 0) + (-1)(1, 1, 0) &&= 1\epsilon_1 + 1\epsilon_2 + (-1)\epsilon_3.
\end{aligned}$$

Η i-οστή στήλη τού P^{-1} έχει ως συνιστώσες τις αντίστοιχες συνιστώσες τού διανύσματος e_i, $1 \leq i \leq 3$ ως προς τη βάση $\mathcal{C}$. Άρα,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Σημείωση. Στην περίπτωση που ο $P = P_{\mathcal{BC}}$ έχει ήδη προσδιοριστεί, μπορεί κανείς να υπολογίσει απευθείας τον P^{-1}, αφού πρόκειται ακριβώς για τον αντίστροφο τού P. Προτείνουμε στον αναγνώστη να ανακαλέσει στη μνήμη του το πώς υπολογίζεται ο αντίστροφος ενός αντιστρέψιμου πίνακα.
(d)
Υπενθυμίζουμε ότι ο υπολογισμός των n-οστών δυνάμεων ενός διαγώνιου (και προφανώς τετραγωνικού) πίνακα Δ είναι εύκολος, αφού η n-οστή δύναμή του είναι επίσης ένας διαγώνιος πίνακας και αφού η συνιστώσα στη θέση (i, i) ισούται με την n-οστή δύναμη τής συνιστώσας στη θέση (i, i) τού αρχικού πίνακα Δ.
Εδώ θέλουμε να υπολογίσουμε τις δυνάμεις $A_{\mathcal{B}}(\phi)^n$. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας $A_{\mathcal{C}}(\phi)$ είναι διαγώνιος και ότι $A_{\mathcal{C}}(\phi) = P^{-1}A_{\mathcal{B}}(\phi)P$. Συνεπώς, $A_{\mathcal{B}}(\phi) = PA_{\mathcal{C}}(\phi)P^{-1}$ και γι' αυτό

$$\begin{aligned}
A_{\mathcal{B}}(\phi)^n = \;& (PA_{\mathcal{C}}(\phi)P^{-1})^n = (PA_{\mathcal{C}}(\phi)P^{-1})(PA_{\mathcal{C}}(\phi)P^{-1})\dots(PA_{\mathcal{C}}(\phi)P^{-1}) = \\
& PA_{\mathcal{C}}(\phi)(P^{-1}P)A_{\mathcal{C}}(\phi)(P^{-1}\dots P)A_{\mathcal{C}}(\phi)P^{-1} = PA_{\mathcal{C}}(\phi)^nP^{-1}.
\end{aligned} \tag{***}$$

(Η απόδειξη τής ανωτέρω σχέσης μπορεί να εκτελεστεί είτε με επαγωγή ως προς τη δύναμη n είτε με τη βοήθεια τής επόμενης παρατήρησης: Το $(PA_C(\phi)P^{-1})^n$ διαθέτει n το πλήθος παράγοντες τής μορφής $PA_C(\phi)P^{-1}$. Στο γινόμενο δύο διαδοχικών όρων $(PA_C(\phi)P^{-1})(PA_C(\phi)P^{-1})$ οι ενδιαμέσοι παράγοντες $P^{-1}P$ ισούνται με τον ταυτικό πίνακα και έτσι το $(PA_C(\phi)P^{-1})(PA_C(\phi)P^{-1})$ ισούται με $PA_C(\phi)^2P^{-1}$. Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στο αποτέλεσμα (∗∗∗).)
Άρα,

$$A_{\mathcal{B}}(\phi)^n = PA_C(\phi)^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1-2^n \\ -1+2^n & 1 & 1-2^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Έστω ότι $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι η $\mathbb{R}$-γραμμική απεικόνιση που έχει τον πίνακα

$$A_C(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ως πίνακα αναπαράστασης ως προς τη βάση

$$C = \left\{ \epsilon_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \ \epsilon_2 = (0, 1, 0), \ \epsilon_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$$

τού $\mathbb{R}^3$ και ότι $\mathcal{B} = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ είναι η κανονική βάση τού $\mathbb{R}^3$.

(a) Για κάθε $v \in \mathbb{R}^3$, να υπολογιστεί η τιμή $\phi(v)$.

(b) Να ευρεθεί ο πίνακας $A_{\mathcal{B}}(\phi)$ που αναπαριστά τη ϕ ως προς την κανονική βάση $\mathcal{B}$.

(c) Να προσδιοριστεί ο αντιστρέψιμος πίνακας P με $A_{\mathcal{B}}(\phi) = P^{-1}A_C(\phi)P$.

(d) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, να υπολογιστούν οι δυνάμεις $A_{\mathcal{B}}(\phi)^n$.

Λύση (ii)
(a) Ο πίνακας A αναπαριστά τη ϕ ως προς τη βάση C. Επομένως, για να υπολογίσουμε την τιμή $\phi(v)$ πρέπει να εκφράσουμε το v ως $\mathbb{R}$-γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων τής βάσης C. Το v είναι στοιχείο τού $\mathbb{R}^3$, δηλαδή μια τριάδα (α, β, γ) πραγματικών αριθμών· γι' αυτό το v γράφεται ως $v = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$, όπου τα e_1, e_2, e_3 είναι τα διανύσματα της κανονικής βάσης $\mathcal{B}$.
Για να υπολογίσουμε τις συνιστώσες τού v ως προς τη βάση C χρειαζόμαστε τον πίνακα μετάβασης $P_{C\mathcal{B}}$ από τη βάση C στη βάση $\mathcal{B}$. Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε i, $1 \leq i \leq 3$, οι συνιστώσες τής i-οστής στήλης τού $P_{C\mathcal{B}}$ συμπίπτουν με τις συνιστώσες τού e_i, όταν αυτό έχει εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων τής C. Υπενθυμίζουμε ακόμη ότι ο $P_{C\mathcal{B}}$ ισούται με $P_{\mathcal{B}C}^{-1}$.

Ο υπολογισμός τού $P_{\mathcal{BC}}$ είναι άμεσος, αφού οι συνιστώσες από την i-οστή στήλη τού συγκεκριμένου πίνακα συμπίπτουν με τις συνιστώσες (ως προς τη κανονική βάση $\mathcal{B}$) τού στοιχείου ϵ_i τής βάσης $\mathcal{C}$.
Επομένως,

$$P_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

και

$$P_{\mathcal{CB}} = P_{\mathcal{BC}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Τώρα για τις συνιστώσες $(\alpha', \beta', \gamma')$ τού $v = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ ως προς τη βάση $\mathcal{C}$ έχουμε:

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = P_{\mathcal{CB}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha + \gamma) \\ \beta \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha - \gamma) \end{pmatrix}$$

και έτσι το διάνυσμα v ισούται με

$$v = \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha + \gamma)\epsilon_1 + \beta\epsilon_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha - \gamma)\epsilon_3$$

Τώρα, η εικόνα τού v ισούται με $\phi(v) = \kappa\epsilon_1 + \lambda\epsilon_2 + \mu\epsilon_3$, όπου

$$\begin{pmatrix} \kappa \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = A_{\mathcal{C}}(\phi) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha + \gamma) \\ \beta \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha - \gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha + \gamma) \\ \beta \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha - \gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}(\alpha + \gamma) \\ 2\beta \\ -2\sqrt{2}(\alpha - \gamma) \end{pmatrix},$$

δηλαδή

$$\phi(v) = \sqrt{2}(\alpha + \gamma)\epsilon_1 + 2\beta\epsilon_2 - 2\sqrt{2}(\alpha - \gamma)\epsilon_3. \qquad (*)$$

(Μην λησμονείτε ότι οι α, β, γ είναι οι συνιστώσες τού v ως προς την κανονική βάση $\mathcal{B}$.)
(ii)
Από τον ανωτέρω τύπο $(*)$ μπορούμε να αναγνωρίσουμε αμέσως τον πίνακα $A_{\mathcal{B}}(\phi)$ που αναπαριστά τη ϕ ως προς τη κανονική βάση $\mathcal{B}$, αφού αντικαθιστώντας τα ϵ_i τής βάσης $\mathcal{C}$ με τις εκφράσεις τους ως προς $\mathcal{B}$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \phi(v) = \ & \sqrt{2}(\alpha + \gamma)\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\beta(0, 1, 0) - 2\sqrt{2}(\alpha - \gamma)\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \\ & (3\alpha - \gamma, 2\beta, -\alpha + 3\gamma) \end{aligned}. \qquad (**)$$

Συνεπώς,

$$\phi(e_1) = \phi((1, 0, 0)) = (3, 0, -1), \quad \phi(e_2) = \phi((0, 1, 0)) = (0, 2, 0),$$
$$\phi(e_3) = \phi((0, 1, 0)) = (-1, 0, 3)$$

και έτσι

$$A_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c)
Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$A_{\mathcal{B}}(\phi) = P_{C\mathcal{B}}^{-1} A_C(\phi) P_{C\mathcal{B}}$$

και ότι $P_{C\mathcal{B}}^{-1} = P_{\mathcal{B}C}$. Συνεπώς,

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

(Προτείνουμε στον αναγνώστη να εκτελέσει τον πολλαπλασιασμό των τριών πινάκων που βρίσκονται στο δεξιό άκρο των ανωτέρω ισοτήτων για να «ανακαλύψει με τα δικά του μάτια» την ισότητα με τον πίνακα τού αριστερού άκρου.
(d) Υπενθυμίζουμε ότι

$$A_{\mathcal{B}}(\phi)^n = P_{C\mathcal{B}}^{-1} A_C(\phi)^n P_{C\mathcal{B}}$$

και αφού

$$A_C(\phi)^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix},$$

τελικώς προκύπτει

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{B}}(\phi)^n &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} 2^{n-1}(1+2^n) & 0 & 2^{n-1}(1-2^n) \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2^{n-1}(1-2^n) & 0 & 2^{n-1}(1+2^n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(iii) Έστω ότι f και g είναι δύο $\mathbb{K}$-γραμμικές απεικονίσεις με πίνακες αναπαράστασης

$$A_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ και } A_C(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ αντιστοίχως}$$

ως προς τη βάση $C = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$.

(a) Να υπολογιστεί η τιμή τής γραμμικής απεικόνισης $f + g : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ πάνω σε οποιοδήποτε διάνυσμα v τού $\mathbb{K}^3$.

(b) Να προσδιοριστούν οι διαστάσεις των $\mathrm{Ker}(f+g)$ και $\mathrm{Im}(f+g)$.

(c) Να υπολογιστεί ο πίνακας αναπαράστασης τής γραμμικής απεικόνισης $-3f+2g$ ως προς τη δοθείσα βάση $\mathcal{C}$.

Λύση (iii)

(a)

Σύμφωνα με τη θεωρία, γνωρίζουμε ότι ο πίνακας αναπαράστασης τού αθροίσματος $f+g$ των γραμμικών απεικονίσεων f, g *ως προς τη βάση* $\mathcal{C}$ είναι ο

$$A_{\mathcal{C}}(f+g) = A_{\mathcal{C}}(f) + A_{\mathcal{C}}(g),$$

δηλαδή

$$A_{\mathcal{C}}(f+g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Έστω ότι v είναι ένα διάνυσμα τού $\mathbb{K}^3$ και ότι (α, β, γ) είναι οι συνιστώσες του ως προς την κανονική βάση $\mathcal{B} = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ τού $\mathbb{K}^3$.

Πρώτα, θα προσδιορίσουμε τον πίνακα $A_{\mathcal{B}}(f+g)$ που αναπαριστάνει την $f+g$ ως προς την κανονική βάση $\mathcal{B}$. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ο

$$A_{\mathcal{B}}(f+g) = P_{\mathcal{BC}} A_{\mathcal{C}}(f+g) P_{\mathcal{CB}}.$$

Ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{B}$ στη βάση $\mathcal{C}$ είναι ο

$$P_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{C}$ στη βάση $\mathcal{B}$ είναι ο

$$P_{\mathcal{CB}} = P_{\mathcal{BC}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Άρα,

$$A_{\mathcal{B}}(f+g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, οι συνιστώσες $(\alpha', \beta', \gamma')$ (ως προς την κανονική βάση $\mathcal{B}$) τής εικόνας $(f+g)(v)$ τού v είναι οι

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \gamma \\ \gamma \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Έτσι έχουμε:

$$(f+g)(v) = (f+g)(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3) = (\alpha + 2\beta + \gamma)e_1 + \gamma e_2 + \alpha e_3.$$

(b)
Θα χρησιμοποιήσουμε τον γνωστό τύπο των διαστάσεων:

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(\phi) + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(\phi),$$

όπου $\phi : V \to W$ είναι μια $\mathbb{K}$-γραμμική απεικόνιση με $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$.
Παρατηρούμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε πολύ εύκολα τον πυρήνα και συνεπώς και τη διάστασή του $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(f+g)$.
Ένα στοιχείο $v = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ ανήκει στον $\operatorname{Ker}(f+g)$, αν και μόνο αν $(f+g)(v) = (\alpha + 2\beta + \gamma)e_1 + \gamma e_2 + \alpha e_3 = 0_{\mathbb{K}^3}$, αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + \gamma &= 0 \\ \gamma &= 0 \\ \alpha &= 0 \end{aligned},$$

αν και μόνο αν

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0.$$

Με άλλα λόγια, $v \in \operatorname{Ker}(f+g)$, αν και μόνο αν $v = 0_{\mathbb{K}^3}$. Ώστε, $\operatorname{Ker}(f+g) = \{0_{\mathbb{K}^3}\}$ και $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(f+g) = 0$. Έτσι, από τον τύπο των διαστάσεων έπεται ότι $3 = 0 + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(f+g) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(f+g)$.
(c)
Ο πίνακας αναπαράστασης $A_C(-3f+2g)$ τής $-3f+2g$ ως προς τη βάση C ισούται με $(-3)A_C(f) + 2A_C(g))$. Έτσι έχουμε:

$$A_C(-3f+2g) = (-3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(iv) Έστω ότι $C = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ είναι μια βάση τού $\mathbb{R}^3$ και ότι $\tau : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι ο $\mathbb{R}$-γραμμικός ενδομορφισμός που αναπαρίσταται από τον πίνακα

$$A_C(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ως προς τη βάση C. Να υπολογιστούν οι διαστάσεις $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker}(\tau)$ και $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im}(\tau)$.

Λύση (iv)
Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι η διάσταση $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im}(\tau)$ έχει οριστεί ως η βαθμίδα οποιουδήποτε πίνακα που αναπαριστά την τ ως προς κάποια βάση. Επιπλέον, υπενθυμίζουμε ότι δύο πίνακες που αναπαριστούν την ίδια γραμμική απεικόνιση ως προς δύο διαφορετικές βάσεις έχουν πάντοτε την ίδια βαθμίδα. Συνεπώς, στην παρούσα άσκηση είναι αρκετό να υπολογίσουμε τη βαθμίδα τού $A_C(\tau)$.

Προτρέπουμε τον αναγνώστη να εκτελέσει μόνος του τις απαιτούμενες πράξεις επί των γραμμών τού $A_C(\tau)$ για να τον μετατρέψει σε κλιμακωτό πίνακα. Εδώ, αναφέρουμε απλώς το αποτέλεσμα. Η βαθμίδα τού $A_C(\tau)$ ισούται με 3.

(v) Έστω ο $\mathbb{R}$-γραμμικός ενδομορφισμός

$$\tau : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x], \quad p(x) \mapsto p(x) + p'(x),$$

όπου με $p'(x)$ παριστάνεται η πρώτη παράγωγος τού πολυωνύμου $p(x)$.

(a) Να υπολογιστεί ο πίνακας αναπαράστασης τού τ ως προς τη βάση $C = \{x^4, x^3, x^2, x, 1\}$ τού $\mathbb{R}_4[x]$.

(b) Να δειχθεί ότι ο τ είναι ένας $\mathbb{R}$-ισομορφισμός

(c) Να υπολογιστεί ο πίνακας αναπαράστασης τού τ^{-1} ως προς τη βάση C.

Λύση (v)

(a)

Υπολογίζουμε τις συνιστώσες των εικόνων $\tau(x^i)$, $0 \leq i \leq 4$ των στοιχείων τής βάσης C ως προς τη βάση C. Έτσι έχουμε:

$$\begin{array}{ll}
\tau(x^4) & = 1 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot 1 \\
\tau(x^3) & = 0 \cdot x^4 + 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot 1 \\
\tau(x^2) & = 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 0 \cdot 1 \\
\tau(x) & = 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 1 \cdot 1 \\
\tau(1) & = 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 \cdot 1
\end{array} .$$

Συνεπώς, ο πίνακας αναπαράστασης τού τ ως προς τη βάση C είναι ο

$$A_C(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ο τ είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν ο πίνακας αναπαράστασής του, δηλαδή ο $A_C(\tau)$ είναι αντιστρέψιμος. Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα

$$[A_C(\tau) \mid I_5] = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

και εκτελώντας την ακολουθία των στοιχειωδών μετασχηματισμών $\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 4\Gamma_1$, $\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_2$, $\Gamma_4 \to \Gamma_4 - 2\Gamma_3$, $\Gamma_5 \to \Gamma_5 - \Gamma_4$ προκύπτει τελικώς ο πίνακας

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -24 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 24 & -6 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Επομένως, ο αντίστροφος τού $A_C(\tau)$ είναι ο

$$A_C(\tau)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -24 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 24 & -6 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άρα, ο ενδομορφισμός τ είναι ένας ισομορφισμός και γι' αυτό υπάρχει ο αντίστροφος ενδομορφισμός τ^{-1}.

(c)

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ο πίνακας αναπαράστασης $A_C(\tau^{-1})$ τού τ^{-1} ως προς τη βάση C ισούται με τον $A_C(\tau)^{-1}$. Αλλά αυτόν τον πίνακα τον υπολογίσαμε ήδη στο υποερώτημα (b). Έτσι έχουμε:

$$A_C(\tau^{-1}) = A_C(\tau)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -24 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 24 & -6 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(vi) Έστω η $\mathbb{R}$-γραμμική απεικόνιση

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (2x + 5y - 3z, x - 4y + 4z).$$

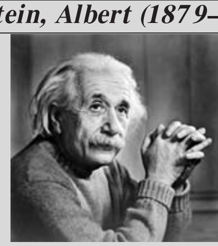
(a) Να υπολογιστεί ο πίνακας αναπαράστασης $A_{\mathcal{B}_3\mathcal{B}_2}(\phi)$ τής ϕ ως προς τις κανονικές βάσεις $\mathcal{B}_3$ και $\mathcal{B}_2$ των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$ αντιστοίχως.

(b) Να υπολογιστεί ο πίνακας αναπαράστασης $A_{C_3C_2}(\phi)$ τής ϕ ως προς τις βάσεις $C_3 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ και $C_2 = \{(1, 3), (2, 5)\}$ των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$ αντιστοίχως.

(c) Να ευρεθούν αντστρέψιμοι πίνακες P και Q με $A_{C_3C_2}(\phi) = QA_{\mathcal{B}_3\mathcal{B}_2}(\phi)P$.

Λύση (vi)

Προτείνουμε να δοκιμάσει ο αναγνώστης τις «δικές του δυνάμεις» κατά την επίλυση τής συγκεκριμένης άσκησης.

Τι είπαν οι Φυσικοί για τα Μαθηματικά
Einstein, Albert (1879–1955)

Όταν οι νόμοι των Μαθηματικών αναφέρονται στην πραγματικότητα, τότε δεν είναι βέβαιοι και όταν είναι βέβαιοι, τότε δεν αναφέρονται στην πραγματικότητα.

Οι Ασκήσεις επιλύονται από τους διδάσκοντες Ν.Μαρμαρίδη και Κ. Μέξη στο πλαίσιο τού Μαθήματος Γραμμική Άλγεβρα Ι, α' Εξαμήνου Σπουδών Τμήματος Μαθηματικών, Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

3.4 Ορίζουσες

(i) Έστω A ένας 4×4 πίνακας με ορίζουσα $\det A = 3$. Να προσδιοριστεί η ορίζουσα $\det \widetilde{A}$ τού συμπληρωματικού $\widetilde{A}$ τού πίνακα A.

Λύση (i)
Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι για κάθε $n \times n$ πίνακα A ισχύει: $A\widetilde{A} = (\det A)I_n = \widetilde{A}A$. Στη συγκεκριμένη άσκηση ο A είναι ένας 4×4 πίνακας με ορίζουσα ίση με 3. Συνεπώς,

$$A\widetilde{A} = 3I_4 \Rightarrow \det(A\widetilde{A}) = \det(3I_4) = 3^4 \Rightarrow \det\widetilde{A} = (\det A)^{-1}3^4 = 3^{-1}3^4 = 3^3.$$

(ii) Να δειχθεί ότι ο $n \times n$ πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο συμπληρωματικός $\widetilde{A}$ τού πίνακα A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Λύση (ii)
Υπενθυμίζουμε ότι ένας $n\times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν $\det A \neq 0$.
Υπενθυμίζουμε ακόμη ότι από τη (γνωστή) σχέση $A\widetilde{A} = (\det A)I_n = \widetilde{A}A (*)$ έχουμε $(\det A)(\det\widetilde{A}) = (\det A)^n (**)$.
Έστω ότι ο $\widetilde{A}$ δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε $\det\widetilde{A} = 0$ και από τη σχέση $(**)$ έπεται $(\det A)^n = 0$· άρα $(\det A) = 0$ και γι' αυτό ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.
Έστω ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε $\det A = 0$ και από την $(*)$ έπεται $A\widetilde{A} = 0I_n = \mathbf{0}$. Εάν ήταν ο $\widetilde{A}$ αντιστρέψιμος, τότε θα είχαμε

$$A = A(\widetilde{A}\widetilde{A}^{-1}) = (A\widetilde{A})\widetilde{A}^{-1}) = (0I_n)\widetilde{A}^{-1} = \mathbf{0},$$

δηλαδή ο πίνακας A θα ήταν μηδενικός· αλλά τότε και ο συμπληρωματικός του πίνακας $\widetilde{A}$ θα ήταν μηδενικός. Όμως το τελευταίο είναι άτοπο αφού υποθέσαμε ότι ο $\widetilde{A}$ είναι αντιστρέψιμος. Συνεπώς, όταν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε ούτε ο $\widetilde{A}$ είναι αντιστρέψιμος.

(iii) Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Να προσδιοριστεί ο συμπληρωματικός τού A πίνακας $\widetilde{A}$ και ακολούθως ο A^{-1}

(a) με τη βοήθεια τού $\widetilde{A}$,

(b) με την εκτέλεση στοιχειωδών πράξεων επί των γραμμών τού A.

Λύση (iii)
Για τον υπολογισμό τού συμπληρωματικού $\widetilde{A}$ τού πίνακα A, οφείλουμε να λογαριάσουμε τους συμπαράγοντες όλων των στοιχείων τού A. Έτσι

έχουμε:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \; A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \; A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \; A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \; A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 3, \; A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \; A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1.$$

Επομένως,

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a)
Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}.$$

Θα υπολογίσουμε την $\det A$ με ανάπτυξη κατά τα στοιχεία τής πρώτης γραμμής.

$$\det A = 1 \cdot A_{11} + (-1) \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{13} = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1 \neq 0.$$

Άρα,

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b)
Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα

$$[A \mid I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

και εκτελώντας την ακολουθία των στοιχειωδών μετασχηματισμών:

$$\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1, \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1, \Gamma_2 \to -\Gamma_2, \Gamma_3 \to -\Gamma_3, \Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_2,$$
$$\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3, \Gamma_1 \to \Gamma_1 - 3\Gamma_3$$

προκύπτει τελικώς ο γραμμοϊσοδύναμος πίνακας:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Συνεπώς,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(iv) Να προσδιοριστεί ο άγνωστος πίνακας X που ικανοποιεί τη σχέση:

$$XA = B,$$

όπου $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Λύση (iv)
Παρατηρούμε ότι ο X οφείλει να είναι ένας 2×3 πίνακας. Έστω λοιπόν ότι ο X ισούται με

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}.$$

Έχουμε:

$$XA = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 & -2x_2 + 2x_3 \\ 2y_1 & 4y_1 + 4y_2 + 2y_3 & -2y_2 + 2y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Έτσι προκύπτουν τα ακόλουθα δύο γραμμικά συστήματα:

$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & & & = & 1 \\ 4x_1 & +4x_2 & +2x_3 & = & 0 \\ & -2x_2 & +2x_3 & = & 4 \end{array} \quad \text{και} \quad \begin{array}{rrrcl} 2y_1 & & & = & 2 \\ 4y_1 & +4y_2 & +2y_3 & = & 3 \\ & -2y_2 & +2y_3 & = & 0. \end{array}$$

Επιλύοντας το πρώτο παίρνουμε:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1.$$

Επιλύοντας το δεύτερο παίρνουμε:

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \frac{-1}{6}, \quad y_3 = \frac{-1}{6}.$$

Επομένως,

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} \end{pmatrix}.$$

Σημείωση. Η συγκεκριμένη άσκηση μπορεί να επιλυθεί και με διαφορετικό τρόπο. Παρατηρούμε ότι η ορίζουσα τού πίνακα A ισούται με 24. Γι' αυτό ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και έτσι από την ισότητα $XA = B$ παίρνουμε $X = BA^{-1}$. Συνεπώς για τον υπολογισμό τού X αρκεί να υπολογίσουμε τον αντίστροφο A^{-1} τού A και ακολούθως να εκτελέσουμε τον πολλαπλασιασμό BA^{-1}. Ο αντίστροφος A^{-1}τού A ισούται με $(1/6)\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Άρα, $X = BA^{-1} = (1/6)\begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(v) Έστω ο 3×3 πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \beta \\ \alpha & 1 & -\gamma \\ -\beta & \gamma & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

(a) Να προσδιοριστούν οι τιμές των α, β, γ, έτσι ώστε $\det A \neq 0$.

(b) Να υπολογιστεί ο A^{-1} με τη βοήθεια τού συμπληρωματικού του $\widetilde{A}$.

Λύση (v)
(a)
Υπολογίζουμε την ορίζουσα τού A με ανάπτυξη κατά τα στοιχεία τής πρώτης γραμμής:

$$\begin{aligned}\det A &= 1 \cdot A_{11} + (-\alpha)A_{12} + \beta A_{13} = \\ &1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} + (-\alpha)(-1)^3 \cdot \det\begin{pmatrix} \alpha & -\gamma \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} + \beta(-1)^4 \cdot \det\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\beta & \gamma \end{pmatrix} = \\ &1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.\end{aligned}$$

Η ποσότητα $1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ είναι θετική για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ. Άρα, η ορίζουσα $\det A$ είναι πάντοτε μη-μηδενική.
(b)
Αφού σύμφωνα με το (a) η $\det A$ δεν ισούται ποτέ με 0, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει για οποιαδήποτε α, β, γ ο αντίστροφος πίνακας A^{-1}.
Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}$.
Για να προσδιορίσουμε τον συμπληρωματικό πίνακα $\widetilde{A}$ τού A, οφείλουμε να υπολογίσουμε τους συμπαράγοντες όλων των στοιχείων τού A. Έτσι έχουμε:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{vmatrix} = 1 + \gamma^2, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} \alpha & -\gamma \\ -\beta & 1 \end{vmatrix} = -\alpha + \beta\gamma, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ -\beta & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\gamma + \beta,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -\alpha & \beta \\ \gamma & 1 \end{vmatrix} = \alpha + \beta\gamma, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & \beta \\ -\beta & 1 \end{vmatrix} = 1 + \beta^2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -\alpha \\ -\beta & \gamma \end{vmatrix} = -\gamma + \alpha\beta,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -\alpha & \beta \\ 1 & -\gamma \end{vmatrix} = \alpha\gamma - \beta, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ \alpha & -\gamma \end{vmatrix} = \gamma + \alpha\beta, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = 1 + \alpha^2.$$

Επομένως,

$$A^{-1} = \frac{1}{1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\begin{pmatrix} 1+\gamma^2 & \alpha+\beta\gamma & \alpha\gamma-\beta \\ -\alpha+\beta\gamma & 1+\beta^2 & \gamma+\alpha\beta \\ \alpha\gamma+\beta & -\gamma+\alpha\beta & 1+\alpha^2 \end{pmatrix}$$

(vi) Να υπολογιστεί η ορίζουσα τού πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

(a) με τη μέθοδο Sarrus,

(b) με ανάπτυξη κατά τα στοιχεία τής τελευταίας στήλης,

(c) με ανάπτυξη κατά τα στοιχεία τής δεύτερης γραμμής.

Λύση (vi)
(a)
Εφαρμόζουμε τη μέθοδο Sarrus που υπολογίζει την ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα:

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
-2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\
3 & 0 & 2 & 3 & 0
\end{array}
$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

Έτσι έχουμε $2 + 0 + 0 + 3 - 0 - 0 = 5$. Επομένως $\det A = 5$.
(b)

$$\det A = (-1)A_{13} + 3A_{23} + 2A_{33} = (-1)(-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 3(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

(c)
Προτείνουμε να εκτελέσει ο αναγνώστης με τις ίδιες δυνάμεις τον συγκεκριμένο υπολογισμό.

(vii) Να υπολογισθούν οι ορίζουσες των ακόλουθων πινάκων:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 8 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Λύση (vii)
Σημείωση. Έχουμε γνωρίσει πληθώρα μεθόδων που επιτρέπουν τον υπολογισμό τής ορίζουσας ενός τετραγωνικού πίνακα.

(a) Για πίνακες μικρού μεγέθους, η απλούστερη μέθοδος είναι η ανάπτυξη τής ορίζουσας ως προς μια γραμμή ή στήλη. Στην περίπτωση αυτή δεν πρέπει να λησμονούμε τα πρόσημα $(-1)^{i+j}$ που παρουσιάζονται κατά την εφαρμογή τής διαδικασίας. Συνήθως εκτελούμε την ανάπτυξη ως προς μια γραμμή ή στήλη που συνίσταται από «αρκετά» μηδενικά στοιχεία.

(b) Μια άλλη μέθοδος είναι να μετατρέψουμε τον πίνακα τής ορίζουσας (με τη βοήθεια στοιχειωδών πράξεων επί των γραμμών ή των στηλών) σε άνω ή κάτω τριγωνικό πίνακα, αφού τότε η ορίζουσα τού προκύπτοντα πίνακα ισούται με το γινόμενο των στοιχείων τής κύριας διαγωνίου του. Στην περίπτωση αυτή, δεν πρέπει να λησμονούμε ότι αναλόγως με τις στοιχειώδεις πράξεις που εκτελούμε, η ορίζουσα μπορεί είτε να αλλάζει πρόσημο είτε να πολλαπλασιάζεται με κάποιον αριθμό.

Για τους πίνακες A και B:
Ο αναγνώστης θα πρέπει να δοκιμάσει στο σημείο αυτό τις δυνάμεις του.
Τα ορθά αποτελέσματα είναι:

$$\det A = 80, \quad \det B = 1.$$

Για τον πίνακα C:

$$\det C = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \beta & \alpha \end{vmatrix} \overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4}{=} \begin{vmatrix} \alpha+3\beta & \alpha+3\beta & \alpha+3\beta & \alpha+3\beta \\ \beta & \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \beta & \alpha \end{vmatrix} =$$

$$(\alpha+3\beta)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \beta & \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \beta & \alpha \end{vmatrix} \underset{\substack{\Sigma_3 \to \Sigma_3 - \Sigma_1 \\ \Sigma_4 \to \Sigma_4 - \Sigma_1}}{\overset{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - \Sigma_1}{=}} (\alpha+3\beta)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha-\beta & 0 & 0 \\ \beta & 0 & \alpha-\beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 & \alpha-\beta \end{vmatrix} =$$

$$(\alpha+3\beta)(\alpha-\beta)^3.$$

(Υπενθυμίζουμε ότι με Γ συμβολίζουμε τις στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών και με Σ τις στοιχειώδεις πράξεις επί των στηλών.)

(viii) Να υπολογισθούν οι ορίζουσες των ακόλουθων πινάκων:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta & 2 \\ \beta & \gamma & \delta & \alpha & 2 \\ \gamma & \delta & \alpha & \beta & 2 \\ \delta & \alpha & \beta & \gamma & 2 \\ \frac{\beta+\gamma}{2} & \frac{\gamma+\delta}{2} & \frac{\delta+\alpha}{2} & \frac{\alpha+\beta}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Λύση (viii)
Για τον πίνακα A:
Θεωρούμε την

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

και εκτελώντας επί των γραμμών την ακολουθία των στοιχειωδών πράξεων

$$\Gamma_6 \to \Gamma_6 - \Gamma_5, \Gamma_5 \to \Gamma_5 - \Gamma_4, \Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_3,$$
$$\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2, \Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1$$

παίρνουμε:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Τώρα εκτελώντας επί των στηλών την ακολουθία των στοιχειωδών πράξεων

$$\Sigma_1 \leftrightarrows \Sigma_6,\ \Sigma_2 \leftrightarrows \Sigma_5,\ \Sigma_3 \leftrightarrows \Sigma_4,$$

παίρνουμε:

$$\det A = (-1)(-1)(-1) \begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)6 = -6.$$

Για τον πίνακα B:
Θεωρούμε την

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

και εκτελώντας επί των στηλών την ακολουθία των στοιχειωδών πράξεων

$$\Sigma_1 \leftrightarrows \Sigma_6,\ \Sigma_2 \leftrightarrows \Sigma_5,\ \Sigma_3 \leftrightarrows \Sigma_4,$$

παίρνουμε:

$$\det B = (-1)(-1)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (-1)(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) = -720.$$

Για τον πίνακα C:
Θεωρούμε την

$$\det C = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta & 2 \\ \beta & \gamma & \delta & \alpha & 2 \\ \gamma & \delta & \alpha & \beta & 2 \\ \delta & \alpha & \beta & \gamma & 2 \\ \frac{\beta+\gamma}{2} & \frac{\gamma+\delta}{2} & \frac{\delta+\alpha}{2} & \frac{\alpha+\beta}{2} & 2 \end{vmatrix}$$

και εκτελώντας επί των γραμμών τη στοιχειώδη πράξη

$$\Gamma_5 \to \Gamma_5 - \frac{1}{2}\Gamma_2 - \frac{1}{2}\Gamma_3$$

παίρνουμε:

$$\det C = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta & 2 \\ \beta & \gamma & \delta & \alpha & 2 \\ \gamma & \delta & \alpha & \beta & 2 \\ \delta & \alpha & \beta & \gamma & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

(ix) Έστω ότι A είναι ένας $m \times m$ πίνακας, B είναι ένας $n \times n$ πίνακας και C είναι ένας $n \times m$ πίνακας. Να δειχθεί ότι

$$\det \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ C & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$$

και ακολούθως να εφαρμόσετε την ανωτέρω παρατήρηση για να υπολογίσετε την ορίζουσα τού πίνακα:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Λύση (ix)
Παρατηρούμε ότι

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ C & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & \mathbf{0} \\ C & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς,

$$\det \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ C & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} I_m & \mathbf{0} \\ C & I_n \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} I_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας $\begin{pmatrix} I_m & \mathbf{0} \\ C & I_n \end{pmatrix}$ είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας και γι' αυτό η ορίζουσά του ισούται με το γινόμενο των στοιχείων τής κύριας διαγωνίου του. Η ορίζουσα τού συγκεκριμένου πίνακα ισούται με 1, αφού όλα τα στοιχεία τής κύριας διαγωνίου του είναι ίσα με 1.
Η ορίζουσα τού πίνακα

$$\begin{pmatrix} I_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & B & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & & \end{pmatrix}$$

ισούται με την ορίζουσα τού πίνακα B. Πράγματι αναπτύσσοντας κατά τα στοιχεία τής πρώτης στήλης έχουμε:

$$\det\begin{pmatrix} I_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} = 1\cdot\det\begin{pmatrix} I_{m-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} = 1\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} I_{m-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} = \cdots =$$
$$1\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} = 1\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1\cdot 1\cdot\det B = \det B.$$

Παρομοίως, η ορίζουσα τού πίνακα $\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix}$ ισούται με την ορίζουσα τού πίνακα A. Επομένως έχουμε:

$$\det\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ C & B \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} I_m & \mathbf{0} \\ C & I_n \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} I_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} =$$
$$\det A\cdot 1\cdot\det B = \det A\cdot\det B.$$

Θα εφαρμόσουμε τα προηγούμενα στον πίνακα D. Εδώ έχουμε:

$$D = \begin{pmatrix} A' & \mathbf{0} \\ C' & B' \end{pmatrix},$$

όπου

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\quad B' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\quad C' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Επομένως,

$$\det D = \det A'\cdot\det B' = (1-2)(4-6) = 2.$$

(x) (a) Να Να δειχθεί ότι η ορίζουσα τού $n\times n$ πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \dots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \dots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_n \end{pmatrix},\ \text{όπου}\ S_n = 1+2+\cdots+n$$

ισούται με $n!$. (Υπενθυμίζουμε $n! = 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n$.)

(b) Να υπολογιστεί η ορίζουσα τού $n\times n$ πίνακα:

$$B = \begin{pmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{pmatrix}.$$

Λύση (ix)
(a)

Για υπολογίσουμε την ορίζουσα τού πίνακα A παρατηρούμε τα ακόλουθα:
Έστω ότι M_n είναι ένας $n \times n$ πίνακας τής μορφής

$$M_n = \begin{pmatrix} m_1 & m_1 & m_1 & \dots & m_1 \\ m_1 & m_2 & m_2 & \dots & m_2 \\ m_1 & m_2 & m_3 & \dots & m_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_1 & m_2 & m_3 & \dots & m_n \end{pmatrix}, \text{ όπου } m_1, m_2, \dots m_n \in \mathbb{K}. \qquad (*)$$

Θα αποδείξουμε με επαγωγή ως προς n ότι

$$\det M_n = m_1(m_2 - m_1)(m_3 - m_2)\dots(m_n - m_{n-1}). \qquad (\text{P})$$

Για $n = 1$, έχουμε $M_1 = (m_1)$ και προφανώς $\det M_1 = m_1$
Έστω ότι για $n = k$ η προς απόδειξη πρόταση είναι αληθής· δηλαδή δεχόμαστε ότι για κάθε $k \times k$ πίνακα τής μορφής $(*)$ ισχύει:

$$\det M_k = m_1(m_2 - m_1)(m_3 - m_2)\dots(m_k - m_{k-1}).$$

Θα αποδείξουμε ότι

$$\det M_{k+1} = m_1(m_2 - m_1)(m_3 - m_2)\dots(m_{k+1} - m_k).$$

Πράγματι, εφαρμόζοντας επί των γραμμών του M_{k+1} την ακολουθία των στοιχειωδών μετασχηματισμών

$$\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1, \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1, \dots, \Gamma_{k+1} \to \Gamma_{k+1} - \Gamma_1$$

λαμβάνουμε τον $(k+1) \times (k+1)$ πίνακα

$$M'_{k+1} = \begin{pmatrix} m_1 & m_1 & m_1 & \dots & m_1 \\ 0 & m_2 - m_1 & m_2 - m_1 & \dots & m_2 - m_1 \\ 0 & m_2 - m_1 & m_3 - m_1 & \dots & m_3 - m_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & m_2 - m_1 & m_3 - m_1 & \dots & m_{k+1} - m_1 \end{pmatrix}.$$

Σύμφωνα με τη θεωρία που αναφέρεται στις ορίζουσες γνωρίζουμε ότι $\det M_{k+1} = \det M'_{k+1}$. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα M'_{k+1} τού κατά τα στοιχεία τής πρώτης στήλης έχουμε:

$$\det M'_{k+1} = m_1 \cdot \det \begin{pmatrix} m_2 - m_1 & m_2 - m_1 & \dots & m_2 - m_1 \\ m_2 - m_1 & m_3 - m_1 & \dots & m_3 - m_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_2 - m_1 & m_3 - m_1 & \dots & m_{k+1} - m_1 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας

$$M' = \begin{pmatrix} m_2 - m_1 & m_2 - m_1 & \dots & m_2 - m_1 \\ m_2 - m_1 & m_3 - m_1 & \dots & m_3 - m_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_2 - m_1 & m_3 - m_1 & \dots & m_{k+1} - m_1 \end{pmatrix}$$

είναι ένας $k \times k$ πίνακας που έχει τη μορφή $(*)$, αφού θέτοντας

$$m_2 - m_1 = m'_1, \quad m_3 - m_1 = m'_2, \quad \dots, \quad m_{k+1} - m_1 = m'_k$$

ο πίνακας $M\,'$ γράφεται:

$$M\,' = \begin{pmatrix} m_1' & m_1' & m_1' & \dots & m_1' \\ m_1' & m_2' & m_2' & \dots & m_2' \\ m_1' & m_2' & m_3' & \dots & m_3' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_1' & m_2' & m_3' & \dots & m_k' \end{pmatrix}$$

και γι' αυτό από την επαγωγική υπόθεση, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\det M\,' = & m_1'(m_2' - m_1')(m_3' - m_2')\dots(m_{k+1}' - m_k') = \\ & (m_2 - m_1)[(m_3 - m_1) - (m_2 - m_1)][(m_4 - m_1) - (m_3 - m_1)]\dots \\ & [(m_{k+1} - m_1) - (m_k - m_1)] = (m_2 - m_1)(m_3 - m_2)(m_4 - m_3)\dots(m_{k+1} - m_k).\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\det M_{k+1} = m_1 \det M\,' = m_1(m_2 - m_1)(m_3 - m_2)(m_4 - m_3)\dots(m_{k+1} - m_k).$$

Έτσι, αποδείχθηκε η (P).
Ο συγκεκριμένος πίνακας A τής άσκησης έχει τη μορφή (∗) και επιπλέον καθεμία από τις συνιστώσες του S_t ισούται με το άθροισμα $1 + 2 + \cdots + t$.
Επομένως,

$$\det A = S_1(S_2 - S_1)(S_3 - S_2)\dots(S_n - S_{n-1}) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!.$$

(b)
Θα υπολογίσουμε τώρα την ορίζουσα τού πίνακα B.
Εάν $n = 1$, τότε η ορίζουσα τού B ισούται με $1 + x_1y_1$.
Έστω ότι $n \geq 2$.
Εφαρμόζοντας επί των γραμμών του B την ακολουθία των στοιχειωδών μετασχηματισμών

$$\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1, \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \to \Gamma_n - \Gamma_1$$

προκύπτει ο πίνακας

$$B' = \begin{pmatrix} 1 + x_1y_1 & 1 + x_1y_2 & \dots & 1 + x_1y_n \\ (x_2 - x_1)y_1 & (x_2 - x_1)y_2 & \dots & (x_2 - x_1)y_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (x_n - x_1)y_1 & (x_n - x_1)y_2 & \dots & (x_n - x_1)y_n \end{pmatrix}.$$

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι $\det B = \det B'$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι

$$\det B' = (x_2 - x_1)\dots(x_n - x_1)\det\begin{pmatrix} 1 + x_1y_1 & 1 + x_1y_2 & \dots & 1 + x_1y_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}.$$

Εάν $n \geq 3$, τότε η ορίζουσα τού B' ισούται με μηδέν, αφού ο B' διαθέτει δύο ίσες γραμμές. Συνεπώς, $\det B = \det B' = 0$.
Εάν $n = 2$, τότε η ορίζουσα τού B'– συνεπώς και τού B– ισούται με

$$\det B' = (x_2 - x_1)\det\begin{pmatrix} 1 + x_1y_1 & 1 + x_1y_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1).$$

(xi) Να υπολογιστεί η ορίζουσα τού ακόλουθου $(n+1)\times(n+1)$ πίνακα:

$$C = \begin{pmatrix} a_0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}, \text{ όπου } a_1 a_2 \dots a_n \neq 0.$$

Λύση (xi)
Πιστεύουμε ότι ο αναγνώστης είναι πλέον έτοιμος να δοκιμάσει τις «ίδιες» δύναμεις στη συγκεκριμένη άσκηση.

(xii) Να προσδιοριστεί η ορίζουσα τού ενδομορφισμού

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \to (x + 2y, y - z, x + 2z)$$

και να εξεταστεί εάν ο ϕ είναι αντιστρέψιμος.

Λύση (xii)
Πρώτα προσδιορίζουμε τον πίνακα $M_{\mathcal{B}}(\phi)$ που αναπαριστά τον ενδομορφισμό ϕ ως προς την κανονική βάση $\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$. Έτσι έχουμε:

$$\phi(e_1) = (1, 0, 1) = 1e_1 + 0e_2 + 1e_3, \phi(e_2) = (2, 1, 0) = 2e_1 + 1e_2 + 0e_3,$$
$$\phi(e_3) = (0, -1, 2) = 0e_1 + (-1)e_2 + 2e_3.$$

Συνεπώς,

$$M_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι η ορίζουσα τού ϕ συμπίπτει με την ορίζουσα τού πίνακα $M_{\mathcal{B}}(\phi)$. Άρα,

$$\det\phi = \det M_{\mathcal{B}}(\phi) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + (-2)\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0.$$

Αφού λοιπόν η ορίζουσα τού ϕ ισούται με 0, ο ενδομορφισμός ϕ δεν είναι αντιστρέψιμος.

(xiii) Έστω V ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος διάστασης 3 και $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ μια $\mathbb{R}$-βάση του.
Για ποιες τιμές τού $\lambda \in \mathbb{R}$ αποτελεί το σύνολο

$$C = \{w_1 = v_1 - v_2 + \lambda v_3, \quad w_2 = \lambda v_1 + 2v_2 - 3v_3, \quad w_3 = 2v_1 + \lambda v_2 + (\lambda + 1)v_3\}$$

επίσης μια βάση τού V;

Λύση (xiii)
Το σύνολο C αποτελεί μια βάση τού V, αν και μόνο αν είναι ένα $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο, αφού το πλήθος των στοιχείων τού C ισούται με 3 και η $\mathbb{R}$-διάσταση τού V ισούται επίσης με 3. Το C είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητο, αν και μόνο αν η ορίζουσα των διανυσμάτων του είναι μη-μηδενική· με άλλα λόγια αν και μόνο αν ο 3×3 πίνακας με γραμμές τις συνιστώσες των w_1, w_2, w_3 ως προς $\mathcal{B}$, δηλαδή ο πίνακας

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ \lambda & 2 & -3 \\ 2 & \lambda & \lambda + 1 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος. Γι' αυτό οφείλουμε να εξετάσουμε την ορίζουσα τού M. Έτσι έχουμε:

$$\det M = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ \lambda & 2 & -3 \\ 2 & \lambda & \lambda + 1 \end{pmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda^2 - \lambda + 4).$$

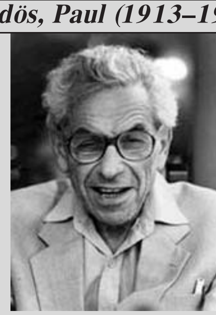
Ο M είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν $\det M \neq 0$, αν και μόνο αν $(\lambda + 2)(\lambda^2 - \lambda + 4) \neq 0$. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η έκφραση $\lambda^2 - \lambda + 4$ είναι διάφορη τού μηδενός (*γιατί;*). Επομένως , $\forall \lambda \neq -2$ η ορίζουσα $\det M \neq 0$ και γι' αυτό το σύνολο

$$C = \{w_1 = v_1 - v_2 + \lambda v_3, \quad w_2 = \lambda v_1 + 2v_2 - 3v_3, \quad w_3 = 2v_1 + \lambda v_2 + (\lambda + 1)v_3\}$$

αποτελεί βάση τού V για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Τι είπαν οι Μαθηματικοί για τους Μαθηματικούς

Erdös, Paul (1913–1996)



Ο μαθηματικός είναι μια μηχανή που μετατρέπει τον καφέ σε θεωρήματα.

Παράρτημα A

Η Βαθμίδα ενός Πίνακα

A.1 Γραμμοβαθμίδα και Στηλοβαθμίδα Πίνακα

Έστω ένας $n \times m$ πίνακας $A = (a_{ij})$ με συνιστώσες από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Για κάθε i, $1 \leq i \leq n$, συμβολίζουμε με $A_{i\bullet}$ την i-οστή γραμμή τού A και για κάθε j, $1 \leq j \leq m$, συμβολίζουμε με $A_{\bullet j}$ την j-οστή στήλη τού A. Κάθε γραμμή $A_{i\bullet}$ αποτελείται από m συνιστώσες και κάθε στήλη $A_{\bullet j}$ αποτελείται από n συνιστώσες. Έτσι, το σύνολο $R(A) = \{A_{i\bullet} \mid i, 1 \leq i \leq n\}$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα υποσύνολο τού $\mathbb{K}$-χώρου $M_{1\times m}$ των $1 \times m$ πινάκων και το σύνολο $C(A) = \{A_{\bullet j} \mid j, 1 \leq j \leq m\}$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα υποσύνολο τού $\mathbb{K}$-χώρου $M_{n\times 1}$ των $n \times 1$ πινάκων.

Ορισμός A.1.1. Η $\mathbb{K}$-διάσταση τού υπόχωρου $\langle R(A)\rangle$ τού $M_{1\times m}$ που παράγεται από τις γραμμές τού A ονομάζεται η *γραμμοβαθμίδα* τού A.
Η $\mathbb{K}$-διάσταση τού υπόχωρου $\langle C(A)\rangle$ τού $M_{n\times 1}$ που παράγεται από τις στήλες τού A ονομάζεται η *στηλοβαθμίδα* τού A.

Θα συμβολίζουμε τη στηλοβαθμίδα ενός $n \times m$ πίνακα A με $\mathrm{rank}_c(A)$ και τη γραμμοβαθμίδα του με $\mathrm{rank}_r(A)$.
Στο παρόν παράρτημα θα αποδείξουμε ότι

Θεώρημα A.1.2. *Εάν $A = (a_{ij})$ είναι ένας $n \times m$ πίνακας με συνιστώσες από ένα σώμα $\mathbb{K}$, τότε*

$$\mathrm{rank}_c(A) = \mathrm{rank}_r(A).$$

Η αλήθεια τού ανωτέρω θεωρήματος επιτρέπει τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός A.1.3. Ο αριθμός $\mathrm{rank}_c(A) = \mathrm{rank}_r(A)$ καλείται *βαθμίδα* τού $n\times m$ πίνακα A και συμβολίζεται με $\mathrm{rank}(A)$.

Α.1.1 Ορισμένες γνωστές Παρατηρήσεις.

Πίνακες και γραμμικές Απεικονίσεις

Έστω ότι m και n είναι δύο πάγιοι φυσικοί αριθμοί. Θεωρούμε τον $\mathbb{K}$-χώρο $M_{n\times 1}$ (αντιστοίχως $M_{m\times 1}$) που αποτελείται από τους $n\times 1$ (αντιστοίχως $m\times 1$) πίνακες. Έστω ότι $\mathcal{B}_n$ (αντιστοίχως $\mathcal{B}_m$) είναι η κανονική βάση[1] τού $M_{n\times 1}$ (αντιστοίχως τού $M_{m\times 1}$).

Κάθε $n \times m$ πίνακας A με συνιστώσες από ένα σώμα $\mathbb{K}$ ορίζει, διαμέσου τού πολλαπλασιασμού πινάκων, μια $\mathbb{K}$-γραμμική απεικόνιση από τον χώρο $M_{m\times 1}$ (με βάση την $\mathcal{B}_m$) στον χώρο $M_{n\times 1}$ (με βάση την $\mathcal{B}_n$).
Με άλλα λόγια, η αντιστοιχία

$$a : M_{m\times 1} \to M_{n\times 1},\ v = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \vdots \\ \kappa_m \end{pmatrix} \mapsto \quad a(v) = A \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \vdots \\ \kappa_m \end{pmatrix}$$

αποτελεί μια (καλά ορισμένη) γραμμική απεικόνιση από τον χώρο $M_{m\times 1}$ στον χώρο $M_{n\times 1}$.

Ιδιαιτέρως, οι λεγόμενοι *στοιχειώδεις πίνακες* $n \times n$ πίνακες, που θα υπενθυμίσουμε σε επόμενες παραγράφους, ορίζουν γραμμικές απεικονίσεις από τον χώρο $M_{n\times 1}$ στον χώρο $M_{n\times 1}$.

Κλιμακωτοί Πίνακες

Έστω A ένας $n \times m$ πίνακας. Ο A ονομάζεται *κλιμακωτός*, εάν υπάρχει ένας μη-αρνητικός ακέραιος αριθμός r, $0 \le r \le n$, τέτοιος ώστε

(i) Οι τελευταίες $n-r$ γραμμές τού A να αποτελούνται μόνο από το μηδενικό στοιχείο τού $\mathbb{K}$.

(ii) Καθεμία από τις πρώτες r γραμμές τού A να περιέχει τουλάχιστον ένα μη-μηδενικό στοιχείο τού $\mathbb{K}$.

(iii) Εάν k_i, $1 \le i \le m$, συμβολίζει τον δείκτη τής στήλης στην οποία βρίσκεται το πρώτο (μετρώντας από τα αριστερά) μη-μηδενικό στοιχείο τής i–οστής γραμμής, τότε πρέπει να ισχύει:

$$1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_{r-1} < k_r \le n.$$

[1] Υπενθυμίζουμε ότι η κανονική βάση $\mathcal{B}_n$ τού $M_{n\times 1}$ συνίσταται από τα n το πλήθος στηλοδιανύσματα e_i, $1 \le i \le n$, όπου για κάθε j, $1 \le j \le n$, η j-οστή συνιστώσα τού e_i ισούται με δ_{ij} (το σύμβολο τού Kronecker).

Δηλαδή, ένας μη-μηδενικός κλιμακωτός πίνακας είναι τής μορφής:

$$\begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & a_{1k_1} & \dots & a_{1(k_2-1)} & a_{1k_2} & \dots & a_{1(k_r-1)} & a_{1k_r} & \dots & a_{1k_m} \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2k_2} & \dots & a_{2(k_r-1)} & a_{2k_r} & \dots & a_{2k_m} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rk_r} & \dots & a_{rk_m} \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix},$$

όπου καθένα από τα $a_{1k_1}, a_{2k_2}, \dots, a_{rk_r}$ είναι κάποιο μη-μηδενικό στοιχείο τού $\mathbb{K}$.

Στοιχειώδεις Πίνακες

Θεωρούμε τα ακόλουθα δύο είδη $n \times n$ πινάκων:

(i) *Μετατακτικός πίνακας διάστασης* $n \times n$ καλείται κάθε πίνακας E_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ που προκύπτει από τον ταυτοτικό $n \times n$ πίνακα I_n κατόπιν εναλλαγής τής i–οστής και j–οστής γραμμής.

(ii) *Διατμητικός πίνακας διάστασης* $n \times n$ καλείται κάθε πίνακας $E_{ij}(\kappa)$, $1 \leq i, j \leq n, \kappa \in \mathbb{K}, \kappa \neq 0$ που προκύπτει από τον ταυτοτικό $n \times n$ πίνακα I_n κατόπιν αντικατάστασης τού στοιχείου που βρίσκεται στη θέση (i, j) από το στοιχείο $\kappa \in \mathbb{K}$.

Οι μετακτικοί και διατμητικοί πίνακες ονομάζονται *στοιχειώδεις* πίνακες.
Οι ακόλουθες παρατηρήσεις θεωρούνται γνωστές:

Έστω A ένας $n \times m$ πίνακας.

(i) Το γινόμενο $E_{ij}A$ τού μετατακτικού πίνακα E_{ij} με τον πίνακα A ισούται με τον $n \times m$ πίνακα που προκύπτει από τον A κατόπιν εναλλαγής τής i-οστής γραμμής τού A με την j-οστή γραμμή του.

(ii) Έστω $i, j \in \mathbb{N}, i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$. Το γινόμενο $E_{ij}(\kappa)A$ τού διατμητικού πίνακα $E_{ij}(\kappa)$ με τον πίνακα A ισούται με τον $n \times m$ πίνακα που προκύπτει από τον A κατόπιν πρόσθεσης τού κ-πολλαπλασίου τής j–οστής γραμμής τού A στην i–οστή γραμμή του.

(iii) Το γινόμενο $E_{ii}(\kappa)A$ τού διατμητικού πίνακα $E_{ii}(\kappa)$ με τον πίνακα A ισούται με τον $n \times m$ πίνακα που προκύπτει από τον A κατόπιν πολλαπλασιασμού τής i–οστής γραμμής τού A με κ.

Υπενθυμίζουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός A.1.4. Δύο $n \times m$ πίνακες A και A' ονομάζονται *γραμμοϊσοδύναμοι*, όταν υπάρχει ένα γινόμενο $n \times n$ στοιχειωδών πινάκων B με $A' = BA$.

Τα ακόλουθα θεωρούνται επίσης γνωστά:

(i) Η γραμμοβαθμίδα τού πίνακα A συμπίπτει με τη γραμμοβαθμίδα τού EA, όπου E είναι οποιοσδήποτε στοιχειώδης πίνακας.

(ii) Για κάθε $n \times m$ πίνακα A, υπάρχει ένα γινόμενο $n \times n$ στοιχειωδών πινάκων B, ούτως ώστε ο γραμμοϊσοδύναμος τού A πίνακας $A' = BA$ να είναι κλιμακωτός.

(iii) Η γραμμοβαθμίδα οποιουδήποτε $n \times m$ πίνακα A ισούται με τη γραμμοβαθμίδα τού αντίστοιχου γραμμοϊσοδύναμου κλιμακωτού πίνακα K.

(iv) Οι στοιχειώδεις $n \times n$ πίνακες είναι αντιστρέψιμοι πίνακες. Συνεπώς, το γινόμενο στοιχειωδών πινάκων είναι επίσης ένας αντιστρέψιμος πίνακας.

Λήμμα Α.1.5. *Έστω ότι A είναι ένας $n \times m$ πίνακας και ότι K είναι ο αντίστοιχος γραμμοϊσοδύναμος τού A κλιμακωτός πίνακας. Η στηλοβαθμίδα τού A συμπίπτει με τη στηλοβαθμίδα τού K.*

Απόδειξη. Ο γραμμοϊσοδύναμος τού A κλιμακωτός πίνακας K ισούται με BA, όπου ο B είναι ένα γινόμενο στοιχειωδών $n \times n$ πινάκων.
Έστω

$$b : M_{n\times 1} \to M_{n\times 1},\ v \mapsto b(v) = Bv$$

η γραμμική απεικόνιση που ορίζεται από τον πίνακα B. Η b είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός, επειδή ο B είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας.
Εάν $A_c = \{A_{\bullet j} \mid 1 \leq j \leq m\}$ είναι το υποσύνολο τού $M_{n\times 1}$ που αποτελείται από τις στήλες τού A, τότε το $b(A_c) = \{BA_{\bullet j} \mid 1 \leq j \leq m\}$ είναι το υποσύνολο τού $M_{n\times 1}$ που αποτελείται από τις στήλες τού πίνακα $K = BA$. Επειδή ο b είναι ένας ισομορφισμός, η $\mathbb{K}$-διάσταση τού υπόχωρου $\langle A_c \rangle$ που παράγεται από το A_c ισούται με τη $\mathbb{K}$-διάσταση τού υπόχωρου $\langle b(A_c) \rangle$ που παράγεται από το $b(A_c)$. Επιπλέον, η διάσταση $\dim_{\mathbb{K}} \langle A_c \rangle$ είναι η στηλοβαθμίδα $\mathrm{rank}_c(A)$ τού A και η διάσταση $\dim_{\mathbb{K}}(\langle b(A_c) \rangle)$ είναι η στηλοβαθμίδα $\mathrm{rank}_c(K)$ τού $BA = K$. Συνεπώς, $\mathrm{rank}_c(A) = \mathrm{rank}_c(K)$. □

Παρατηρούμε ότι μέχρις εδώ γνωρίζουμε τα ακόλουθα:

Εάν A είναι ένας $n \times m$ πίνακας και K είναι ο αντίστοιχος γραμμοϊσοδύναμος κλιμακωτός πίνακας, τότε

$$\mathrm{rank}_r(A) = \mathrm{rank}_r(K) \text{ και } \mathrm{rank}_c(A) = \mathrm{rank}_c(K).$$

Επομένως, για να αποδείξουμε το Θεώρημα Α.1.2, δηλαδή ότι

$$\mathrm{rank}_r(A) = \mathrm{rank}_c(A),$$

αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\mathrm{rank}_r(K) = \mathrm{rank}_c(K).$$

Πρόταση Α.1.6. *Έστω ο μη-μηδενικός $n \times m$ κλιμακωτός πίνακας*

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1k_1} & \dots & a_{1(k_2-1)} & a_{1k_2} & \dots & a_{1(k_r-1)} & a_{1k_r} & \dots & a_{1k_m} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2k_2} & \dots & a_{2(k_r-1)} & a_{2k_r} & \dots & a_{2k_m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rk_r} & \dots & a_{rk_m} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

όπου τα $a_{1k_1}, a_{2k_2}, \dots, a_{rk_r}$ είναι μη-μηδενικά στοιχεία τού $\mathbb{K}$. Η στηλοβαθμίδα $\mathrm{rank}_c(K)$ τού K ισούται με τη γραμοβαθμίδα $\mathrm{rank}_r(K)$ τού K.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι οι r το πλήθος μη-μηδενικές γραμμές $K_{1\bullet}, K_{2\bullet}, \dots, K_{r\bullet}$ τού $\mathbb{K}$ είναι $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία τού χώρου $M_{1\times m}(\mathbb{K})$. Πράγματι, αν

$$\lambda_1 K_{1\bullet} + \lambda_2 K_{2\bullet} + \cdots + \lambda_r K_{r\bullet} = \mathbf{0},\ \lambda_i \in \mathbb{K},\ \forall i,\ 1 \le i \le r,$$

τότε $\lambda_1 = 0$, επειδή η k_1 συνιστώσα των υπόλοιπων γραμμών ισούται με μηδέν. Έτσι η ανωτέρω σχέση γράφεται

$$\lambda_2 K_{2\bullet} + \cdots + \lambda_r K_{r\bullet} = \mathbf{0},\ \lambda_i \in \mathbb{K},\ \forall i,\ 2 \le i \le r,$$

και τώρα το $\lambda_2 = 0$, αφού η k_2 συνιστώσα των υπόλοιπων γραμμών ισούται με μηδέν. Συνεχίζοντας έτσι καταλήγουμε ότι όλοι οι συντελεστές λ_i είναι ίσοι με μηδέν.

Υπολείπεται η απόδειξη ότι η διάσταση τού υπόχωρου W τού $M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ που παράγεται από τις στήλες τού πίνακα ισούται με r. Παρατηρούμε ότι ο W ισούται με τον υπόχωρο που παράγεται από τις στήλες

$$K_{\bullet k_1}, \dots, K_{\bullet(k_2-1)}, K_{\bullet k_2}, \dots, K_{\bullet(k_r-1)}, K_{\bullet k_r}, \dots K_{\bullet k_m}$$

αφού οι πρώτες $k_1 - 1$ στήλες τού $\mathbb{K}$ είναι μηδενικές. Με άλλα λόγια η στηλοβαθμίδα τού K ισούται με τη στηλοβαθμίδα τού πίνακα

$$K_1 = \begin{pmatrix} a_{1k_1} & \dots & a_{1(k_2-1)} & a_{1k_2} & \dots & a_{1(k_r-1)} & a_{1k_r} & \dots & a_{1k_m} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2k_2} & \dots & a_{2(k_r-1)} & a_{2k_r} & \dots & a_{2k_m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rk_r} & \dots & a_{rk_m} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

Τώρα, υπενθυμίζουμε το ακόλουθο:

Αν ένας υπόχωρος U ενός χώρου V παράγεται από κάποιο σύνολο $\{u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_j \dots, u_s\}$ και αν $u_i, u_j, i \neq j$ είναι δύο στοιχεία τού συνόλου και λ είναι ένα στοιχείο τού $\mathbb{K}$, τότε ο U παράγεται επίσης από το σύνολο $\{u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, \lambda u_i + u_j \dots, t_s\}$. (Πρόκειται για το σύνολο που προκύπτει από το αρχικό κατόπιν αντικατάστασης τού u_j από τον γραμμικό συνδυασμό $\lambda u_i + u_j$.)

Βασισμένοι στην παρατήρηση αυτή συμπεραίνουμε ότι η στηλοβαθμίδα τού K_1 ισούται με τη στηλοβαθμίδα τού πίνακα

$$K_2 = \begin{pmatrix} a_{1k_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2k_2} & \dots & a_{2(k_r-1)} & a_{2k_r} & \dots & a_{2k_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rk_r} & \dots & a_{rk_m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

ο οποίος προκύπτει από τον K_1 προσθέτοντας στη στήλη με δείκτη k_j, $2 \le j \le m$ το $-a_{1k_1}^{-1}a_{1k_j}$-πολλαπλάσιο τής πρώτης στήλης τού K_1. Προσέξτε ότι εκτός από την πρώτη, όλες οι συνιστώσες τής στήλης με δείκτη k_j, $2 \le j \le m$ παραμένουν αναλλοίωτες, αφού με εξαίρεση την πρώτη συνιστώσα a_{1k_1}, όλες οι άλλες συνιστώσες τής πρώτης στήλης τού K_1, δηλαδή τής στήλης με δείκτη k_1, είναι ίσες με μηδέν.

Προφανώς, η στηλοβαθμίδα τού τού K_2 ισούται με τη στηλοβαθμίδα τού

$$K_3 = \begin{pmatrix} a_{1k_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2k_2} & \dots & a_{2(k_r-1)} & a_{2k_r} & \dots & a_{2k_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rk_r} & \dots & a_{rk_m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

ο οποίος προκύπτει από τον K_2 διαγράφοντας τις μηδενικές στήλες που οι δείκτες τους είναι μεταξύ k_1 και k_2.

Η στηλοβαθμίδα τού K_3 ισούται με τη στηλοβαθμίδα τού πίνακα

$$K_4 = \begin{pmatrix} a_{1k_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2k_2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rk_r} & \dots & a_{rk_m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

ο οποίος προκύπτει από τον K_3 προσθέτοντας στη στήλη με δείκτη k_j, $3 \le j \le m$ το $-a_{2k_2}^{-1}a_{2k_j}$-πολλαπλάσιο τής δεύτερης στήλης τού K_3. Διαγράφοντας τώρα τις μηδενικές στήλες που οι δείκτες τους είναι μεταξύ k_2 και k_3 και συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στον πίνακα

$$K' = \begin{pmatrix} a_{1k_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{2k_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rk_r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

η στηλοβαθμίδα τού οποίου ισούται με τη στηλοβαθμίδα τού K. Σύμφωνα με την υπόθεση, τα στοιχεία $a_{1k_1}, a_{2k_2}, \dots, a_{rk_r}$ είναι όλα διαφορετικά από το μηδέν. Επιπλέον είναι φανερό (*γιατί;*) ότι οι στήλες τού K' συνιστούν ένα $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο τού $M_{n\times 1}(\mathbb{K})$. Επομένως, η στηλοβαθμίδα τού K' ισούται με r και γι' αυτό και η στηλοβαθμίδα τού K ισούται με r.
Άρα, $\text{rank}_c(K) = r = \text{rank}_r(K)$. □

Η ανωτέρω πρόταση ολοκληρώνει την απόδειξη τού Θεωρήματος Α.1.2.

Πόρισμα Α.1.7. *Η βαθμίδα ενός $n \times m$ πίνακα A ισούται με τη βαθμίδα τού ανάστροφου πίνακα ${}^tA$.*

Απόδειξη. Η γραμμοβαθμίδα τού A ισούται με τη στηλοβαθμίδα τού ${}^tA$. Επιπλέον, η γραμμοβαθμίδα τού A είναι η βαθμίδα τού A και η στηλοβαθμίδα τού ${}^tA$ είναι η βαθμίδα τού ${}^tA$. □

Οι Ασκήσεις επιλύονται από τους διδάσκοντες Ν.Μαρμαρίδη και Κ. Μέξη στο πλαίσιο τού Μαθήματος Γραμμική Άλγεβρα Ι, α' Εξαμήνου Σπουδών Τμήματος Μαθηματικών, Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Ιωάννινα, Δεκέμβριος 2004