

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΤΜΗΜΑ Β'

(Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAI12020/LAI12020.html>

Παρασκευή 28 Φεβρουαρίου 2020

Άσκηση 1. Να βρεθεί το ηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης στο $\mathbb{R}[t]$ του πολυωνύμου $A(t) = t^6 - 7t^5 + 16t^4 - 10t^3 - 14t^2 + 33t - 23$ με το πολυώνυμο $B(t) = t^3 - 7t^2 + 16t - 12$.

Άσκηση 2. Να βρεθεί το ηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης στο $\mathbb{R}[t]$ του πολυωνύμου $A(t) = 3t^5 + 4t^2 + 1$ με το πολυώνυμο $B(t) = t^2 + 2t + 3$.

Άσκηση 3. Θεωρούμε ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές

$$P(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n, \quad n > 0, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq i \leq n \quad \text{και} \quad a_n \neq 0$$

Αν $\frac{r}{s}$ είναι μια ρητή ρίζα του $P(t)$, όπου $r, s \in \mathbb{Z}$, $s \neq 0$ και $(r, s) = 1$, τότε:

$$r \mid a_0 \quad \& \quad s \mid a_n$$

Ακολουθώντας να εξετασθεί αν το πολυώνυμο

$$P(t) = t^3 + 8t^2 - t + 9$$

είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[t]$.

Άσκηση 4. Να δειχθεί το ακόλουθο ΚΡΙΤΗΡΙΟ EISENSTEIN: Θεωρούμε ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές

$$f(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n, \quad n > 0, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq i \leq n \quad \text{και} \quad a_n \neq 0$$

και έστω p ένας πρώτος αριθμός. Τότε:

$$p \mid a_0, \quad p \mid a_1, \quad \dots, \quad p \mid a_{n-1} \quad \& \quad p \nmid a_n \quad \& \quad p^2 \nmid a_0 \quad \implies \quad f(t): \text{ ανάγωγο}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Δείξτε ότι τα πολυώνυμα $g_1(t) = t^4 - 6t^3 + 24t^2 - 30t + 14$, $g_2(t) = t^7 + 48t - 24$, $g_3(t) = t^5 + 5t + 5$, και $g_4(t) = t^n - p$, όπου p είναι ένας πρώτος αριθμός και $n > 1$, είναι ανάγωγα υπεράνω του \mathbb{Q} . Είναι το πολυώνυμο $t^4 + 4$ και ανάγωγο υπεράνω του \mathbb{Q} ;

Άσκηση 5. Θεωρούμε ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές

$$P(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots + c_1t + c_0,$$

Αν ρ είναι μια πραγματική ρίζα του $P(t)$, να δειχθεί ότι: είτε ο ρ είναι ακέραιος ή ο ρ είναι άρρητος.

Άσκηση 6. (1) Να αναλυθεί το πολυώνυμο

$$P(t) = t^3 - 2t^2 - 3t + 6$$

σε γινόμενο ανάγωγων πολυωνύμων στο $\mathbb{Q}[t]$.

(2) Να αναλυθεί το πολυώνυμο

$$P(t) = 2t^3 - (5 + 6i)t^2 + 9it + 1 - 3i$$

σε γινόμενο ανάγωγων πολυωνύμων στο $\mathbb{C}[t]$, γνωρίζοντας ότι το $P(t)$ έχει μια πραγματική ρίζα.

Άσκηση 7. Να γραφούν τα ακόλουθα πολυώνυμα ως γινόμενα ανάγωγων πολυωνύμων στα $\mathbb{Q}[t]$, $\mathbb{R}[t]$, και $\mathbb{C}[t]$:

$$P(t) = t^3 - 2t^2 + 2t - 1, \quad Q(t) = 2t^4 - 5t^3 + 4t^2 - 5t + 2, \quad R(t) = -t^3 + 5t^2 - 8t + 4$$

• • •

Άσκηση 8. Θεωρούμε τους υπόχωρους του \mathbb{R}^3 :

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ και } 3x + 2y + z = 0\}$$

$$\mathcal{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + 4y + 3z = 0\}$$

Να εξετάσετε αν ισχύει ότι: $\mathbb{R}^3 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$. Αν αυτό δεν ισχύει να βρείτε υπόχωρους \mathcal{U} και \mathcal{Z} έτσι ώστε

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}$$

Άσκηση 9. Θεωρούμε τους ακόλουθους υπόχωρους του \mathbb{R}^4 :

$$\mathcal{V} = \langle (1, 2, 1, -1), (1, 1, 1, 1) \rangle \quad \text{και} \quad \mathcal{W} = \langle (-1, 1, -1, 1), (0, 1, 0, 1) \rangle$$

(1) Είναι το άθροισμα $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ ευθύ;

(2) Πόσοι υπόχωροι \mathcal{Z} του \mathbb{R}^4 υπάρχουν έτσι ώστε $\mathcal{V} \oplus \mathcal{Z} = \mathbb{R}^4$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 10. Θεωρούμε τους ακόλουθους υπόχωρους του \mathbb{C} -διανυσματικού χώρου \mathbb{C}^3 :

$$\mathcal{V} = \langle (1, 1, 0), (i, 1 + i, 1), (1 + i, 1 + i, 0) \rangle \quad \text{και} \quad \mathcal{W} = \langle (1, 0, 1), (i, -i, 0), (0, i, i) \rangle$$

Να βρείτε υπόχωρο \mathcal{U} του \mathbb{C}^3 έτσι ώστε

$$(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \oplus \mathcal{U} = \mathbb{C}^3$$

Άσκηση 11. Να εξετάσετε αν ισχύει ότι: $\mathbb{R}_3[t] = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, όπου \mathcal{V} και \mathcal{W} είναι οι ακόλουθοι υπόχωροι του $\mathbb{R}_3[t]$:

$$\mathcal{V} = \langle 1, t + t^2, 2 + 3t + 3t^2 \rangle \quad \text{και} \quad \mathcal{W} = \langle t, t^3 \rangle$$

Άσκηση 12. Να δείξετε, με ένα αντιπαράδειγμα, ότι αν $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n$ είναι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου \mathcal{E} , $n \geq 3$, και ισχύουν οι σχέσεις:

$$\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \{\vec{0}\}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n, \quad 1 \leq i \neq j \leq n \quad (*)$$

τότε δεν ισχύει απαραίτητα ότι το άθροισμα $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_n$ είναι ευθύ.

Άσκηση 13. Έστω ότι $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_n$ είναι υπόχωροι ενός \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} . Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) Το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_n$ είναι ευθύ.

(2) $\mathcal{V}_i \cap (\mathcal{V}_{i+1} + \mathcal{V}_{i+2} + \dots + \mathcal{V}_n) = \{\vec{0}\}, \forall i = 1, 2, \dots, n-1$, δηλαδή:

$$\mathcal{V}_1 \cap (\mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3 + \dots + \mathcal{V}_n) = \{\vec{0}\}$$

$$\mathcal{V}_2 \cap (\mathcal{V}_3 + \mathcal{V}_4 + \dots + \mathcal{V}_n) = \{\vec{0}\}$$

⋮

$$\mathcal{V}_{n-2} \cap (\mathcal{V}_{n-1} + \mathcal{V}_n) = \{\vec{0}\}$$

$$\mathcal{V}_{n-1} \cap \mathcal{V}_n = \{\vec{0}\}$$

Άσκηση 14. Θεωρούμε τα ακόλουθα υποσύνολα του \mathbb{R}^4 :

$$\mathcal{W}_1 = \{(t, 2t, -t, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{W}_2 = \{(t, s, t - 3s, -s) \in \mathbb{R}^4 \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{W}_3 = \{(t, s, 0, r) \in \mathbb{R}^4 \mid t - 2s + r = 0\}$$

(1) Να δείχθει ότι τα υποσύνολα $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3$ είναι υπόχωροι του \mathbb{R}^4 και να βρεθεί η διάστασή τους.

(2) Να εξετασθεί αν το άθροισμα $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3$ είναι ευθύ.

(3) Να δείχθει ότι $\mathbb{R}^4 = \mathcal{W}_1 \oplus (\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3)$.

Άσκηση 15. Έστω $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν $f^2 = f$, να δείχθει ότι

$$\mathcal{E} = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$$

Επιπρόσθετα, αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n < \infty$, να δείχθει ότι υπάρχει βάση \mathcal{C} του \mathcal{E} έτσι ώστε ο πίνακας της f στη βάση \mathcal{C} να είναι ο εξής:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

όπου το πλήθος των μονάδων στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με $r = \mathbf{r}(f)$.

Άσκηση 16. Έστω $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν $f^2 = \text{Id}_{\mathcal{E}}$, να δείχθει ότι

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_+ \oplus \mathcal{V}_-$$

όπου:

$$\mathcal{V}_+ = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\} \quad \text{και} \quad \mathcal{V}_- = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\}$$

Επιπρόσθετα, αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n < \infty$, να δείχθει ότι υπάρχει βάση \mathcal{C} του \mathcal{E} έτσι ώστε ο πίνακας της f στη βάση \mathcal{C} να είναι ο εξής:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

όπου το πλήθος των εμφανίσεων της μονάδας 1 στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_+$ και το πλήθος των εμφανίσεων του -1 στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_-$.

Άσκηση 17. Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$.

(1) Αν $A^2 = A$, να δειχθεί ότι ο A είναι όμοιος με τον πίνακα:

$$B = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{(n-r) \times (n-r)} & \mathbb{O}_{r \times (n-r)} \\ \mathbb{O}_{(n-r) \times r} & I_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

όπου I_r είναι ο μοναδιαίος $r \times r$ πίνακας και $r = \mathbf{r}(A)$.

(2) Αν $A^2 = I_n$, να δειχθεί ότι ο A είναι όμοιος με τον πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} I_{n-r} & \mathbb{O}_{r \times (n-r)} \\ \mathbb{O}_{(n-r) \times r} & -I_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

όπου το πλήθος των εμφανίσεων της μονάδας 1 στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με τη διάσταση του υπόχωρου $\{X \in \mathbb{K}_n \mid A \cdot X = X\}$ και το πλήθος των εμφανίσεων του -1 στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με τη διάσταση του υπόχωρου $\{X \in \mathbb{K}_n \mid A \cdot X = -X\}$.

Άσκηση 18. Έστω ο \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος $M_n(\mathbb{K})$ και η γραμμική απεικόνιση

$$f: M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K}), \quad f(A) = {}^t A$$

(1) Να δειχθεί ότι

$$M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$$

όπου

(α) $S_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid f(A) = A\}$ είναι ο υπόχωρος των συμμετρικών πινάκων.

(β) $A_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid f(A) = -A\}$ είναι ο υπόχωρος των αντισυμμετρικών πινάκων.

(2) Να δειχθεί ότι υπάρχει βάση \mathcal{C} του $M_n(\mathbb{K})$ έτσι ώστε:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

όπου η μονάδα 1 εμφανίζεται $\frac{n^2+n}{2}$ -φορές και το -1 εμφανίζεται $\frac{n^2-n}{2}$ -φορές.

Υπενθυμίζουμε ότι μια γραμμική απεικόνιση $f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ καλείται **προβολή**¹, αν: $f^2 = f$.

Η γραμμική απεικόνιση $f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ καλείται **ενέλιξη**, αν: $f^2 = \text{Id}_{\mathcal{E}}$.

¹Ακριβέστερα η f καλείται **προβολή του χώρου \mathcal{E} στον υπόχωρο $\text{Im}(f)$ παράλληλα με τον υπόχωρο $\text{Ker}(f)$** .

Άσκηση 19. (1) Αν η γραμμική απεικόνιση $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ είναι μια προβολή, τότε η γραμμική απεικόνιση

$$2f - \text{Id}_{\mathcal{E}}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad (2f - \text{Id}_{\mathcal{E}})(\vec{x}) = 2f(\vec{x}) - \vec{x}$$

είναι μια ενέλιξη.

(2) Αν η γραμμική απεικόνιση $g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ είναι μια ενέλιξη, τότε η γραμμική απεικόνιση

$$\frac{g + \text{Id}_{\mathcal{E}}}{2}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad \left(\frac{g + \text{Id}_{\mathcal{E}}}{2}\right)(\vec{x}) = \frac{g(\vec{x}) + \vec{x}}{2}$$

είναι μια προβολή.

Άσκηση 20. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ μια προβολή. Τότε η γραμμική απεικόνιση $\text{Id}_{\mathcal{E}} - f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ είναι προβολή και ισχύει ότι:

$$\text{Id}_{\mathcal{E}} = f + (\text{Id}_{\mathcal{E}} - f) \quad \text{και} \quad f \circ (\text{Id}_{\mathcal{E}} - f) = 0 = (\text{Id}_{\mathcal{E}} - f) \circ f$$

Επιπλέον:

$$\text{Ker}(f) = \text{Im}(\text{Id}_{\mathcal{E}} - f) \quad \text{και} \quad \text{Im}(f) = \text{Ker}(\text{Id}_{\mathcal{E}} - f)$$

και

$$\mathcal{E} = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f = \text{Im}(\text{Id}_{\mathcal{E}} - f) \oplus \text{Ker}(\text{Id}_{\mathcal{E}} - f)$$

Άσκηση 21. Έστω \mathcal{E} ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} και υποθέτουμε ότι

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_n$$

όπου $\mathcal{V}_i, 1 \leq i \leq n$, είναι υπόχωροι του \mathcal{E} .

(1) Ναδειχθεί ότι οι απεικονίσεις, $1 \leq j \leq n$:

$$\pi_j: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}_j, \quad \pi_j(\vec{x}) = \vec{x}_j$$

όπου $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n$ είναι η μοναδική γραφή του διανύσματος \vec{x} του \mathcal{E} ως άθροισμα διανυσμάτων \vec{x}_i των υπόχωρων $\mathcal{V}_i, 1 \leq i \leq n$, και

$$\iota_j: \mathcal{V}_j \rightarrow \mathcal{E}, \quad \iota_j(\vec{x}_j) = \vec{x}_j$$

είναι γραμμικές.

(2) Ναδειχθεί ότι, $\forall \kappa, \mu = 1, 2, \dots, n$:

$$\pi_{\kappa} \circ \iota_{\mu} = \begin{cases} 0, & \text{αν } \kappa \neq \mu \\ \text{Id}_{\mathcal{V}_{\kappa}}, & \text{αν } \kappa = \mu \end{cases}$$

(3) Ναδειχθεί ότι οι απεικονίσεις, $1 \leq j \leq n$:

$$\iota_j \circ \pi_j: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

είναι προβολές και ισχύει ότι:

$$\text{Id}_{\mathcal{E}} = \iota_1 \circ \pi_1 + \iota_2 \circ \pi_2 + \cdots + \iota_n \circ \pi_n$$

Η επόμενη Άσκηση παρουσιάζει ένα αντίστροφο του βασικού ισχυρισμού της προηγούμενης Άσκησης.

Άσκηση 22. Έστω \mathcal{E} ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος και έστω ότι, για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$, η γραμμική απεικόνιση

$$\rho_j: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

είναι προβολή και ισχύει ότι:

$$1 \leq i \neq j \leq n: \quad \rho_i \circ \rho_j = 0 \quad \text{και} \quad \text{Id}_{\mathcal{E}} = \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_n$$

Τότε θέτοντας $\mathcal{V}_i = \text{Im}(\rho_i), 1 \leq i \leq n$, ναδειχθεί ότι:

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_n$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_m$ είναι διανυσματικοί χώροι υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} , τότε το καρτεσιανό γινόμενο συνόλων

$$\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \dots \times \mathcal{V}_m = \{(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m) \mid \vec{v}_i \in \mathcal{V}_i, 1 \leq i \leq m\}$$

εφοδιασμένο με τις ακόλουθες πράξεις

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m) + (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m) = (\vec{v}_1 + \vec{u}_1, \vec{v}_2 + \vec{u}_2, \dots, \vec{v}_m + \vec{u}_m)$$

$$\lambda(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m) = (\lambda\vec{v}_1, \lambda\vec{v}_2, \dots, \lambda\vec{v}_m)$$

είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{K} .

Άσκηση 23. Έστω ότι $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_m$ είναι υπόχωροι ενός \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} . Θεωρούμε τον \mathbb{K} -διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \dots \times \mathcal{V}_m$ και ορίζουμε μια απεικόνιση

$$f : \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \dots \times \mathcal{V}_m \longrightarrow \mathcal{E}, \quad f(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_m$$

- (1) Ναδειχθεί ότι η f είναι γραμμική.
- (2) Ποιά είναι η εικόνα $\text{Im}(f)$ της f ;
- (3) Ναδειχθεί ότι η f είναι μονομορφισμός αν και μόνον αν το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_m$ είναι ευθύ.
- (4) Ναδειχθεί ότι η f είναι επιμορφισμός αν και μόνον αν $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_m$.
- (5) Ναδειχθεί ότι η f είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_m$.

Η επόμενη Άσκηση παρουσιάζει ένα αντίστροφο του βασικού ισχυρισμού της προηγούμενης Άσκησης.

Άσκηση 24. Έστω ότι $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_m$ είναι διανυσματικοί χώροι υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} και έστω:

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \dots \times \mathcal{V}_m$$

Για κάθε $i = 1, 2, \dots, m$, θέτουμε:

$$\mathcal{V}'_i = \left\{ \underbrace{(\vec{0}, \dots, \vec{0}, \vec{x}_i, \vec{0}, \dots, \vec{0})}_{i\text{-θέση}} \in \mathcal{E} \mid \vec{x}_i \in \mathcal{V}_i \right\}$$

Ναδειχθεί ότι τα υποσύνολα $\mathcal{V}'_i, 1 \leq i \leq m$, είναι υπόχωροι του \mathcal{E} και ισχύει ότι:

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}'_1 \oplus \mathcal{V}'_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}'_m$$

Άσκηση 25. Έστω $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου \mathcal{E} και \mathcal{F} είναι \mathbb{K} -διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης. Υποθέτουμε ότι η f είναι επιμορφισμός.

- (1) Ναδειχθεί ότι υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $g : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε: $f \circ g = \text{Id}_{\mathcal{F}}$.
- (2) Ναδειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός:

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$$

Άσκηση 26. Έστω $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου \mathcal{E} και \mathcal{F} είναι \mathbb{K} -διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης. Υποθέτουμε ότι η f είναι μονομορφισμός.

- (1) Ναδειχθεί ότι υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $h : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε: $h \circ f = \text{Id}_{\mathcal{E}}$.
- (2) Ναδειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός:

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\cong} \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(h)$$

Άσκηση 27. Έστω $A \in M_2(\mathbb{K})$ ένας 2×2 -πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} και υποθέτουμε ότι υπάρχουν μη-μηδενικές στήλες $X, Y \in \mathbb{K}_2$ έτσι ώστε:

$$AX = X \quad \text{και} \quad AY = -Y$$

Να βρεθεί ο πίνακας A^{2018} .