

# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

**ΤΜΗΜΑ Β'** (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII2020/LAII2020.html>

**Παρασκευή 20 Μαρτίου 2020**

**Άσκηση 1.** Έστω  $\mathcal{E}$  ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος  $\mathbb{K}$ , και  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  ένας ενδομορφισμός του  $\mathcal{E}$ . Έστω  $\vec{x}$  και  $\vec{y}$  δύο ιδιοδιάνυσματά του  $f$  τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές του  $f$ . Αν  $a, b \in \mathbb{K}$  και  $ab \neq 0$ , να δείξετε ότι το διάνυσμα  $a\vec{x} + b\vec{y}$  δεν είναι ιδιοδιάνυσμα της  $f$ .

Ένας ενδομορφισμός  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  του  $\mathbb{K}$ -διανυσματικού χώρου  $\mathcal{E}$  καλείται **ομοθεσία με λόγο  $\lambda$** , όπου  $\lambda \in \mathbb{K}$ , αν:

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{E} : f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$$

δηλαδή  $f = \lambda \text{Id}_{\mathcal{E}}$ . Προφανώς για μια ομοθεσία  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  με λόγο  $\lambda$ , κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα του  $\mathcal{E}$  είναι ιδιοδιάνυσμα του  $f$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda$ .

**Άσκηση 2.** Έστω  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  ένας ενδομορφισμός του  $\mathbb{K}$ -διανυσματικού χώρου  $\mathcal{E}$ .

- (1) Αν ο ενδομορφισμός  $f$  είναι ομοθεσία με λόγο  $\lambda$ , τότε το  $\lambda$  είναι η μόνη ιδιοτιμή του  $f$  και κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα του  $\mathcal{E}$  είναι ιδιοδιάνυσμα του  $f$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda$ .
- (2) Αν κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα του  $\mathcal{E}$  είναι ιδιοδιάνυσμα του  $f$ , να δειχθεί ότι η  $f$  είναι ομοθεσία.

**Άσκηση 3.** (1) Αν  $A$  και  $B$  είναι δύο  $n \times n$  πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα  $\mathbb{K}$ , τότε:

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

- (2) Να δειχθεί ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος.
- (3) Να δειχθεί ότι αν  $A$  και  $B$  είναι  $2 \times 2$  πίνακες, τότε<sup>1</sup> οι πίνακες  $AB$  και  $BA$  έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο:  $P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$ .
- (4) Αν ο πίνακας  $A$  ή ο πίνακας  $B$  είναι αντιστρέψιμος, να δειχθεί ότι οι πίνακες  $AB$  και  $BA$  είναι όμοιοι, και άρα:

$$P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$$

- (5) Να δειχθεί ότι αν  $A$  και  $B$  είναι  $n \times n$  πίνακες, τότε γενικά οι πίνακες  $AB$  και  $BA$  δεν είναι όμοιοι.
- (6) Να δειχθεί ότι οι πίνακες  $AB$  και  $BA$  έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

<sup>1</sup>Αποδεικνύεται γενικότερα ότι για τυχόντες  $n \times n$  πίνακες  $A$  και  $B$ , οι πίνακες  $AB$  και  $BA$  έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο:  $P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$ .

**Άσκηση 4.** Θεωρούμε τον ακόλουθο πίνακα πραγματικών αριθμών:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του  $A$  και βάσεις των αντίστοιχων ιδιοχώρων. Είναι ο πίνακας  $A$  διαγωνοποιήσιμος;

**Άσκηση 5.** Θεωρούμε τον ενδομορφισμό του  $\mathbb{R}$ -διανυσματικού χώρου  $\mathbb{R}^3$ :

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x - y, x + y, y - z)$$

και τον ενδομορφισμό<sup>2</sup> του  $\mathbb{C}$ -διανυσματικού χώρου  $\mathbb{C}^3$ :

$$f: \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3, \quad f(x, y, z) = (x - y, x + y, y - z)$$

- (1) Να βρεθούν και στις δυο περιπτώσεις, οι ιδιοτιμές του  $f$  καθώς και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι.
- (2) Και στις δύο περιπτώσεις, να διαγωνοποιηθεί, αν αυτό είναι εφικτό, ο ενδομορφισμός  $f$ .

**Άσκηση 6.** Βρείτε τις ιδιοτιμές και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Είναι ο πίνακας  $A$  διαγωνοποιήσιμος;

**Άσκηση 7.** Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

- (1) Είναι ο πίνακας  $A$  διαγωνοποιήσιμος;
- (2) Είναι ο πίνακας διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του σώματος  $\mathbb{C}$ , όταν θεωρηθεί ως πίνακας μιγαδικών αριθμών;

**Άσκηση 8.** Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι του ενδομορφισμού

$$f: \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}_2[t], \quad P(t) \longmapsto f(P(t)) = P(t) - P'(t)$$

Είναι διαγωνοποιήσιμος ο ενδομορφισμός  $f$ ;

**Άσκηση 9.** Αν  $\lambda$  είναι μια ιδιοτιμή ενός ενδομορφισμού  $f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$  ή ενός πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , να δείξετε ότι το  $\lambda^m$  είναι ιδιοτιμή του ενδομορφισμού  $f^m$  ή του πίνακα  $A^m$  αντίστοιχα,  $\forall m \geq 1$ . Ποιά είναι η σχέση των ιδιοχώρων  $\mathcal{V}_f(\lambda)$  και  $\mathcal{V}_{f^m}(\lambda^m)$  ή των ιδιοχώρων  $\mathcal{V}_A(\lambda)$  και  $\mathcal{V}_{A^m}(\lambda^m)$  αντίστοιχα;

**Άσκηση 10.** Έστω  $f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$  ένας ενδομορφισμός του  $\mathbb{K}$ -διανυσματικού χώρου  $\mathcal{E}$ , όπου  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$ , και  $A \in M_n(\mathbb{K})$  ένας  $n \times n$  πίνακας. Ναδειχθεί ότι ο ενδομορφισμός  $f$ , αντίστοιχα ο πίνακας  $A$ , είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν για κάθε ιδιοτιμή  $\lambda$  του  $f$ , αντίστοιχα του  $A$ , ισχύει ότι:  $\lambda \neq 0$ .

- (1) Αν ο  $f$  είναι ισομορφισμός, να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
  - (α) Το  $\lambda \in \mathbb{K}$  είναι ιδιοτιμή του  $f$ .

<sup>2</sup>Αν και πρόκειται για διαφορετικές απεικονίσεις, συμβολίζουμε χάριν απλότητας και στις δύο περιπτώσεις τους ενδομορφισμούς με το ίδιο σύμβολο, επειδή έχουν τον ίδιο τύπο ορισμού.

(β)  $\lambda \neq 0$  και το  $\lambda^{-1}$  είναι ιδιοτιμή του  $f^{-1}$ .

Ποιά είναι η σχέση των ιδιοχώρων  $\mathcal{V}_f(\lambda)$  και  $\mathcal{V}_{f^{-1}}(\lambda^{-1})$ ;

(2) Αν ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος, να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Το  $\lambda \in \mathbb{K}$  είναι ιδιοτιμή του  $A$ .

(β)  $\lambda \neq 0$  και το  $\lambda^{-1}$  είναι ιδιοτιμή του  $A^{-1}$ .

Ποιά είναι η σχέση των ιδιοχώρων  $\mathcal{V}_A(\lambda)$  και  $\mathcal{V}_{A^{-1}}(\lambda^{-1})$ ;

**Άσκηση 11.** (1) Έστω  $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  ένας ενδομορφισμός του  $\mathbb{K}$ -διανυσματικού χώρου  $\mathcal{E}$ . Αν ο  $f$  είναι ισομορφισμός, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Ο  $f$  είναι διαγωνοποιήσιμος.

(β) Ο  $f^{-1}$  είναι διαγωνοποιήσιμος.

Επιπρόσθετα να δείχθει ότι αν  $\mathcal{B}$  είναι μια βάση του  $\mathcal{E}$  στην οποία ο πίνακας του  $f$  είναι διαγώνιος, τότε ο πίνακας του  $f^{-1}$  στη βάση  $\mathcal{B}$  είναι διαγώνιος. Ποιά είναι η σχέση των πινάκων  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$  και  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^{-1})$ ;

(2) Έστω  $A \in M_n(\mathbb{K})$  είναι ένας  $n \times n$  πίνακας. Αν ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Ο  $A$  είναι διαγωνοποιήσιμος.

(β) Ο  $A^{-1}$  είναι διαγωνοποιήσιμος.

Επιπρόσθετα να δείχθει ότι αν  $P$  είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας έτσι ώστε ο πίνακας  $P^{-1}AP$  είναι διαγώνιος, τότε ο πίνακας  $P^{-1}A^{-1}P$  είναι επίσης διαγώνιος. Ποιά είναι η σχέση των πινάκων  $P^{-1}AP$  και  $P^{-1}A^{-1}P$ ;

**Άσκηση 12.** Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και βάσεις των αντίστοιχων ιδιοχώρων του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Ακολουθώντας να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας  $P$  έτσι ώστε ο πίνακας  $P^{-1}AP$  να είναι διαγώνιος.

Ποιά είναι η  $n$ -οστή δύναμη του πίνακα  $A$ ;

**Άσκηση 13.** Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Να βρεθεί ο πίνακας  $A^m, \forall m \geq 1$ .

**Άσκηση 14.** Ποιές συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$ , έτσι ώστε ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 3 & \delta & \epsilon \\ 0 & 0 & 4 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

να είναι διαγωνοποιήσιμος;

**Άσκηση 15.** Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Να δείχθει ότι:  $A^{593} - 2A^{15} = -A$ .

**Άσκηση 16.** Βρείτε τις ιδιοτιμές καθώς και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & i \\ i & 0 & i \\ i & i & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$$

- (1) Είναι ο πίνακας  $A$  διαγωνοποιήσιμος;
- (2) Αν ο πίνακας  $A$  διαγωνοποιήσιμος, τότε:
  - (α) Να βρεθεί αντιστρέψιμος  $3 \times 3$  πίνακας μιγαδικών αριθμών  $P$  έτσι ώστε ο πίνακας  $P^{-1}AP$  να είναι διαγώνιος.
  - (β) Να βρεθεί ο πίνακας  $A^{2018}$ .

**Άσκηση 17.** Να βρεθούν αναγκαίες και ικανές συνθήκες τις οποίες πρέπει να ικανοποιούν τα  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ , έτσι ώστε ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \mu \\ 3 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

να είναι διαγωνοποιήσιμος.

**Άσκηση 18.** (1) Να εξετασθεί αν οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

είναι όμοιοι.

(2) Να εξετασθεί αν οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

είναι όμοιοι.

**Άσκηση 19.** (1) Έστω  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ένας  $2 \times 2$  πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα  $\mathbb{K}$ . Να δειχθεί ότι:

$$P_A(t) = t^2 - (a+d)t + (ad-bc) = t^2 - \text{Tr}(A)t + \text{Det}(A)$$

όπου  $\text{Tr}(A) = a+d$  είναι το ίχνος του  $A$  και  $\text{Det}(A) = ad-bc$  είναι η οριζούσα του  $A$ , και:

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = A^2 - \text{Tr}(A)A + \text{Det}(A)I_2 = O$$

(2) Να βρεθεί η  $n$ -οστή δύναμη του πίνακα  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

(3) Να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ είναι όμοιος με τον πίνακα } \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{αν } a = 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{αν } a \neq 0 \end{cases}$$

όπου  $a \in \mathbb{R}$ .

(4) Να εξετασθεί αν οι πίνακες  $A$  και  $B$  είναι όμοιοι, στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(β)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(γ)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(δ)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 20.** Έστω  $A$  και  $B$  δύο όμοιοι πίνακες. Ναδειχθεί ότι οι πίνακες  $A^2$  και  $B^2$  είναι όμοιοι. Ισχύει το αντίστροφο;

**Άσκηση 21.** Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί  $a + bi$  και  $a - bi$ , όπου  $a, b \in \mathbb{R}$ . Ναδειχθεί ότι οι αριθμοί  $a + bi$  και  $a - bi$  είναι ιδιοτιμές ενός πίνακα  $A \in M_2(\mathbb{R})$  και ακολούθως να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας μιγαδικών αριθμών  $P$  έτσι ώστε:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a + bi & 0 \\ 0 & a - bi \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 22.** Έστω  $A$  ένας διαγωνοποιήσιμος  $n \times n$  πίνακας πραγματικών αριθμών και υποθέτουμε ότι οι μόνες ιδιοτιμές του είναι οι αριθμοί  $1$  και  $-1$ . Ναδειχθεί ότι:

$$A^2 = I_n$$

**Άσκηση 23.** Να προσδιορισθούν όλοι οι  $2 \times 2$  πίνακες πραγματικών αριθμών οι οποίοι έχουν ως ιδιοτιμές τους αριθμούς  $2$  και  $-1$  με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 24.** Υποθέτουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός  $n \times n$  διαγωνοποιήσιμου πίνακα  $A$  είναι το

$$P_A(t) = t^3(t-1)^2(t-2)^5(t+2)^4$$

(1) Να βρεθεί το  $n$ .

(2) Να βρεθεί η βαθμίδα του πίνακα  $A$ .

**Άσκηση 25.** Να εξετασθούν ως προς τη διαγωνοποίηση οι πίνακες πραγματικών αριθμών:

$$A_1 = (1), \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 26.** Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  πίνακας πραγματικών αριθμών και υποθέτουμε ότι οι μόνες ιδιοτιμές του  $A$  είναι οι  $2, 1, -7$ , και  $13$ , πιθανόν με κάποιες πολλαπλότητες. Ναδειχθεί ότι ο πίνακας  $A + I_n$  είναι αντιστρέψιμος.

**Άσκηση 27.** Να βρεθεί ένας  $3 \times 3$  πίνακας πραγματικών αριθμών  $A$  για τον οποίο τα διανύσματα στήλες

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

είναι ιδιοδιανύσματα του  $A$  με αντίστοιχες ιδιοτιμές 1, 2 και 3.

**Άσκηση 28.** Έστω  $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  ένας ενδομορφισμός του  $\mathbb{K}$ -διανυσματικού χώρου  $\mathcal{E}$ , όπου  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$ . Αν

$$\mathcal{E} = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$$

να δείχθει ότι ο  $f$  είναι διαγωνοποιήσιμος.

- (1) (α) Αν  $f^2 = \text{Id}_{\mathcal{E}}$ , να δείξετε ότι ο  $f$  είναι διαγωνοποιήσιμος.  
 (β) Αν  $f^2 = f$ , να δείξετε ότι ο  $f$  είναι διαγωνοποιήσιμος.
- (2) Έστω  $A \in M_n(\mathbb{K})$ .  
 (α) Αν  $A^2 = I_n$ , να δείξετε ότι ο πίνακας  $A$  είναι διαγωνοποιήσιμος.  
 (β) Αν  $A^2 = A$ , να δείξετε ότι ο πίνακας  $A$  είναι διαγωνοποιήσιμος.

**Άσκηση 29.** Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση :

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + kz, 2ky, ky + 2z)$$

Να βρεθούν οι τιμές του  $k \in \mathbb{R}$  για τις οποίες η  $f$  είναι διαγωνοποιήσιμη.

**Άσκηση 30.** Να προσδιορισθεί ο  $n$ -οστός όρος της ακολουθίας Fibonacci  $(F_n)_{n \geq 0}$ , όπου

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad \forall n \geq 1$$

**Άσκηση 31.** Έστω  $(x_n)_{n \geq 0}$ ,  $(y_n)_{n \geq 0}$  και  $(z_n)_{n \geq 0}$  ακολουθίες πραγματικών αριθμών οι οποίες συνδέονται με τις παρακάτω αναγωγικές σχέσεις,  $\forall n \geq 1$ :

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} \\ y_n &= -2x_{n-1} - 3y_{n-1} - 2z_{n-1} \\ z_n &= 2x_{n-1} + 4y_{n-1} + 3z_{n-1} \end{aligned}$$

Να βρεθούν οι ακολουθίες, αν γνωρίζουμε ότι :  $x_0 = 2, y_0 = 3, z_0 = 1$ .