

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΤΜΗΜΑ Β'

(Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII2020/LAII2020.html>

Παρασκευή 27 Μαρτίου 2020

Άσκηση 1. Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$. Ναδειχθεί ότι η μόνη ιδιοτιμή του A είναι η $\lambda = 0$ αν και μόνον αν $A^n = 0$.

Άσκηση 2. Να δείξετε ότι ένας μηδενοδύναμος πίνακας $A \in M_n(\mathbb{K})$, δηλαδή υπάρχει $m \geq 1$ έτσι ώστε $A^m = 0$, είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνον αν $A = 0$.

Άσκηση 3. Να εξετασθεί αν υπάρχει 2×2 πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} έτσι ώστε $A^3 = 0$ και $A^2 \neq 0$.

Άσκηση 4. Αν $A \in M_n(\mathbb{K})$ και ισχύει ότι $A^k = 0$, για κάποιον θετικό ακέραιο k , ναδειχθεί ότι: $A^n = 0$.

Άσκηση 5. Έστω $A \in M_2(\mathbb{K})$.

(1) Αν $\text{Tr}(A^2) = 5$ και $\text{Tr}(A) = 3$, να βρεθεί η ορίζουσα $|A|$ του πίνακα A .

(2) Αν $\text{r}(A) = 1$ και $\text{Tr}(A) = 5$, να βρεθεί το ίχνος $\text{Tr}(A^2)$ του πίνακα A^2 .

(3) Αν $B \in M_2(\mathbb{K})$ είναι ένας πίνακας όμοιος με τον A , τότε: $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$.

(4) Αν ο A έχει θετικές ακέραιες ιδιοτιμές και ορίζουσα $|A| = 5$, να βρεθεί το ίχνος $\text{Tr}(A)$ του πίνακα A .

Άσκηση 6. Έστω A και B δύο 2×2 πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} , και υποθέτουμε ότι $(AB)^2 = 0$. Να εξετασθεί αν $(BA)^2 = 0$.

Άσκηση 7. Έστω A και B δύο 2×2 πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} , και υποθέτουμε ότι:

$$A = AB - BA$$

Ναδειχθεί ότι:

$$A^2 = 0$$

Άσκηση 8. Έστω A ένας 2×2 πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} , και υποθέτουμε ότι:

$$|A| = 0 \quad \text{και} \quad \text{Tr}(A) \neq -1$$

Ναδειχθεί ότι ο πίνακας $A + I_2$ είναι αντιστρέψιμος και:

$$A^{-1} = I_2 - \frac{1}{1 + \text{Tr}(A)} A$$

Άσκηση 9. Θεωρούμε τον πίνακα πραγματικών αριθμών

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

και έστω ο πίνακας

$$B = A^4 - 3A^3 + 3A^2 - 2A + 8I_2$$

(1) Να δειχθεί ότι:

$$B^2 = -I_2$$

(2) Είναι ο πίνακας B ή ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του \mathbb{R} ;

(3) Είναι ο πίνακας B ή ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του \mathbb{C} ;

Αν είναι στις παραπάνω περιπτώσεις ο πίνακας B ή ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, να διαγωνοποιηθεί.

Άσκηση 10. Να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$, δηλαδή να βρεθεί ένας πίνακας $B \in M_2(\mathbb{K})$ έτσι ώστε $B^2 = A$.

Άσκηση 11. Έστω \mathcal{E} ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} και \mathcal{B} μια βάση του \mathcal{E} . Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του \mathcal{E} και $P(t) \in \mathbb{K}[t]$ ένα πολυώνυμο. Τότε:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(P(f)) = P(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f))$$

Άσκηση 12. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} , όπου $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$. Να δειχθεί ότι το ελάχιστο πολυώνυμο της f συμπίπτει με το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακά της σε μια τυχούσα βάση \mathcal{B} του \mathcal{E} :

$$Q_f(t) = Q_{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)}(t)$$

Άσκηση 13. (1) Έστω $Q(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_mt^m \in \mathbb{K}[t]$ και $A \in M_n(\mathbb{K})$. Τότε για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $P \in M_n(\mathbb{K})$ ισχύει ότι:

$$Q(P^{-1}AP) = P^{-1}Q(A)P$$

(2) Να δειχθεί ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

(3) Να δειχθεί ότι¹, για κάθε τετραγωνικό πίνακα A , οι πίνακες A και tA έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

Άσκηση 14. Βρείτε τα ελάχιστα πολυώνυμα των ακόλουθων πινάκων πραγματικών αριθμών:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 15. Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t)$ του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

και στη συνέχεια με τη βοήθεια του Θεωρήματος των Cayley-Hamilton να υπολογίσετε τον πίνακα

$$B = A^{23} - 3A^{22} - 4A^{21} + 10A^{20} - A^6 + 3A^5 + 4A^4 - 11A^3 + 4A^2 + 5A + I_3$$

¹Αποδεικνύεται ότι οι πίνακες A και tA είναι όμοιοι.

Άσκηση 16. Έστω A ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας. Ναδειχθεί ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ο σταθερός όρος του ελάχιστου πολυωνύμου $Q_A(t)$ του A είναι μη-μηδενικός.

Άσκηση 17. Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Με τη βοήθεια του Θεωρήματος των Cayley-Hamilton να εκφράσετε τον αντίστροφο του πίνακα

$$B = A^4 + 5A^3 - 48A^2 - I_2$$

στη μορφή $\kappa A + \lambda I_2$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ είναι κατάλληλοι πραγματικοί αριθμοί.

Άσκηση 18. Έστω A ένας 2×2 πίνακας με στοιχεία από το \mathbb{K} , και έστω k ένας φυσικός αριθμός, $k > 2$. Με τη βοήθεια του Θεωρήματος των Cayley-Hamilton να αποδειχθεί ότι

$$A^k = 0 \implies A^2 = 0$$

Άσκηση 19. Αν A είναι ένας $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών, όπου n είναι περιττός, ναδειχθεί ότι

$$A^2 + I_n \neq O$$

Λύση. Υποθέτουμε ότι $A^2 + I_n = O$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Θεωρούμε το πολυώνυμο $Q(t) = t^2 + 1$. Τότε $Q(A) = O$ και επομένως

$$Q_A(t) \mid t^2 + 1$$

Επειδή το πολυώνυμο $t^2 + 1$ είναι ανάγωγο, έπεται ότι $Q_A(t) = t^2 + 1$. Το πολυώνυμο $t^2 + 1$ δεν έχει πραγματικές ρίζες. Από την άλλη πλευρά, επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t)$ είναι περιττού βαθμού, έπεται ότι² έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα. Επειδή το ελάχιστο και χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχουν τις ίδιες ρίζες, έπεται ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t) = t^2 + 1$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα, και αυτό είναι άτοπο. Στο άτοπο καταλήξαμε υποθέτοντας ότι $A^2 + I_n = O$. Άρα $A^2 + I_n \neq O$. ■

Άσκηση 20. Έστω $R(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_k t^k$ ένα πολυώνυμο υπεράνω του \mathbb{K} με $a_0 \neq 0$.

- (1) Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του \mathcal{E} , όπου \mathcal{E} είναι ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Αν $R(f) = 0$, ναδειχθεί ότι ο f είναι ισομορφισμός και να υπολογισθεί ο f^{-1} .
- (2) Αν $A \in M_n(\mathbb{K})$ και $R(A) = 0$, ναδειχθεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και να υπολογισθεί ο A^{-1} .

Άσκηση 21. Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος (α) υπεράνω του \mathbb{R} ; (β) υπεράνω του \mathbb{C} ;

Άσκηση 22. Έστω ο $n \times n$ πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) Ναδειχθεί ότι ο πίνακας $\frac{1}{n}A$ είναι ταυτοδύναμος, δηλαδή $(\frac{1}{n}A)^2 = \frac{1}{n}A$.

²Θεωρούμε γνωστό ότι: «κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα».

(2) Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του $\frac{1}{n}A$.

(3) Να δείχθει ότι ο πίνακας $\frac{1}{n}A$ είναι διαγωνοποιήσιμος. Ποιά είναι η διαγώνια μορφή του;

Υπενθυμίζουμε ότι η σχέση ομοιότητας $n \times n$ πινάκων είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $M_n(\mathbb{K})$. Η κλάση ομοιότητας ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{K})$ αποτελείται από το σύνολο όλων των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} οι οποίοι είναι όμοιοι με τον A .

Άσκηση 23. Να περιγραφούν οι διαφορετικές κλάσεις ομοιότητας ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{K})$ για τον οποίο ισχύει

$$A^3 = A$$

Άσκηση 24. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

(1) Να βρεθεί μη-μηδενικό πολυώνυμο $Q(t)$ έτσι ώστε $Q(A) = 0$.

(2) Να δείξετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί πολυώνυμο $P(t)$ έτσι ώστε $P(A) = A^{-1}$.

Άσκηση 25. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Να δείχθει ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί πολυώνυμο $P(t)$ έτσι ώστε:

$$A^{-2} = P(A)$$

(2) Να δείχθει ότι

$$A^{2018} - 2A^{2017} = A^2 - 2A$$

Άσκηση 26. Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα πραγματικών αριθμών

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a & a-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Είναι ο A διαγωνοποιήσιμος;

Άσκηση 27. Έστω ότι $A \in M_n(\mathbb{K})$ είναι ένας πίνακας τέτοιος ώστε $A^3 = 2A$. Αν ο A είναι πίνακας πραγματικών αριθμών, δηλαδή αν $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, να δείχθει ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος. Ποιά είναι η διαγώνια μορφή του;

Αν ο A είναι πίνακας ρητών αριθμών, δηλαδή αν $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, είναι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος;

Άσκηση 28. Έστω A ένας 4×4 πίνακας πραγματικών αριθμών για τον οποίο ισχύουν τα εξής:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του A .

Υπενθυμίζουμε ότι:

- (1) Ένας ενδομορφισμός $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ καλείται *μηδενοδύναμος* αν: $f^m = 0$, για κάποιο $m \geq 1$.
- (2) Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{K})$ καλείται *μηδενοδύναμος* αν: $A^m = 0$, για κάποιο $m \geq 1$.

Άσκηση 29. Έστω \mathcal{E} ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος διάστασης $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$ και $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του \mathcal{E} . Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) Ο f είναι μηδενοδύναμος: $f^m = 0$, για κάποιο $m \geq 1$.
- (2) Η μόνη ιδιοτιμή του f είναι η μηδενική.
- (3) $f^n = 0$.
- (4) Το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_f(t)$ του f είναι της μορφής: $Q_f(t) = t^m$, για κάποιο $m \geq 1$.

Άσκηση 30. Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$ ένας τετραγωνικός πίνακας. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) Ο A είναι μηδενοδύναμος: $A^m = O$, για κάποιο $m \geq 1$.
- (2) Η μόνη ιδιοτιμή του A είναι η μηδενική.
- (3) $A^n = O$.
- (4) Το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ είναι της μορφής: $Q_A(t) = t^m$, για κάποιο $m \geq 1$.

Άσκηση 31. Αν $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Τότε οι πίνακες AB και BA έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$$

Άσκηση 32. Έστω \mathcal{E} ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, και έστω $f, g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ δύο ενδομορφισμοί του \mathcal{E} . Τότε οι ενδομορφισμοί $f \circ g$ και $g \circ f$ έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$P_{f \circ g}(t) = P_{g \circ f}(t)$$

Άσκηση 33. Έστω A ένας 2×2 πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} και υποθέτουμε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι 3 και -1 . Έστω $n \geq 0$. Να βρεθεί ο πίνακας A^n , $\forall n \in \mathbb{Z}$, συναρτήσει των πινάκων A και I_2 , σε δύο μέρη:

- (1) Να βρεθούν αριθμοί $a_n, b_n \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $A^{n+1} = a_n A + b_n I_2$.
- (2) Να βρεθούν αριθμοί $c_n, d_n \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $A^{-n-1} = c_n A + d_n I_2$.

Άσκηση 34 (Θεώρημα Cayley-Hamilton). Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Αν $P_A(t)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A , να δείχθει ότι:

$$P_A(A) = O$$

Η επόμενη ομάδα ασκήσεων **33 - 38** αφορά ταυτόχρονη διαγωνοποίηση ενδομορφισμών και τετραγωνικών πινάκων, με την ακόλουθη έννοια.

- (1) Έστω \mathcal{E} ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f, g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ δύο ενδομορφισμοί του \mathcal{E} . Τότε οι ενδομορφισμοί f και g καλούνται **ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι**, αν υπάρχει βάση \mathcal{C} του \mathcal{E} η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f και του g .

(2) Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ δύο $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} . Οι πίνακες A, B καλούνται **ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι** αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \Delta_1 \quad \text{και} \quad P^{-1} \cdot B \cdot P = \Delta_2$$

όπου οι πίνακες Δ_1 και Δ_2 είναι διαγώνιοι. Δηλαδή αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ο οποίος διαγωνοποιεί ταυτόχρονα τους A, B .

Άσκηση 35. Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ δύο $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} . Αν οι πίνακες A, B είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι, τότε ισχύει ότι:

$$AB = BA$$

Άσκηση 36. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός, όπου $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$. Υποθέτουμε ότι

$$\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \quad \text{και} \quad f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$$

Θεωρούμε τον επαγόμενο ενδομορφισμό $f_{\mathcal{V}} = f|_{\mathcal{V}}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, όπου $f|_{\mathcal{V}}$ είναι ο περιορισμός του f στον υπόχωρο \mathcal{V} .

(1) Να δειχθεί ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_{f_{\mathcal{V}}}(t)$ του $f_{\mathcal{V}}$ διαιρεί το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_f(t)$ του f :

$$Q_{f_{\mathcal{V}}}(t) \mid Q_f(t)$$

(2) Να δειχθεί ότι

$$O \ f \ \text{είναι διαγωνοποιήσιμος} \quad \implies \quad O \ f_{\mathcal{V}} \ \text{είναι διαγωνοποιήσιμος}$$

Άσκηση 37. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός, όπου $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$. Υποθέτουμε ότι

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_k \quad \text{και} \quad f(\mathcal{V}_i) \subseteq \mathcal{V}_i, \quad 1 \leq i \leq k$$

Θεωρούμε τους επαγόμενους ενδομορφισμούς $f_{\mathcal{V}_i}: \mathcal{V}_i \rightarrow \mathcal{V}_i$, όπου $f_{\mathcal{V}_i} = f|_{\mathcal{V}_i}$ είναι ο περιορισμός του f στον υπόχωρο \mathcal{V}_i . Τότε:

$$O \ f \ \text{είναι διαγωνοποιήσιμος} \quad \iff \quad O \ f_{\mathcal{V}_i} \ \text{είναι διαγωνοποιήσιμος}, \quad 1 \leq i \leq k$$

Άσκηση 38. Έστω \mathcal{E} ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f, g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ δύο ενδομορφισμοί του \mathcal{E} . Υποθέτουμε ότι οι f και g είναι διαγωνοποιήσιμοι και $f \circ g = g \circ f$. Να δειχθεί ότι υπάρχει βάση \mathcal{C} του \mathcal{E} η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f και του g .

Η ακόλουθη Άσκηση παρουσιάζει ένα κριτήριο ταυτόχρονης διαγωνοποίησης για ενδομορφισμούς.

Άσκηση 39. Έστω \mathcal{E} ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f, g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ δύο ενδομορφισμοί του \mathcal{E} . Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) Οι f και g είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι.
- (2) Οι f και g είναι διαγωνοποιήσιμοι και: $f \circ g = g \circ f$.

Η ακόλουθη Άσκηση παρουσιάζει ένα κριτήριο ταυτόχρονης διαγωνοποίησης για τετραγωνικούς πίνακες.

Άσκηση 40. Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ δύο $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} . Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) Οι πίνακες A και B είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι.
- (2) Οι πίνακες A και B είναι διαγωνοποιήσιμοι και: $AB = BA$.

Άσκηση 41. Θεωρούμε τον ακόλουθο πίνακα πραγματικών αριθμών:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

- (1) Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος;
- (2) Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1} \cdot A \cdot P$ να είναι άνω τριγωνικός.

Άσκηση 42. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 14 & 11 \\ -3 & -5 & -5 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι άνω τριγωνικός.