ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Τμημα **Β′** (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

Ασκησεις - Φυλλαδιο **4**

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:
http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII2020/LAII2020.html

Δευτέρα 6 Απριλίου 2020

Άσκηση 1. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας μονομορφισμός. Ορίζουμε απεικόνιση*

$$\langle\langle , \rangle\rangle\colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle\rangle = \langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle$$

Να δειχθεί ότι το ζεύγος $(\mathcal{E}, \langle\langle , \rangle\rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος.

Άσκηση 2. *Έστω η απεικόνιση $\langle \ , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως εξής:*

$$\big\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \big\rangle = 5x_1x_2 - 2(x_1y_2 + y_1x_2) + y_1y_2$$

(1) *Να δειχθεί ότι η παραπάνω απεικόνιση ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^2$.*
(2) *Να βρεθούν τα μήκη των διανυσμάτων $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(-1, 2)$ ως προς το παραπάνω το εσωτερικό γινόμενο.*

Άσκηση 3. *Έστω $\mathbb{R}_n[t]$ ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων βαθμού $\leq n$, με πραγματικούς συντελεστές. Έστω ότι $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ είναι ανα δύο διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να δειχθεί ότι η σχέση*

$$\langle P(t), Q(t) \rangle = P(\alpha_0)Q(\alpha_0) + P(\alpha_1)Q(\alpha_1) \cdots + P(\alpha_n)Q(\alpha_n)$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}_n[t]$. Να βρεθεί το μήκος καθενός από τα διανύσματα της κανονικής βάσης $\mathcal{B} = \big\{1, t, t^2, \cdots, t^n\big\}$ του $\mathbb{R}_n[t]$ ως προς το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο.

Άσκηση 4. *Θεωρούμε τη βάση $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1 = (1, 1),\ \vec{\varepsilon}_2 = (1, -1)\}$ του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε ότι η απεικόνιση $\langle \ , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathbb{R}^2$ έτσι ώστε:*

$$\langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_1 \rangle = \langle \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_2 \rangle = 1, \qquad \langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2 \rangle = 0$$

Να υπολογισθούν οι αριθμοί $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle$, όπου $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Άσκηση 5. *Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}_2[t]$ με εσωτερικό γινόμενο, $\forall P(t), Q(t) \in \mathbb{R}_2[t]$:*

$$\langle P(t), Q(t) \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\, dt$$

και τα πολυώνυμα

$$P(t) = 1, \qquad Q(t) = t - \frac{1}{2}, \qquad W(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$$

Να υπολογισθούν τα μήκη

$$\|P(t)\|, \quad \|Q(t)\|, \quad \|W(t)\|$$

Άσκηση 6. *Να υπολογισθεί η γωνία των διανυσμάτων* $\vec{x} = (1,0,1)$, $\vec{y} = (-1,1,0) \in \mathbb{R}^3$ *ως προς το συνήθες εσωτερικό γινόμενο του* $\mathbb{R}^3$. *Ακολούθως να βρεθούν όλα τα διανύσματα του* $\mathbb{R}^3$ *τα οποία είναι κάθετα στα διανύσματα* $\vec{x}$ *και* $\vec{y}$.

Άσκηση 7. *Έστω ότι* $(\mathcal{E}_i, \langle , \rangle_i)$, $1 \leq i \leq n$, *είναι Ευκλείδειοι χώροι. Στον* R*-διανυσματικό χώρο* $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \cdots \times \mathcal{E}_n$, *ορίζουμε απεικόνιση:*

$$\langle \, , \, \rangle \colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n), (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n) \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{y}_1 \rangle_1 + \langle (\vec{x}_2, \vec{y}_2 \rangle_2 + \cdots + \langle (\vec{x}_n, \vec{y}_n \rangle_n$$

Να δειχθεί ότι το ζεύγος $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ *είναι ένας Ευκλείδειος χώρος.*

Ένας συμμετρικός πίνακας $A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ καλείται **θετικά ορισμένος**, αν:

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_n : \qquad {}^tX \cdot A \cdot X \; \geq \; 0 \quad \text{και} \quad {}^tX \cdot A \cdot X = 0 \quad \Longrightarrow \quad X = O$$

όπου:

$${}^tX \cdot A \cdot X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j a_{ij}$$

Άσκηση 8. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος και* $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ *μια βάση του* $\mathcal{E}$. *Θεωρούμε τον πίνακα:*

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \langle \vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_j \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Αν $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, *να δειχθεί ότι:*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = {}^tX \cdot A \cdot Y$$

όπου:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

είναι οι συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{x}, \vec{y}$ *στη βάση* $\mathcal{B}$, *και ο πίνακας* A *είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.*

Άσκηση 9. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας* $\mathbb{R}$*-διανυσματικός χώρος και* $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ *μια βάση του* $\mathcal{E}$. *Αν* $A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$, *τότε ορίζουμε απεικόνιση:*

$$\langle , \rangle \colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = {}^tX \cdot A \cdot Y$$

όπου:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

είναι οι συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{x}, \vec{y}$ *στη βάση* $\mathcal{B}$. *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση* $\langle , \rangle$ *είναι ένα εσωτερικό γινόμενο επί του* $\mathcal{E}$ *αν και μόνον αν ο πίνακας* A *είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.*

Άσκηση 10. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Να εξετασθεί αν η απεικόνιση

$$\langle , \rangle_* \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_* = {}^tX \cdot A \cdot Y$$

όπου $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, *και:*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$. *Αν η απάντηση είναι θετική, τότε:*

(1) *Να προσδιορισθούν τα μήκη, καθώς και οι μεταξύ τους γωνίες, των διανυσμάτων της κανονικής βάσης του* $\mathbb{R}^3$ *ως προς αυτό το εσωτερικό γινόμενο.*
(2) *Να βρεθούν όλα τα διανύσματα* $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ *έτσι ώστε:*

$$\langle (1,1,1),\, (x_1, x_2, x_3) \rangle_* = 0$$

Άσκηση 11. *Να εξετασθεί αν απεικόνιση*

$$\langle \ , \rangle_* \ : \ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle_* = -x_2 y_1 + x_3 y_1 - x_1 y_2 + x_1 y_3 + x_3 y_3$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 12. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος.*

(1) *Αν* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, *να δειχθεί ότι:* $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| \iff \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} \rangle = 0$. *Ποιά είναι η γεωμετρική ερμηνεία της ισοδυναμίας;*
(2) *Αν* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, *να δειχθεί ότι:*

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| \quad \iff \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : \ \|a\vec{x} + b\vec{y}\| = \|b\vec{x} + a\vec{y}\|$$

(3) *Αν* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, *να δειχθεί ότι:*

$$\big| \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \big| \ \leq \ \|\vec{x} - \vec{y}\| \ \leq \ \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

Ποιά είναι η γεωμετρική ερμηνεία της ανισότητας;
(4) *Έστω ότι* $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *είναι ένας ενδομορφισμός, όπου* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} < \infty$, *έτσι ώστε* $\|f(\vec{x})\| \leq \|\vec{x}\|, \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$.
  (α') *Να δειχθεί ότι για κάθε* $\lambda \in \mathbb{R}$ *με* $|\lambda| > 1$, *ο ενδομορφισμός* $f - \lambda \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$ *του* $\mathcal{E}$ *είναι αντιστρέψιμος.*
  (β') *Να δειχθεί ότι αν* λ *είναι μια ιδιοτιμή του* f, $|\lambda| \leq 1$.

Ένας **μετρικός χώρος** είναι ένα ζεύγος (E, d) αποτελούμενο από ένα μη-κενό σύνολο X και από μια απεικόνιση

$$\mathsf{d} \colon E \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto \mathsf{d}(x, y)$$

έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες:

(1) $\forall x, y \in E\colon\ \mathsf{d}(x, y) \geq 0$. (Μη-αρνητικότητα)
(2) $\mathsf{d}(x, y) = 0 \iff x = y$.
(3) $\forall x, y \in E\colon\ \mathsf{d}(x, y) = \mathsf{d}(y, x)$. (Συμμετρία)
(4) $\forall x, y, z \in E\colon\ \mathsf{d}(x, y) \leq \mathsf{d}(x, z) + \mathsf{d}(z, y)$. (Τριγωνική ανισότητα)

Η απεικόνιση d καλείται **μετρική**.

Άσκηση 13. *Έστω ότι $(\mathcal{E},\, \langle , \rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος. Ορίζουμε απεικόνιση*

$$\mathsf{d}\colon \mathcal{E}\times\mathcal{E}\longrightarrow\mathbb{R},\quad (x,y)\longmapsto \mathsf{d}(x,y)=\|\vec{x}-\vec{y}\| \qquad (\textit{απόσταση των } \vec{x},\, \vec{y})$$

Να δειχθεί ότι η απεικόνιση d *είναι μια μετρική και άρα το ζεύγος* $(\mathcal{E},\, \mathsf{d})$ *είναι ένας μετρικός χώρος.*

Άσκηση 14. *Έστω ότι $a_1, a_2, \cdots, a_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να δειχθεί ότι:*

$$n^2 \ \leq\ \Big(a_1+a_2+\cdots+a_n\Big)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

Άσκηση 15. *Έστω η απεικόνιση $\langle\ ,\rangle'\ :\ \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως εξής:*

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle' = x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3$$

(1) *Δείξτε ότι η παραπάνω απεικόνιση ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$.*
(2) *Να βρεθούν όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ τα οποία είναι κάθετα, ως προς το εσωτερικό γινόμενο $\langle\ ,\rangle'$, με κάθε διάνυσμα του υπόχωρου*

$$\mathcal{V}=\Big\{(x,y,z)\mid x-y+z=0\Big\}$$

Υπενθυμίζουμε ότι ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{C}=\Big\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n\Big\}$ του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E},\, \langle , \rangle)$ καλείται:

(1) **ορθογώνιο**, αν: $1\leq i\neq j\leq n \quad\Longrightarrow\quad \langle\vec{e}_i,\vec{e}_j\rangle=0$.
(2) **ορθοκανονικό**, αν είναι ορθογώνιο και, $\forall i=1,2,\cdots,n$: $\|\vec{e}_i\|=1$.
(3) **ορθοκανονική βάση**, αν είναι βάση και ορθοκανονικό σύνολο.

Άσκηση 16. *Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\big(\mathbb{R}_2[t],\langle\,\rangle\big)$ εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο*

$$\big\langle P(t),Q(t)\big\rangle=\int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

(1) *Να βρεθούν τα μήκη και οι γωνίες των διανυσμάτων t, $1+t$.*
(2) *Να δειχθεί ότι το σύνολο διανυσμάτων*

$$P(t)=1,\qquad Q(t)=t-\frac{1}{2},\qquad R(t)=t^2-t+\frac{1}{6}$$

είναι μια ορθογώνια βάση του $\mathbb{R}_2[t]$.
(3) *Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_2[t]$.*

Άσκηση 17. *Έστω $\mathcal{B}=\Big\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n\Big\}$ μια ορθοκανονική βάση του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E},\, \langle , \rangle)$, και $\vec{x}\in\mathcal{E}$ ένα μη-μηδενικό διάνυσμα. Αν θ_i είναι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{x}$ και $\vec{e}_i$, $1\leq i\leq n$, να δειχθεί ότι:*

$$\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cdots+\cos^2\theta_n=1$$

Άσκηση 18. *Έστω $(\mathcal{E},\, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\mathcal{C}=\Big\{\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_m\Big\}$ ένα ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{E}$. Να δείξετε ότι, $\forall\ \vec{y}\in\mathcal{E}$:*

$$\langle\vec{y},\vec{\varepsilon}_1\rangle^2+\cdots+\langle\vec{y},\vec{\varepsilon}_m\rangle^2 \ \leq\ \|\vec{y}\|^2$$

και:

$$\langle\vec{y},\vec{\varepsilon}_1\rangle^2+\cdots+\langle\vec{y},\vec{\varepsilon}_m\rangle^2 \ =\ \|\vec{y}\|^2 \qquad\Longleftrightarrow\qquad m=\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{E}$$

Άσκηση 19. *Έστω $(\mathcal{E},\ \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι:*

$$\big\langle \vec{x}, \vec{y} \big\rangle = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|\vec{x}\| \ \leq \ \|\vec{x} + \lambda \vec{y}\|, \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Έστω $(\mathcal{E},\ \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n \in \mathcal{E}$. Ο **πίνακας Gram** των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ ορίζεται ως εξής:

$$G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) = \begin{pmatrix} \langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_n \rangle \\ \langle \vec{x}_2, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{x}_n, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_n, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_n, \vec{x}_n \rangle \end{pmatrix}$$

και η **ορίζουσα Gram** των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ ορίζεται ως η ορίζουσα του πίνακα Gram:

$$\big|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)\big| = \begin{vmatrix} \langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_n \rangle \\ \langle \vec{x}_2, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{x}_n, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_n, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_n, \vec{x}_n \rangle \end{vmatrix}$$

Άσκηση 20. *Έστω $(\mathcal{E},\ \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n \in \mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι:*

$$\big|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)\big| \ \neq \ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{το σύνολο διανυσμάτων } \big\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\big\} \text{ είναι γραμμικά ανεξάρτητο}$$

Άσκηση 21. *Έστω ότι $a_1, a_2, \cdots, a_n$, $b_1, b_2, \cdots, b_n$, και $c_1, c_2, \cdots, c_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν $c_1, c_2, \cdots, c_n > 0$, να δειχθεί ότι:*

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} c_i a_i b_i\Big| \ \leq \ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i b_i^2}$$

Άσκηση 22. *Έστω ότι $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος. Να δείξετε ότι, $\forall \vec{z}, \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$:*

$$\big\|\vec{z} - \vec{x}\big\|^2 + \big\|\vec{z} - \vec{y}\big\|^2 = \frac{1}{2}\,\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 \ + \ 2\left\|\vec{z} - \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y})\right\|^2 \qquad \textit{(Ταυτότητα του Απολλώνιου)}$$

Τι εκφράζει γεωμετρικά η ταυτότητα του Αποlλlλώνιου;

Άσκηση 23. *Έστω $(\mathcal{E},\ \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ τρία διανύσματα του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι:*

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| \cdot \|\vec{z}\| \ \leq \ \|\vec{y} - \vec{z}\| \cdot \|\vec{x}\| + \|\vec{z} - \vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \qquad \textit{(Ανισότητα του Πτολεμαίου)}$$

Άσκηση 24. *Έστω ότι $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος. Αν $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, να δειχθεί ότι:*

(1)
$$2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 \qquad \textit{(Νόμος του Παραλληλογράμμου)}$$

Τι εκφράζει γεωμετρικά ο Νόμος του παραλlληlογράμμου;

(2)
$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2}{4}$$

Τι εκφράζει αλγεβρικά η παραπάνω ταυτότητα;

Αν $\mathcal{E}$ είναι ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος, τότε μια απεικόνιση

$$\|\cdot\| \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{x} \longmapsto \|\vec{x}\|$$

καλείται **στάθμη** επί του $\mathcal{E}$, αν και μόνο αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ και $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

(1) $\|\vec{x}\| \geq 0$, και $\|\vec{x}\| = 0$ αν και μόνον αν $\vec{x} = \vec{0}$.
(2) $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|$.
(3) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Το ζεύγος $(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$ καλείται **σταθμητός χώρος**, αν $\mathcal{E}$ είναι ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος και $\|\cdot\| \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι μια στάθμη επί του $\mathcal{E}$.

Για παράδειγμα, αν $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος, τότε γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση

$$\|\cdot\| \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{x} \longmapsto \|\vec{x}\| = +\sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$$

είναι μια στάθμη επί του $\mathcal{E}$. Η στάθμη αυτή καλείται η **στάθμη η οποία επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο** $\langle\, , \rangle$. Επομένως κάθε Ευκλείδειος χώρος είναι σταθμητός χώρος.

Οι επόμενες δύο Ασκήσεις δείχνουν ότι υπάρχουν στάθμες επί ενός $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου οι οποίες δεν επάγονται από ένα εσωτερικό γινόμενο.

Άσκηση 25. *Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$, θεωρούμε την απεικόνιση*

$$\|\cdot\|_\infty \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto \|\vec{x}\|_\infty = \max\big\{|x_1|,\, |x_2|,\, \cdots,\, |x_n|\big\}$$

Να δειχθεί ότι η απεικόνιση $\|\cdot\|_\infty$ είναι μια στάθμη επί του $\mathbb{R}^n$ η οποία δεν επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο.

Άσκηση 26. *Για κάθε πραγματικό αριθμό $p > 1$, θεωρούμε την απεικόνιση*

$$\|\cdot\|_p \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto \|\vec{x}\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(1) *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση $\|\cdot\|_p$ είναι μια στάθμη επί του $\mathbb{R}^n$.*
(2) *Να δειχθεί ότι η στάθμη $\|\cdot\|_p$ επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$ αν και μόνον αν $p = 2$.*