

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΤΜΗΜΑ Β'

(Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 5

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAI12020/LAI12020.html>

Παρασκευή 10 Μαΐου 2020

Αν $\mathcal{C} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ είναι ένα σύνολο διανυσμάτων ενός Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle, \rangle)$, τότε, για να μην δημιουργείται σύγχυση με το σύμβολο του εσωτερικού γινομένου \langle, \rangle , **ο υπόχωρος του \mathcal{E} ο οποίος παράγεται από το σύνολο διανυσμάτων \mathcal{C} , αντί να συμβολίζεται με $\langle \mathcal{C} \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \rangle$, θα συμβολίζεται με:**

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = \{ \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n \in \mathcal{E} \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n \}$$

Υπενθυμίζουμε ότι η **ορθογώνια προβολή** ενός διανύσματος \vec{x} σε ένα μη-μηδενικό διάνυσμα \vec{y} είναι το διάνυσμα:

$$\Pi_{\vec{y}}(\vec{x}) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle} \vec{y} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{y}\|^2} \vec{y}$$

και έχει την ιδιότητα ότι:

$$(\vec{x} - \Pi_{\vec{y}}(\vec{x})) \perp \vec{y}$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{C} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του \mathcal{E} , τότε με τη **διαδικασία Gram-Schmidt** κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο σύνολο μη-μηδενικών διανυσμάτων $\mathcal{D} = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n\}$ και ένα ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, όπου:

$$\vec{y}_1 = \vec{x}_1 \quad \text{και} \quad \vec{y}_k = \vec{x}_k - \Pi_{\vec{y}_1}(\vec{x}_k) - \Pi_{\vec{y}_2}(\vec{x}_k) - \dots - \Pi_{\vec{y}_{k-1}}(\vec{x}_k), \quad 2 \leq k \leq n \quad (\dagger)$$

και

$$\vec{e}_k = \frac{\vec{y}_k}{\|\vec{y}_k\|}, \quad 1 \leq k \leq n$$

Άσκηση 1. Έστω $(\mathcal{E}, \langle, \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος, και $\mathcal{C} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του \mathcal{E} . Έστω $\mathcal{D} = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n\}$ το ορθογώνιο σύνολο μη-μηδενικών διανυσμάτων και $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ το ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων, τα οποία κατασκευάζονται με τη διαδικασία Gram-Schmidt. Να δείχθει ότι:

$$\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k) = \mathcal{L}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_k) = \mathcal{L}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k), \quad 1 \leq k \leq n$$

Έστω $(\mathcal{E}, \langle, \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in \mathcal{E}$. Υπενθυμίζουμε από το Φυλλάδιο Ασκήσεων **4.** ότι ο **πίνακας Gram** των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ ορίζεται ως εξής:

$$G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = \begin{pmatrix} \langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_n \rangle \\ \langle \vec{x}_2, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{x}_n, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_n, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_n, \vec{x}_n \rangle \end{pmatrix}$$

και η **ορίζουσα Gram** των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ ορίζεται ως η ορίζουσα του πίνακα Gram:

$$|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)| = \begin{vmatrix} \langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_n \rangle \\ \langle \vec{x}_2, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{x}_n, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_n, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_n, \vec{x}_n \rangle \end{vmatrix}$$

Άσκηση 2. Έστω $(\mathcal{E}, \langle, \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in \mathcal{E}$. Ναδειχθεί ότι:

$$|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)| \geq 0$$

Έστω $(\mathcal{E}, \langle, \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και \mathcal{V} ένας υπόχωρος του \mathcal{E} . Υπενθυμίζουμε τότε ότι $\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^\perp$ και η **ορθογώνια προβολή** του διανύσματος $\vec{x} \in \mathcal{E}$ στον υπόχωρο \mathcal{V} είναι το (μοναδικό) διάνυσμα $\vec{y} \in \mathcal{V}$ έτσι ώστε $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, όπου $\vec{z} \in \mathcal{V}^\perp$, και συμβολίζεται με $\vec{y} = \Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x})$. Το (μοναδικό) διάνυσμα \vec{z} παραπάνω καλείται¹ η **κάθετη προβολή** του διανύσματος $\vec{x} \in \mathcal{E}$ στον υπόχωρο \mathcal{V} και συμβολίζεται με $\vec{z} = K_{\mathcal{V}}(\vec{x})$.

Με τους παραπάνω συμβολισμούς, έχουμε μοναδική γραφή:

$$\vec{x} = \Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) + K_{\mathcal{V}}(\vec{x}), \quad \text{όπου } \Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) \in \mathcal{V} \quad \text{και} \quad K_{\mathcal{V}}(\vec{x}) \in \mathcal{V}^\perp$$

Άσκηση 3. Έστω $(\mathcal{E}, \langle, \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος, και $\mathcal{C} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο διανυσμάτων του \mathcal{E} . Έστω $\mathcal{C} = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n\}$ το ορθογώνιο σύνολο μη-μηδενικών διανυσμάτων το οποίο κατασκευάζεται ακολουθώντας τη διαδικασία Gram-Schmidt. Ναδειχθεί ότι, $\forall k = 2, \dots, n$:

$$\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k) = \mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{k-1}) \oplus \mathcal{L}(\vec{y}_k) \quad (\text{ορθογώνιο ευθύ άθροισμα}) \quad (\dagger)$$

Ιδιαίτερα ναδειχθεί ότι για κάθε $k = 2, \dots, n$, το διάνυσμα \vec{y}_k είναι η κάθετη προβολή του \vec{x}_k στον υπόχωρο $\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{k-1})$:

$$\vec{y}_k = K_{\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{k-1})}(\vec{x}_k)$$

Άσκηση 4. Έστω \mathcal{V} και \mathcal{W} δυο υπόχωροι του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle, \rangle)$.

(1) Ναδειχθεί ότι:

$$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W} \implies \mathcal{W}^\perp \subseteq \mathcal{V}^\perp$$

(2) Ναδειχθεί ότι:

$$(\mathcal{V} + \mathcal{W})^\perp = \mathcal{V}^\perp \cap \mathcal{W}^\perp$$

(3) Αν $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} < \infty$, ναδειχθεί ότι:

(α)

$$(\mathcal{V}^\perp)^\perp = \mathcal{V}$$

(β)

$$(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})^\perp = \mathcal{V}^\perp + \mathcal{W}^\perp$$

¹ Δηλαδή η κάθετη προβολή του \vec{x} στον υπόχωρο \mathcal{V} είναι η ορθογώνια προβολή του \vec{x} στον \mathcal{V}^\perp :

$$\Pi_{\mathcal{V}^\perp}(\vec{x}) = K_{\mathcal{V}}(\vec{x})$$

(4) Να δειχθεί ότι:

$$\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \iff \mathcal{E} = \mathcal{V}^\perp \oplus \mathcal{W}^\perp$$

Άσκηση 5. Έστω \mathcal{V} ένας υπόχωρος του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, όπου $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} < \infty$. Να δειχθεί ότι αν $\vec{x} \notin \mathcal{V}$, τότε υπάρχει διάνυσμα $\vec{w} \in \mathcal{V}^\perp$ έτσι ώστε:

$$\langle \vec{x}, \vec{w} \rangle \neq 0$$

Άσκηση 6. Έστω \mathcal{U} και \mathcal{V} δύο υπόχωροι του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, και έστω ότι

$$\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

Αν $\mathcal{U} \perp \mathcal{V}$, να δειχθεί ότι:

$$\mathcal{U}^\perp = \mathcal{V} \quad \text{και} \quad \mathcal{V}^\perp = \mathcal{U}$$

Άσκηση 7. Να δειχθεί ότι η απεικόνιση

$\langle \cdot, \cdot \rangle_* : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle_* = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 6x_2 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_3 y_3$
είναι ένα εσωτερικό γινόμενο επί του \mathbb{R}^3 . Ακολουθώντας να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του Ευκλείδειου χώρου $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_*)$.

Άσκηση 8. Στον Ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση των υπόχωρου \mathcal{U} , \mathcal{V} , και \mathcal{W} του \mathbb{R}^3 , όπου:

$$\mathcal{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 5y - 2z = 0\}$$

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 0\}$$

$$\mathcal{W} = \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 5y - 2z = 0 \text{ και } 2x - y - z = 0\}$$

Άσκηση 9. Στον Ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του υπόχωρου \mathcal{V} του \mathbb{R}^4 ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα:

$$\vec{x}_1 = (1, 1, 0, 0), \quad \vec{x}_2 = (0, 0, -2, 1), \quad \vec{x}_3 = \vec{x}_4 = (0, -1, 0, 2)$$

και ακολουθώντας να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του \mathcal{V}^\perp , και η ορθογώνια προβολή του διανύσματος $(0, 1, 0, 0)$ στον υπόχωρο \mathcal{V} .

Άσκηση 10. Θεωρούμε τον ακόλουθο υπόχωρο \mathcal{V} του Ευκλείδειου χώρου $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι το κανονικό (συνηθισμένο) εσωτερικό γινόμενο:

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y - z = 0 \text{ και } y - z - w = 0\}$$

1. Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του \mathcal{V} .
2. Να βρεθεί ο ορθογώνιος υπόχωρος \mathcal{V}^\perp του \mathcal{V} .

Άσκηση 11. Θεωρούμε τον ακόλουθο υπόχωρο του \mathbb{R}^n :

$$\mathcal{V} = \{\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του υπόχωρου \mathcal{V}^\perp , όταν:

- (1) Ο \mathbb{R}^n είναι εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο.

(2) Ο \mathbb{R}^n είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + \cdots + n x_n y_n$$

όπου: $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ και $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$.

Άσκηση 12. Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^4 εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο και τους υποχώρους του

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 3y + z = 0\}$$

$$\mathcal{W} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + w = 0\}$$

(1) Να εξετάσετε αν οι \mathcal{V} και \mathcal{W} είναι ορθοσυμπληρωματικοί².

(2) Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα $(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})^\perp$ του υπόχωρου $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$.

Άσκηση 13. Έστω ο Ευκλείδειος χώρος \mathbb{R}^3 εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο και έστω

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}$$

(1) Να βρεθούν ορθοκανονικές βάσεις των υποχώρων \mathcal{V} και \mathcal{V}^\perp .

(2) Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{x} = (2, -1, 0)$ ως $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, όπου $\vec{y} \in \mathcal{V}$ και $\vec{z} \in \mathcal{V}^\perp$.

Άσκηση 14. Έστω ο Ευκλείδειος χώρος \mathbb{R}^3 εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο και έστω η γραμμική απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$$

(1) Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση της εικόνας $\text{Im}(f)$ της f .

(2) Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του ορθοσυμπληρωματικού υποχώρου $\text{Im}(f)^\perp$.

Άσκηση 15. Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του \mathbb{R}^4 :

$$\vec{e}_1 = (2, -3, 1, 0), \quad \vec{e}_2 = (7, 3, 0, 1), \quad \vec{e}_3 = (-1, 0, 1, 0), \quad \vec{e}_4 = (0, 1, 1, 1)$$

Να βρεθεί ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ στον \mathbb{R}^4 έτσι ώστε το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ να αποτελεί ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^4 .

Άσκηση 16. Έστω \vec{e} ένα μοναδιαίο διάνυσμα σε έναν Ευκλείδειο χώρο $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Να δειχθεί ότι κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$ γράφεται μοναδικά ως εξής:

$$\vec{x} = \alpha \vec{e} + \vec{y}, \quad \text{όπου: } \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \langle \vec{y}, \vec{e} \rangle = 0$$

Ο μοναδικά προσδιορισμένος από το διάνυσμα \vec{x} αριθμός α καλείται η αριθμητική προβολή του \vec{x} στην διεύθυνση του \vec{e} και συμβολίζεται με³:

$$\alpha := \pi_{\vec{e}}(\vec{x})$$

(1) Να δειχθεί ότι η απεικόνιση

$$\pi_{\vec{e}}: \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{x} \longmapsto \pi_{\vec{e}}(\vec{x})$$

είναι γραμμική, δηλαδή, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ και $r \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha) \quad \pi_{\vec{e}}(\vec{x} + \vec{y}) = \pi_{\vec{e}}(\vec{x}) + \pi_{\vec{e}}(\vec{y}).$$

$$(\beta) \quad \pi_{\vec{e}}(r\vec{x}) = r\pi_{\vec{e}}(\vec{x})$$

²Υπενθυμίζουμε ότι δύο υπόχωροι \mathcal{U} και \mathcal{V} ενός Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ καλούνται **ορθοσυμπληρωματικοί**, αν

$$\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \quad \text{και} \quad \mathcal{U} \perp \mathcal{V}$$

και τότε ο \mathcal{U} καλείται ορθοσυμπληρωματικός του \mathcal{V} και ο \mathcal{V} καλείται ορθοσυμπληρωματικός του \mathcal{U} .

³Έτσι, επειδή το \vec{e} είναι μοναδιαίο, η ορθογώνια προβολή του \vec{x} στο διάνυσμα \vec{e} είναι το διάνυσμα $\text{Pr}_{\vec{e}}(\vec{x}) = \pi_{\vec{e}}(\vec{x})\vec{e}$.

(2) Να δειχθεί ότι, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$\pi_{\vec{e}}(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{e} \rangle$$

(3) Να δειχθεί ότι

$$\text{Ker}(\pi_{\vec{e}}) = \vec{e}^\perp = \{ \vec{x} \in \mathcal{E} \mid \langle \vec{e}, \vec{x} \rangle = 0 \} \quad \text{και} \quad \text{Im}(\pi_{\vec{e}}) = \mathbb{R}$$

(4) Αν $\mathcal{B} = \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του \mathcal{E} , να δειχθεί ότι:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \pi_{\vec{e}_i}(\vec{x}) \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i = \langle \vec{x}, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{x}, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2 + \dots + \langle \vec{x}, \vec{e}_n \rangle \vec{e}_n$$

Άσκηση 17. Έστω $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και \mathcal{V} ένας υπόχωρος του \mathcal{E} . Να δειχθεί ότι οι απεικονίσεις

$$\Pi_{\mathcal{V}}: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \vec{x} \longmapsto \Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = \text{ορθογώνια προβολή του } \vec{x} \text{ στον υπόχωρο } \mathcal{V}$$

$$\text{K}_{\mathcal{V}}: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \vec{x} \longmapsto \text{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = \text{κάθετη προβολή του } \vec{x} \text{ στον υπόχωρο } \mathcal{V}$$

είναι προβολές.

Επιπλέον, αν $\mathcal{C} = \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k \}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του \mathcal{V} και $\mathcal{D} = \{ \vec{e}_{k+1}, \vec{e}_{k+2}, \dots, \vec{e}_n \}$ μια ορθοκανονική βάση του \mathcal{V}^\perp , τότε:

(1)

$$\Pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{x}, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2 + \dots + \langle \vec{x}, \vec{e}_k \rangle \vec{e}_k$$

(2)

$$\text{Ker}(\Pi_{\mathcal{V}}) = \mathcal{V}^\perp \quad \text{και} \quad \text{Im}(\Pi_{\mathcal{V}}) = \mathcal{V}$$

(3)

$$\text{K}_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{e}_{k+1} \rangle \vec{e}_{k+1} + \langle \vec{x}, \vec{e}_{k+2} \rangle \vec{e}_{k+2} + \dots + \langle \vec{x}, \vec{e}_n \rangle \vec{e}_n$$

(4)

$$\text{Ker}(\text{K}_{\mathcal{V}}) = \mathcal{V} \quad \text{και} \quad \text{Im}(\text{K}_{\mathcal{V}}) = \mathcal{V}^\perp$$

(5) Αν $\iota_{\mathcal{V}}: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{E}$ και $\iota_{\mathcal{V}^\perp}: \mathcal{V}^\perp \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι οι κανονικές εγκλεισεις, τότε:

$$\Pi_{\mathcal{V}} \circ \iota_{\mathcal{V}} = \text{Id}_{\mathcal{V}} \quad \text{και} \quad \text{K}_{\mathcal{V}} \circ \iota_{\mathcal{V}^\perp} = \text{Id}_{\mathcal{V}^\perp}$$

$$\Pi_{\mathcal{V}} \circ \iota_{\mathcal{V}^\perp} = \mathbf{O} \quad \text{και} \quad \text{K}_{\mathcal{V}} \circ \iota_{\mathcal{V}} = \mathbf{O}$$

$$\text{Id}_{\mathcal{E}} = \iota_{\mathcal{V}} \circ \Pi_{\mathcal{V}} + \iota_{\mathcal{V}^\perp} \circ \text{K}_{\mathcal{V}}$$

Άσκηση 18. Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $(M_n(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle A, B \rangle = \text{Tr}(A \cdot {}^t B)$$

Έστω $D_n(\mathbb{R})$ ο υπόχωρος των $n \times n$ διαγώνιων πινάκων, και $S_n(\mathbb{R})$, αντίστοιχα $A_n(\mathbb{R})$, ο υπόχωρος των $n \times n$ συμμετρικών, αντίστοιχα αντισυμμετρικών, πινάκων.

(1) Να δειχθεί ότι:

$$D_n(\mathbb{R})^\perp = \{ A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}) \mid a_{ii} = 0, 1 \leq i \leq n \}$$

(2) Να δειχθεί ότι:

$$S_n(\mathbb{R})^\perp = A_n(\mathbb{R}) \quad \text{και} \quad A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$$

(3) Να βρεθούν οι ορθογώνιες προβολές ενός $n \times n$ πίνακα A στους υπόχωρους $S_n(\mathbb{R})$ και $A_n(\mathbb{R})$.

Άσκηση 19. Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, και έστω $f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του \mathcal{E} . Να δειχθεί ότι αν $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} < \infty$, τότε⁴ υπάρχει $c \in \mathbb{R}$:

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{E}: \quad \|f(\vec{x})\| \leq c \|\vec{x}\|$$

⁴Ένας ενδομορφισμός $f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ καλείται **φραγμένος**, αν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\|f(\vec{x})\| \leq c \|\vec{x}\|$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$. Έτσι σύμφωνα με την Άσκηση, κάθε ενδομορφισμός ενός Ευκλείδειου χώρου πεπερασμένης διάστασης είναι φραγμένος.

Άσκηση 20. Στον Ευκλείδειο χώρο $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ θεωρούμε τρία σύνολα διανυσμάτων

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$$

$$\mathcal{C} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n\}$$

$$\mathcal{D} = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n\}$$

και υποθέτουμε ότι:

- (1) Το σύνολο \mathcal{B} είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
- (2) Το σύνολο \mathcal{C} είναι ορθογώνιο και αποτελείται από μη-μηδενικά διανύσματα.
- (3) Το σύνολο \mathcal{D} είναι ορθογώνιο και αποτελείται από μη-μηδενικά διανύσματα.
- (4) Για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$, κάθε ένα από τα διανύσματα $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_k$ και κάθε ένα από τα διανύσματα διάνυσμα $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_k$, είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$.

Να δειχθεί ότι υπάρχουν μη-μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί $\alpha_k \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε, $\forall k = 1, 2, \dots, n$:

$$\vec{f}_k = \alpha_k \vec{g}_k$$