

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΤΜΗΜΑ Β'

(Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 7

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII2020/LAII2020.html>

Παρασκευή 22 Μαΐου 2020

Άσκηση 1. Αν $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ είναι ένας ενδομορφισμός του Ευκλείδειου χώρου πεπερασμένης διάστασης $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, τότε:

$$\text{ο ενδομορφισμός } f \text{ είναι ισομετρία} \iff f^* \circ f = \text{Id}_{\mathcal{E}}$$

δηλαδή ο f είναι ισομετρία αν και μόνον αν ο f είναι ισομορφισμός και $f^* = f^{-1}$.

Άσκηση 2. Έστω $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του \mathcal{E} . Ναδειχθεί ότι:

$$\langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = 0, \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{E} \iff f^* = -f$$

Αν $f^* = -f$, ποιές είναι οι πραγματικές ιδιοτιμές της f ;

Ένας ενδομορφισμός $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ καλείται **αντισυμμετρικός** αν και μόνον αν ισχύει ότι: $f^* = -f$.

Άσκηση 3. Ναδειχθεί ότι ένας ενδομορφισμός $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ του Ευκλείδειου χώρου πεπερασμένης διάστασης $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι αντισυμμετρικός αν και μόνον αν ο πίνακας του f σε μια ορθοκανονική βάση του \mathcal{E} είναι αντισυμμετρικός.

Άσκηση 4. Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^3 εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο. Έστω $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ο μοναδικός ενδομορφισμός του οποίου ο πίνακας στην κανονική βάση του \mathbb{R}^3 είναι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Να προσδιορισθεί ο προσαρτημένος ενδομορφισμός $f^*: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ του f .

Άσκηση 5. Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^3 εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο. Έστω $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ένας ενδομορφισμός για τον οποίο ισχύει ότι:

$$f(1, 0, 1) = (1, 4, 1), \quad f(1, 0, -1) = (-3, 0, 3), \quad f(0, 1, 0) = (2, -1, 2)$$

Να προσδιορισθεί ο προσαρτημένος ενδομορφισμός $f^*: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ του f .

Άσκηση 6. Στον Ευκλείδειο χώρο $M_2(\mathbb{R})$ εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A \cdot {}^t B)$$

θεωρούμε τον ενδομορφισμό

$$f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R}), \quad f \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$$

Να εξετάσετε αν ο f είναι: (α) ισομετρία, και (β) αυτοπροσαρτημένος.

Η προηγούμενη Άσκηση είναι ειδική περίπτωση της ακόλουθης Άσκησης.

Άσκηση 7. Έστω ο Ευκλείδειος χώρος $M_n(\mathbb{R})$ ο οποίος είναι εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A \cdot {}^t B)$$

θεωρούμε τον ενδομορφισμό

$$f: M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}), \quad f(A) = {}^t A$$

Τότε ο ενδομορφισμός f είναι αυτοπροσαρτημένος και ισομετρία.

Άσκηση 8. Έστω $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και

$$f, g: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

δύο ενδομορφισμοί του \mathcal{E} . Αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, να δειχθούν τα εξής:

(1)

$$0^* = 0 \quad \text{και} \quad \text{Id}_{\mathcal{E}}^* = \text{Id}_{\mathcal{E}}$$

(2)

$$(\lambda f + \mu g)^* = \lambda f^* + \mu g^*$$

(3)

$$(f^*)^* = f$$

Άσκηση 9. Έστω $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και

$$f, g: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

δύο ενδομορφισμοί του \mathcal{E} . Να δειχθούν τα εξής:

(1)

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$$

(2) Ο ενδομορφισμός f είναι ισομορφισμός αν και μόνον ο ενδομορφισμός f^* είναι ισομορφισμός, και τότε:

$$(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$$

Άσκηση 10. Έστω $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και $f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του \mathcal{E} . Να δειχθεί ότι δύο από τις ακόλουθες τρεις συνθήκες συνεπάγονται την τρίτη συνθήκη:

(1) Ο ενδομορφισμός f είναι ισομετρία.

(2) Ο ενδομορφισμός f είναι αυτοπροσαρτημένος.

(3) $f^2 = \text{Id}_{\mathcal{E}}$.

Ιδιαίτερα, για έναν πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$, δύο από τις ακόλουθες τρεις συνθήκες συνεπάγονται την τρίτη συνθήκη:

(1) Ο πίνακας A είναι ορθογώνιος.

(2) Ο πίνακας A είναι συμμετρικός.

(3) $A^2 = I_n$.

Άσκηση 11. Έστω $(\mathcal{E}, \langle, \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και έστω ο \mathbb{R} -διανυσματικός χώρος

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}) = \{f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \mid f: \text{ενδομορφισμός του } \mathcal{E}\}$$

των ενδομορφισμών του \mathcal{E} . Να δειχθεί ότι ορίζοντας¹

$$\langle\langle, \rangle\rangle: \mathcal{L}(\mathcal{E}) \times \mathcal{L}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle\langle f, g \rangle\rangle = \text{Tr}(f \circ g^*)$$

αποκτούμε ένα εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ και άρα το ζεύγος $(\mathcal{L}(\mathcal{E}), \langle\langle, \rangle\rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος. Επιπλέον να δειχθεί ότι οι Ευκλείδειοι χώροι $(\mathcal{L}(\mathcal{E}), \langle\langle, \rangle\rangle)$ και $(M_n(\mathbb{R}), \langle, \rangle)$, όπου $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A \cdot {}^t B)$, είναι ισομετρικά ισόμορφοι.

Άσκηση 12. Έστω $(\mathcal{E}, \langle, \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης. Έστω

$$\mathcal{U} = \{f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \mid f^* = f\} \quad \text{και} \quad \mathcal{V} = \{f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \mid f^* = -f\}$$

τα υποσύνολα του $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ τα οποία αποτελούνται από τους αυτοπροσαρτημένους και αντισυμμετρικούς ενδομορφισμούς αντίστοιχα.

(1) Να δειχθεί ότι τα υποσύνολα \mathcal{U} και \mathcal{V} είναι υπόχωροι του $\mathcal{L}(\mathcal{E})$.

(2) Να δειχθεί ότι

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \quad \text{και} \quad \mathcal{U} \perp \mathcal{V}$$

(3) Να δειχθεί ότι $\mathcal{U}^\perp = \mathcal{V}$ και $\mathcal{V}^\perp = \mathcal{U}$.

Άσκηση 13. Έστω $(\mathcal{E}, \langle, \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και έστω ο \mathbb{R} -διανυσματικός χώρος

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}) = \{f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \mid f: \text{ενδομορφισμός του } \mathcal{E}\}$$

των ενδομορφισμών του \mathcal{E} . Να δειχθεί ότι ο ενδομορφισμός

$$\Phi: \mathcal{L}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}), \quad \Phi(f) = f^*$$

είναι αυτοπροσαρτημένος και ισομετρία, όπου ο Ευκλείδειος χώρος $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο της Άσκησης 11.

Άσκηση 14. Έστω $(\mathcal{E}, \langle, \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης. Θεωρούμε τον \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο

$$\mathcal{E}^* = \{\phi: \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \phi: \text{γραμμική}\}$$

(1) Να δειχθεί ότι η απεικόνιση

$$\Phi: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^*, \quad \Phi(\vec{x}) = \langle \vec{x}, - \rangle, \quad \text{όπου} \quad \langle \vec{x}, - \rangle(\vec{y}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

είναι ισομορφισμός.

(2) Να ορισθεί επί του \mathcal{E}^* κατάλληλο εσωτερικό γινόμενο έτσι ώστε ο ισομορφισμός Φ να είναι ισομετρία.

Άσκηση 15. Έστω $(\mathcal{E}, \langle, \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας αντισυμμετρικός ενδομορφισμός ενδομορφισμός του \mathcal{E} , δηλαδή: $f^* = -f$.

(1) Να δειχθεί ότι ο ενδομορφισμός

$$\text{Id}_{\mathcal{E}} + f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (\text{Id}_{\mathcal{E}} + f)(\vec{x}) = \vec{x} + f(\vec{x})$$

είναι ισομορφισμός.

¹Το ίχνος $\text{Tr}(h)$ ενός ενδομορφισμού $h: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ορίζεται να είναι το ίχνος $\text{Tr}(A)$ του πίνακα A του h σε μια βάση \mathcal{B} του \mathcal{E} . Επειδή, όπως γνωρίζουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα I, όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος, αν \mathcal{C} είναι μια άλλη βάση του \mathcal{E} και αν B είναι ο πίνακας του h στην \mathcal{C} , τότε $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$.

(2) Να δειχθεί ότι ο ενδομορφισμός

$$(\text{Id}_E - f) \circ (\text{Id}_E + f)^{-1} : E \longrightarrow E$$

είναι ισομετρία.

Άσκηση 16. Έστω A ένας αντισυμμετρικός $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών.

(1) Να δειχθεί ότι ο πίνακας $I_n + A$ είναι αντιστρέψιμος.

(2) Να δειχθεί ότι ο πίνακας $(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ είναι ορθογώνιος.

Άσκηση 17 (Μηδενοδύναμος + Συμμετρικός = Μηδενικός). (1) Έστω $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f : E \longrightarrow E$ ένας αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός. Να δειχθεί ότι αν $f^m = 0$, τότε $f = 0$.

(2) Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας και $A^m = O$, να δειχθεί ότι $A = O$.

Άσκηση 18. Έστω $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και

$$f : E \longrightarrow E$$

ένας ενδομορφισμός του E . Να δειχθούν τα εξής:

(1)

$$\text{Ker}(f^*) = \text{Im}(f)^\perp$$

(2)

$$\text{Ker}(f) = \text{Im}(f^*)^\perp$$

(3)

$$\text{Im}(f^*) = \text{Ker}(f)^\perp$$

(4)

$$\text{Im}(f) = \text{Ker}(f^*)^\perp$$

(5) Αν \mathcal{V} είναι ένας υπόχωρος του E , τότε:

$$f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V} \iff f^*(\mathcal{V}^\perp) \subseteq \mathcal{V}^\perp$$

Άσκηση 19. Έστω $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και

$$f : E \longrightarrow E$$

ένας ενδομορφισμός του E . Να δειχθούν τα εξής:

(1)

$$\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(f^*)$$

(2)

$$\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^* \circ f) \quad \text{και} \quad \text{Ker}(f^*) = \text{Ker}(f \circ f^*)$$

(3)

$$\mathbf{r}(f^* \circ f) = \mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(f^*) = \mathbf{r}(f \circ f^*)$$

Άσκηση 20. Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$. Να δειχθεί ότι:

$$\mathbf{r}(A \cdot {}^t A) = \mathbf{r}({}^t A \cdot A) = \mathbf{r}(A) = \mathbf{r}({}^t A)$$

Λύση. Θεωρούμε τον ενδομορφισμό

$$f_A: \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n, \quad f_A(X) = A \cdot X$$

Γνωρίζουμε τότε ότι $f_A^* = f_{tA}$, και

$$\mathbf{r}(f_A) = \mathbf{r}(A) \quad \text{και} \quad \mathbf{r}(f_A^*) = \mathbf{r}(f_{tA}) = \mathbf{r}(tA)$$

Άρα από την Άσκηση 19, έπεται ότι $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(tA)$. Έστω \mathcal{B} η κανονική βάση του \mathbb{R}_n . Τότε:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A^* \circ f_A) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A^*) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A) = tA \cdot A \quad \text{και} \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A \circ f_A^*) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A^*) = A \cdot tA$$

Επειδή $\mathbf{r}(f_A) = \mathbf{r}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A))$ και $\mathbf{r}(f_A^*) = \mathbf{r}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A^*))$, από τις παραπάνω σχέσεις, και την Άσκηση 19, θα έχουμε:

$$\mathbf{r}(A \cdot tA) = \mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(tA) = \mathbf{r}(tA \cdot A) \quad \blacksquare$$

Άσκηση 21. Έστω $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και $f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του \mathcal{E} . Ναδειχθεί ότι για κάθε $k, m \in \mathbb{N}$:

$$(f^* \circ f)^k = 0 \iff f = 0 \iff (f \circ f^*)^m = 0$$

Έστω $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης. Ένας ενδομορφισμός $f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ καλείται **κανονικός**, αν:

$$f \circ f^* = f^* \circ f$$

Για παράδειγμα κάθε αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός του \mathcal{E} είναι προφανώς κανονικός.

Άσκηση 22. Έστω $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και $f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας κανονικός ενδομορφισμός του \mathcal{E} .

(1) Ναδειχθεί ότι: $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$\|f^*(\vec{x})\| = \|f(\vec{x})\|$$

(2) Ναδειχθεί ότι αν $P(t) \in \mathbb{R}[t]$ είναι ένα πολυώνυμο, τότε ο πολυωνυμικός ενδομορφισμός $P(f)$ είναι κανονικός.

(3) Ναδειχθεί ότι:

$$\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{\vec{0}\}$$

(4) Αν ο f είναι μηδενόδυναμος, δηλαδή $f^m = 0$, για κάποιο $m \in \mathbb{N}$, τότε: $f = 0$.

Άσκηση 23. Έστω $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και

$$f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

ένας ενδομορφισμός του \mathcal{E} .

(1) Ναδειχθεί ότι οι ενδομορφισμοί

$$f \circ f^*, f^* \circ f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

είναι αυτοπροσαρτημένοι.

(2) Ναδειχθεί ότι οι ενδομορφισμοί $f \circ f^*$ και $f^* \circ f$ είναι μη-αρνητικοί.

(3) Ναδειχθεί ότι ο ενδομορφισμός $f \circ f^*$ είναι θετικός αν και μόνον αν ο ενδομορφισμός f είναι ισομορφισμός.

(4) Ναδειχθεί ότι ο ενδομορφισμός $f^* \circ f$ είναι θετικός αν και μόνον αν ο ενδομορφισμός f είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 24. Για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ υπάρχουν ορθογώνιοι πίνακες P και Q και διαγώνιοι πίνακες Δ και Γ , έτσι ώστε:

$${}^tP \cdot A \cdot {}^tA \cdot P = \Delta \quad \text{και} \quad {}^tQ \cdot {}^tA \cdot A \cdot Q = \Gamma$$

Επιπλέον οι πίνακες $A \cdot {}^tA$ και ${}^tA \cdot A$ είναι μη-αρνητικοί, και:

$$A \cdot {}^tA > 0 \iff |A| \neq 0 \iff {}^tA \cdot A > 0$$

Άσκηση 25. Έστω $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

ένας ενδομορφισμός του \mathcal{E} . Αν ο πίνακας του f σε μια ορθοκανονική βάση του \mathcal{E} είναι αντισυμμετρικός, να δειχθεί ότι ο πίνακας του f σε κάθε ορθοκανονική βάση του \mathcal{E} είναι αντισυμμετρικός.

Άσκηση 26. Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας αντισυμμετρικός πίνακας. Να δειχθεί ότι υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P και πίνακας B με την ιδιότητα ο πίνακας B^2 να είναι διαγώνιος, έτσι ώστε:

$${}^t P \cdot B \cdot P = A$$

Άσκηση 27. (1) Έστω $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και

$$f, g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

δύο αυτοπροσαρτημένοι ενδομορφισμοί του \mathcal{E} . Να δειχθεί ότι:

$$f \circ g : \text{αυτοπροσαρτημένος} \iff f \circ g = g \circ f$$

(2) Έστω A και B δύο συμμετρικοί $n \times n$ πίνακες πραγματικών αριθμών. Να δειχθεί ότι:

$$A \cdot B : \text{συμμετρικός} \iff A \cdot B = B \cdot A$$

Άσκηση 28. Έστω \mathcal{E} ένας \mathbb{R} -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, και $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του \mathcal{E} . Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) Ο ενδομορφισμός f είναι διαγωνοποιήσιμος.
- (2) Υπάρχει ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ επί του \mathcal{E} έτσι ώστε ο f είναι ένας αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Άσκηση 29. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) Ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος.
- (2) Υπάρχει ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ επί του \mathbb{R}_n έτσι ώστε, $\forall X \in \mathbb{R}_n$:

$$\langle\langle A \cdot X, Y \rangle\rangle = \langle\langle X, A \cdot Y \rangle\rangle$$

Άσκηση 30. Έστω $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και

$$f, g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

δύο ενδομορφισμοί του \mathcal{E} . Υποθέτουμε ότι ο f είναι αυτοπροσαρτημένος ισομορφισμός, ο g είναι αντισυμμετρικός, και ισχύει ότι:

$$f \circ g = g \circ f$$

- (1) Να δειχθεί ότι, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$:

$$\langle f(\vec{x}), g(\vec{y}) \rangle = -\langle g(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle$$

και επομένως, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$\langle f(\vec{x}), g(\vec{x}) \rangle = 0$$

- (2) Για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$\|(f + g)(\vec{x})\| = \|(f - g)(\vec{x})\|$$

- (3) Οι ενδομορφισμοί $f + g$ και $f - g$ είναι αντιστρέψιμοι.

(4) Ο ενδομορφισμός

$$(f + g) \circ (f - g)^{-1} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

είναι ισομετρία.

Η επόμενη Άσκηση αποτελεί γενίκευση της Άσκησης 16 (η τελευταία προκύπτει θέτοντας $A = I_n$ στην παρακάτω Άσκηση).

Άσκηση 31. Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ και υποθέτουμε ότι:

$${}^t A = A, \quad |A| \neq 0, \quad {}^t B = -B, \quad A \cdot B = B \cdot A$$

(1) Να δειχθεί ότι, $\forall X, Y \in \mathbb{R}_n$:

$$\langle A \cdot X, B \cdot Y \rangle = -\langle B \cdot X, A \cdot Y \rangle$$

και επομένως, $\forall X \in \mathbb{R}_n$:

$$\langle A \cdot X, B \cdot X \rangle = 0$$

(2) Οι πίνακες $A + B$ και $A - B$ είναι αντιστρέψιμοι.

(3) Για κάθε $X \in \mathbb{R}_n$:

$$\|(A + B) \cdot X\| = \|(A - B) \cdot X\|$$

(4) Ο πίνακας

$$(A + B) \cdot (A - B)^{-1}$$

είναι ορθογώνιος.

Άσκηση 32. Έστω $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και

$$f, g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

δύο αυτοπροσαρτημένοι ενδομορφισμοί του \mathcal{E} . Να δειχθεί ότι:

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{E} : \langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = \langle g(\vec{x}), \vec{x} \rangle \implies f = g$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ένας ενδομορφισμός του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, τότε ο f καλείται **ορθογώνια προβολή** αν υπάρχει ένας υπόχωρος \mathcal{V} του \mathcal{E} , έτσι ώστε $f(\vec{v}) = \vec{v}$, $\forall \vec{v} \in \mathcal{V}$ και $f(\vec{u}) = \vec{0}$, $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}^\perp$. Τότε ο f καλείται ορθογώνια προβολή στον \mathcal{V} παράλληλα με τον \mathcal{V}^\perp .

Άσκηση 33. Έστω $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

ένας ενδομορφισμός του \mathcal{E} . Αν ο f είναι μια προβολή, δηλαδή $f^2 = f$, να δειχθεί ότι ο f είναι αυτοπροσαρτημένος αν και μόνον αν ο f είναι ορθογώνια προβολή.

Άσκηση 34. Έστω $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης.

Έστω

$$\text{AE}^{>0}(\mathcal{E}) = \{f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \mid f : \text{θετικός αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός του } \mathcal{E}\}$$

$$\text{IP}(\mathcal{E}) = \{\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle : \text{εσωτερικό γινόμενο επί του } \mathcal{E}\}$$

Να δειχθεί ότι η απεικόνιση:

$$\Phi : \text{AE}^{>0}(\mathcal{E}) \longrightarrow \text{IP}(\mathcal{E}), \quad \Phi(f) = \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_f : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \rangle_f = \langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle$$

είναι «1-1» και «επί».

Άσκηση 35. Έστω $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης n και έστω \mathcal{B} μια ορθοκανονική βάση του \mathcal{E} . Θεωρούμε το σύνολο

$$S_n^{>0}(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^t A = A > 0\}$$

των θετικών συμμετρικών $n \times n$ πινάκων.

Να δειχθεί ότι η απεικόνιση

$G : \text{IP}(\mathcal{E}) \longrightarrow S_n^{>0}(\mathbb{R}), \quad G(\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle) = (\langle\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle\rangle) =$ ο πίνακας Gram των διανυσμάτων της βάσης \mathcal{B} είναι «1-1» και «επί».