ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

Ασκησεις - Φυλλαδιο 8

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII2020/LAII2020.html

Παρασκευή 29 Μαΐου 2020

Άσκηση 1. *Θεωρούμε τον πίνακα πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & b \end{pmatrix}$$

(1) *Να προσδιορισθούν οι αριθμοί a, b, έτσι ώστε ο πίνακας A να έχει ως ιδιοτιμή το 0 με πολλαπλότητα 2.*
(2) *Για τις τιμές των a, b που θα βρείτε, να υπολογίσετε ορθογώνιο πίνακα P έτσι ώστε ο πίνακας ${}^tP \cdot A \cdot P$ να είναι διαγώνιος.*
(3) *Να υπολογίσετε τον πίνακα A^m, $\forall m \geq 1$.*

Άσκηση 2. *Να προσδιορισθεί ο αριθμός a έτσι ώστε ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ a & 4 & -4 \\ -a & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

να είναι μη-αρνητικός. Ακολούθως να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες ο πίνακας A είναι μη-αρνητικός και έχει μια ιδιοτιμή με πολλαπλότητα ίση με 2, και για τις τιμές αυτές να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε ${}^tP \cdot A \cdot P$ να είναι διαγώνιος.

Άσκηση 3. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & 0 & -\frac{7}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{7}{2} & 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί πίνακας $B \in \mathsf{M}_3(\mathbb{R})$, έτσι ώστε:

$$B^3 = A$$

Άσκηση 4. *Έστω A ένας $n \times n$ συμμετρικός πίνακας πραγματικών αριθμών. Αν οι ιδιοτιμές του A είναι οι αριθμοί 1 και -1, να δειχθεί ότι:*

$$A^2 = I_n$$

Ισχύει το αντίστροφο; Πότε ο πίνακας A είναι θετικός;

Άσκηση 5. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) *Να δείξετε ότι ο πίνακας A είναι μη-αρνητικός.*
(2) *Να βρείτε μια τετραγωνική ρίζα του A.*

Άσκηση 6. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) *Να δείξετε ότι ο πίνακας A είναι θετικός.*
(2) *Να βρείτε συμμετρικό και αντιστρέψιμο πίνακα B έτσι ώστε: $A = B^2$.*

Άσκηση 7. *Έστω A ένας 4×4 συμμετρικός πίνακας πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι:*

(1) *Ο αριθμός 1 είναι ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα*

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2) *Ο αριθμός 2 είναι ιδιοτιμή του A, και $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\, \mathcal{V}(2) = 3$.*

Να βρεθεί ο πίνακας A.

Άσκηση 8. *Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή*

$$\mathsf{q} \,:\, \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathsf{q}(x,y,z) = \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}y^2 + 5z^2 - xy - 2xz + 2yz$$

στους κύριους άξονές της, οι οποίοι και να βρεθούν.

Άσκηση 9. *Να προσδιορισθεί το είδος των καμπύλων οι οποίες ορίζονται από τις εξισώσεις:*

$$(C_1): \quad xy = 1$$

$$(C_2): \quad 5x^2 - 4xy + 8y^2 = 1$$

Άσκηση 10. *Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή*

$$\mathsf{q}\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathsf{q}(x,y,z) = 13x^2 + 24y^2 + 29z^2 + 28xy + 8xz + 36yz$$

(1) *Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή q στους κύριους άξονές της, οι οποίοι και να βρεθούν.*
(2) *Να βρεθεί το είδος της δευτεροβάθμιας επιφάνειας*

$$\mathcal{S} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid q(x,y,z) = 1\big\}$$

(3) *Να δειχθεί ότι ο πίνακας A της τετραγωνική μορφής q είναι θετικός και να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του A.*

Άσκηση 11. *Να προσδιορισθεί το είδος της τετραγωνικής επιφάνειας η οποία ορίζεται από την εξίσωση:*

$$(\mathcal{S}): \quad 9x^2 - 4xy + 6y^2 + 3z^2 + 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y + 12z + 16 = 0$$

Άσκηση 12. *Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή*

$$\mathsf{q} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathsf{q}(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy$$

(1) *Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή* q *στους κύριους άξονές της, οι οποίοι και να βρεθούν.*
(2) *Να προσδιορισθεί το είδος της τετραγωνικής επιφάνειας η οποία ορίζεται από την εξίσωση:*

$$(\mathcal{S}) : \quad 3x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy = 8$$

(3) *Να δείξετε ότι ο πίνακας* A *της τετραγωνικής μορφής* q *είναι θετικός και στη συνέχεια να βρεθεί συμμετρικός και αντιστρέψιμος πίνακας* B *έτσι ώστε:* $B^2 = A$.

Άσκηση 13. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και έστω*

$$f, g \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

δύο αυτοπροσαρτημένοι ενδομορφισμοί του $\mathcal{E}$. *Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1)

$$f \circ g = g \circ f$$

(2) *Υπάρχει μια ορθοκανονική βάση* $\mathcal{B}$ *του* $\mathcal{E}$ *η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του* f *και του* g.

Άσκηση 14. *Έστω* A *και* B *δύο συμμετρικοί* $n \times n$ *πίνακες πραγματικών αριθμών. Να δειχθεί ότι:*

$$A \cdot B = B \cdot A \quad \Longleftrightarrow \quad \text{υπάρχει ορθογώνιος πίνακας } P \text{ έτσι ώστε: } \; {}^tP \cdot A \cdot P = \Delta \quad \text{και} \quad {}^tP \cdot B \cdot P = \Gamma$$

όπου οι πίνακες Δ *και* Γ *είναι διαγώνιοι.*

Άσκηση 15 (Πολική Ανάλυση Ενδομορφισμού)**.** *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και έστω*

$$f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$. *Να δειχθεί ότι υπάρχει μια ισομετρία* $h \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *του* $\mathcal{E}$ *και ένας μη-αρνητικός (αυτοπροσαρτημένος) ενδομορφισμός* $g \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *του* $\mathcal{E}$ *έτσι ώστε:*

$$f = h \circ g, \qquad \text{δηλαδή} \quad h^* \circ h = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} \quad \text{και} \quad g^* = g \geq 0$$

Επιπλέον ο f *είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν ο* g *είναι θετικός:* $\mathsf{Det}(f) \neq 0 \iff g > 0$.

Άσκηση 16. *Για κάθε πίνακα* $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$, *υπάρχει ορθογώνιος πίνακας* P *και μη-αρνητικός συμμετρικός πίνακας* U *έτσι ώστε:*

$$A = P \cdot U$$

Επιπλέον ο πίνακας A *είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ο πινακας* U *είναι συμμετρικός και θετικός.*

Άσκηση 17 (Νόμος Αδρανείας του Sylvester)**.** *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} = n$, *και*

$$\mathsf{q} \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$$

μια τετραγωνική μορφή επί του $\mathcal{E}$. *Να δειχθεί ότι υπάρχει βάση* $\mathcal{C} = \left\{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_n\right\}$ *του* $\mathcal{E}$ *έτσι ώστε*

$$\mathsf{q}(x_1\vec{\epsilon}_1 + x_2\vec{\epsilon}_2 + \cdots + x_n\vec{\epsilon}_n) = x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_r^2$$

και οι θετικοί ακέραιοι s *και* r, *άρα και το ζεύγος* (s, r), *εξαρτώνται μόνο από την τετραγωνική μορφή* q.

Το ζεύγος θετικών ακεραίων το ζεύγος (s, r) στην παράπανω Άσκηση καλείται ο **δείκτης** της τετραγωνικής μορφής q. Με άλλα λόγια, ο δείκτης (s, r) της τετραγωνικής μορφής q είναι το ζεύγος

$$(s, r) = \big(\text{πλήθος θετικών ιδιοτιμών της}\, \mathsf{q},\ \text{βαθμίδα της}\, \mathsf{q}\big)$$

Άσκηση 18. *Να βρεθεί ο δείκτης της τετραγωνικής μορφής*

$$\mathsf{q} \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathsf{q}(x, y, z) = xy + xz + yz$$