# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΤΜΗΜΑ **Β′** (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ **1**

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:
http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII2020/LAII2020.html

**Παρασκευή 28 Φεβρουαρίου 2020**

### Υπενθυμίσεις από τη Θεωρία Πολυωνύμων

Υπενθυμίζουμε, χάριν ευκολίας, κάποια βασικά στοιχεία από τη θεωρία πολυωνύμων τα οποία θα είναι χρήσιμα στη συνέχεια του μαθήματος.

Υπενθυμίζουμε ότι αν: $(\alpha)$ $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ ή $(\beta)$ $\mathbb{K}$ είναι ένα σώμα, π.χ. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \cdots, \mathbb{Z}_p$ ($p$ : πρώτος), τότε $\mathbb{K}$ συμβολίζει το σύνολο των πολυωνύμων με συντελεστές από το $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K}[t] = \big\{a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n \mid a_k \in \mathbb{K},\ 0 \leq k \leq n\big\}$$

Αν $a_k = 0$, $0 \leq k \leq n$, τότε το $P(t)$ καλείται το μηδενικό πολυώνυμο και συμβολίζεται με 0.

Έστω

$$P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n$$

και υποθέτουμε ότι $P(t) \neq 0$. Ο βαθμός του $P(t)$ ορίζεται να είναι ο μη-αρνητικός ακέραιος

$$\deg P(t) = \max\big\{k \in \mathbb{N}_0 \mid a_k \neq 0\big\}$$

Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζουμε βαθμό. Συνήθως, όταν γράφουμε ένα πολυώνυμο $P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n$, θα υπονοούμε ότι $a_n \neq 0$ και ο βαθμός του θα είναι $\deg P(t) = n$.

Αν

$$P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n \quad \text{και} \quad Q(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \cdots + b_mt^m$$

δύο πολυώνυμα, με βαθμούς αντίστοιχα $\deg P(t) = n$ και $\deg Q(t) = m$, τότε έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας $m \leq n$. Τα πολυώνυμα $P(t)$ και $Q(t)$ καλούνται ίσα, και τότε θα γράφουμε $P(t) = Q(t)$, αν $a_k = b_k$, $0 \leq k \leq m$ και $a_{m+1} = \cdots = a_n = 0$.

Ένα πολυώνυμο $P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n$, βαθμού $\deg P(t) = n$, μπορεί να γραφεί και ως

$$P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n + a_{n+1}t^{n+1} + \cdots + a_mt^m + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kt^k, \quad \text{όπου} \ \ a_k = 0,\ \forall k > n$$

Το άθροισμα των πολυωνύμων

$$P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_kt^k \quad \text{και} \quad Q(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \cdots + b_mt^m = \sum_{k=0}^{\infty} b_kt^k$$

ορίζεται να είναι το πολυώνυμο

$$P(t) + Q(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + \cdots + c_rt^r + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_kt^k, \quad \text{όπου} \quad c_k = a_k + b_k,\ \forall k \geq 0$$

Το γινόμενο των πολυωνύμων

$$P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \quad \text{και} \quad Q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_m t^m = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$$

ορίζεται να είναι το πολυώνυμο

$$P(t)\,Q(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_r t^r + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \ \text{ όπου } \ c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0, \ \forall k \geq 0$$

Για το βαθμό πολυωνύμων ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

(1) Αν $P(t) \neq \mathsf{O} \neq Q(t)$, τότε:

$$\deg\big(P(t) + Q(t)\big) \ \leq \ \max\big\{\deg P(t), \ \deg Q(t)\big\}$$

(2) Αν $P(t) \neq \mathsf{O} \neq Q(t)$, τότε $P(t)\,Q(t) \neq \mathsf{O}$ και ισχύει ότι:

$$\deg\big(P(t)\,Q(t)\big) \ = \ \deg P(t) + \deg Q(t)$$

Αν $P(t), Q(t) \in \mathbb{K}[t]$, τότε θα λέμε ότι το πολυώνυμο $P(t)$ διαιρεί το πολυώνυμο $Q(t)$, και θα γράφουμε $P(t) \mid Q(t)$, αν υπάρχει πολυώνυμο $A(t) \in \mathbb{K}[t]$ έτσι ώστε $Q(t) = A(t)\,P(t)$:

$$P(t) \mid Q(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, A(t) \in \mathbb{K}[t] : \quad Q(t) = A(t)\,P(t)$$

Για τη διαιρετότητα πολυωνύμων ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

(1) $P(t) \mid \mathsf{O}$ και $P(t) \mid P(t)$.
(2) Αν $P(t) \mid Q(t)$ και $Q(t) \mid R(t)$, τότε $P(t) \mid R(t)$.
(3) Αν $P(t) \mid A(t)$ και $P(t) \mid B(t)$, τότε $P(t) \mid A(t) + B(t)$.
(4) Αν $P(t) \mid A(t)$ και $Q(t) \mid B(t)$, τότε $P(t)\,Q(t) \mid A(t)\,B(t)$.
(5) Αν $P(t) \mid Q(t)$ και $Q(t) \neq \mathsf{O}$, τότε: $\deg P(t) \leq \deg Q(t)$.
(6) Αν $P(t) \neq \mathsf{O} \neq Q(t)$ και $P(t) \mid Q(t)$ και $Q(t) \mid P(t)$, τότε υπάρχει $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $P(t) = \lambda Q(t)$.

Ένα πολυώνυμο

$$P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$$

καλείται κανονικό αν: $a_n = 1$, δηλαδή ο συντελεστής της μεγαλύτερης δύναμης του $t$ είναι η μονάδα. Κάθε μη-μηδενικό πολυώνυμο $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$ ορίζει το αντίστοιχο κανονικό πολυώνυμο

$$P_*(t) = t^n + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right) t^{n-1} + \cdots + \left(\frac{a_1}{a_n}\right) t + \frac{a_0}{a_n}$$

και ισχύει ότι: $P(t) = a_n P_*(t)$.

(7) Δύο κανονικά πολυώνυμα $P(t)$ και $Q(t)$ είναι ίσα αν και μόνον αν $P(t) \mid Q(t)$ και $Q(t) \mid P(t)$.

• Ευκλειδεια Διαιρεση Πολυωνυμων: *Αν $A(t)$ και $B(t)$ είναι δύο πολυώνυμα και $B(t) \neq \mathsf{O}$, τότε υπάρχει μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων $Q(t)$ και $R(t)$ έτσι ώστε:*

$$A(t) = B(t)\,Q(t) + R(t), \qquad \text{όπου}: \qquad \text{είτε} \quad R(t) = \mathsf{O} \quad \text{είτε} \quad \deg R(t) < \deg B(t)$$

Το πολυώνυμο $Q(t)$ καλείται *πηλίκο* και το πολυώνυμο $R(t)$ καλείται *υπόλοιπο* της διαίρεσης του $A(t)$ με το $B(t)$.

Ένα στοιχείο $\rho \in \mathbb{K}$ καλείται ρίζα του πολυωνύμου $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$, αν:

$$P(\rho) = a_0 + a_1 \rho + a_2 \rho^2 + \cdots + a_n \rho^n = 0$$

Γενικότερα, ο αριθμός $\rho \in \mathbb{K}$ είναι **ρίζα πολλαπλότητας** $k \in \mathbb{N}$ του πολυωνύμου $(P(t)$, αν:

$$(t-\rho)^k \mid P(t) \quad \& \quad (t-\rho)^{k+1} \nmid P(t)$$

δηλαδή αν: $P(t) = (t-\rho)^k Q(t)$ και $Q(\rho) \neq 0$.

Για τις ρίζες πολυωνύμων ισχύουν οι εξής βασικές ιδιότητες:

(8) Το στοιχείο $\rho \in \mathbb{K}$ είναι ρίζα του $P(t) \in \mathbb{K}[t]$ αν και μόνον αν $(t-\rho) \mid P(t)$.

(9) Αν $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{K}$ και $\rho_1 \neq \rho_2$, τότε τα στοιχεία $\rho_1, \rho_2$ είναι ρίζες του $P(t) \in \mathbb{K}[t]$ αν και μόνον αν $(t-\rho_1)(t-\rho_2) \mid P(t)$.

(10) Ένα πολυώνυμο $P(t) \in \mathbb{K}[t]$ βαθμού $n$ έχει το πολύ $n$ το πλήθος ρίζες στο $\mathbb{K}$.

(11) Αν $z$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός ο οποίος είναι ρίζα ενός πολυωνύμου $P(t) \in \mathbb{R}[t]$, τότε και ο συζυγής του $\overline{z}$ είναι ρίζα του $P(t)$.

(12) Ένας πραγματικός αριθμός $\rho$ είναι ρίζα πολλαπλότητας $k$ του πολυωνύμου $P(t) \in \mathbb{R}[t]$ αν καιν μόνον αν

$$P(\rho) = P'(\rho) = P''(\rho) = \cdots = P^{(k-1)}(\rho) = 0 \quad \& \quad P^{(k)}(\rho) \neq 0$$

όπου $P^{(r)}(t)$ συμβολίζει την παράγωγο $k$-τάξης του πολυωνύμου $P(t)$.

• Θεμελιωδες Θεωρημα της Αλγεβρας: *Αν $P(t) \in \mathbb{C}[t]$ είναι ένα πολυώνυμο με βαθμό $n > 0$, τότε το $P(t)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\mathbb{C}$.*

*Επομένως κάθε πολυώνυμο $P(t) \in \mathbb{C}[t]$ βαθμού $n > 0$, γράφεται ως:*

$$P(t) = a(t-\rho_1)^{\kappa_1}(t-\rho_2)^{\kappa_2}\cdots(t-\rho_r)^{\kappa_r}$$

*όπου*: $0 \neq a \in \mathbb{C}$, $\kappa_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq r$, *και* $\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_r = \deg P(t)$.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα μη-σταθερό πολυώνυμο $f(t) \in \mathbb{K}[t]$ με συντελεστές από το $\mathbb{K}$, καλείται **ανάγωγο** στο $\mathbb{K}[t]$, ή υπεράνω του $\mathbb{K}$, αν δεν υπάρχουν μη-σταθερά πολυώνυμα $g(t), h(t) \in \mathbb{K}[t]$ μικρότερου βαθμού με $f(t) = g(t)h(t)$.

• Θεωρημα Μονοσημαντης Αναλυσης: *Κάθε μη-μηδενικό πολυώνυμο $P(t) \in \mathbb{K}[t]$ μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο ενός σταθερού μη-μηδενικού πολυωνύμου και πεπερασμένου πλήθους ανάγωγων πολυωνύμων.*

*Επομένως κάθε μη-μηδενικό πολυώνυμο $P(t) \in \mathbb{K}[t]$, γράφεται μοναδικά[1] ως:*

$$P(t) = aP_1(t)^{\kappa_1}P_2(t)^{\kappa_2}\cdots P_r(t)^{\kappa_r}$$

*όπου*: $0 \neq a \in \mathbb{K}$, $\kappa_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq r$, τα $P_i(t)$ είναι ανάγωγα πολυώνυμα στο $\mathbb{K}[t]$.

Κάθε πολυώνυμο $P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n \in \mathbb{K}[t]$ ορίζει μια συνάρτηση

$$P\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad P(r) = a_0 + a_1r + a_2r^2 + \cdots + a_nr^n$$

η οποία καλείται πολυωνυμική συνάρτηση την οποία ορίζει το $P(t)$. Υπάρχουν όμως διαφορετικά πολυώνυμα $P(t)$ και $Q(t)$ ορισμένα επί κατάλληλου σώματος, τα οποία ορίζουν την ίδια πολυωνυμική συνάρτηση. Υπενθυμίζουμε ότι δύο πολυωνυμικές συναρτήσεις $P, Q\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ οι οποίες ορίζονται από δύο πολυώνυμα $P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n \in \mathbb{K}[t]$ και $Q(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \cdots + b_nt^m \in \mathbb{K}[t]$, είναι ίσες αν και μόνον αν $P(r) = Q(r)$, $\forall r \in \mathbb{K}$. Όπως έχουε δει, τα πολυώνυμα $P(t)$ και $Q(t)$ είναι ίσα αν και μόνον αν $a_i = b_i$, $\forall i \geq 0$. Για παράδειγμα θεωρούμε το σώμα $\mathbb{Z}_2 = \big\{[0]_2, [1]_2\big\}$ και έστω $P(t) = t^2 - t \in \mathbb{Z}_2[t]$ και $Q(t) = \mathsf{O}(t)$ το μηδενικό πολυώνυμο. Προφανώς $P(t) \neq \mathsf{O}(t)$, αλλά οι πολυωνυμικές συναρτήσεις $P$ και $Q$ τις οποίες ορίζουν τα πολυώνυμα $P(t)$ και $(Q(t)$ είναι ίσες, διότι: $P([0]_2) = P([1]_2) = [0]_2 = \mathsf{O}([0]_2) = \mathsf{O}([1]_2)$, και άρα $P = \mathsf{O}$. Αυτό το πρόβλημα δεν υφίσταται όταν το σώμα $\mathbb{K}$ έχει άπειρο πλήθος στοιχείων, και επομένως σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να ταυτίζουμε πολυώνυμα με τις πολυωνυμικές συναρτήσεις τις οποίες αυτά ορίζουν:

(13) Αν το σώμα $\mathbb{K}$ έχει άπειρο πλήθος στοιχείων, για παράδειγμα αν $\mathbb{K} \in \big\{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\big\}$, τότε δύο πολυώνυμα $P(t)$ και $(Q(t)$ ορίζουν την ίδια πολυωνυμική συνάρτηση αν και μόνον αν είναι ίσα: $P(t) = (Q(t)$.

[1] αν εξαιρέσουμε τη σειρά αναγραφής και τον πολλαπλασιασμό των πολυωνύμων με μη-μηδενικά στοιχεία του $\mathbb{K}$ με γινόμενο 1.

**Άσκηση 1.** *Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης στο* $\mathbb{R}[t]$ *του πολυωνύμου* $A(t) = t^6 - 7t^5 + 16t^4 - 10t^3 - 14t^2 + 33t - 23$ *με το πολυώνυμο* $B(t) = t^3 - 7t^2 + 16t - 12$.

*Λύση.* Θα έχουμε τα ακόλουθα βήματα:

(1) Πολλαπλασιάζουμε το $B(t)$ με το $t^3$ και το αποτέλεσμα το αφαιρούμε από το $A(t)$. Θα προκύψει τότε το πολυώνυμο $A_1(t) = 2t^3 - 14t^2 + 33t - 23$.

(2) Πολλαπλασιάζουμε το $B(t)$ με το 2 και το αποτέλεσμα το αφαιρούμε από το $A_1(t)$. Θα προκύψει τότε το πολυώνυμο $A_2(t) = t + 1$.

(3) Επειδή $\deg A_2(t) = 1 < 3 = \deg B(t)$, έπεται ότι θα έχουμε: $Q(t) = t^3 + 2$ και $R(t) = t + 1$:

$$t^6 - 7t^5 + 16t^4 - 10t^3 - 14t^2 + 33t - 23 = (t^3 - 7t^2 + 16t - 12)(t^3 + 2) + (t + 1)$$

δηλαδή το πηλίκο της διαίρεσης είναι το πολυώνυμο $t^3 + 2$ και το υπόλοιπο το πολυώνυμο $t + 1$.

Σχηματικά:

$$\begin{array}{r|l}
t^6 - 7t^5 + 16t^4 - 10t^3 - 14t^2 + 33t - 23 & t^3 - 7t^2 + 16t - 12 \\ \cline{2-2}
-t^6 + 7t^5 - 16t^4 + 12t^3 \qquad\qquad\qquad\quad & \qquad t^3 + 2 \\ \cline{1-1}
2t^3 - 14t^2 + 33t - 23 & \\
-2t^3 + 14t^2 - 32t + 24 & \\ \cline{1-1}
t + 1 &
\end{array}$$

■

**Άσκηση 2.** *Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης στο* $\mathbb{R}[t]$ *του πολυωνύμου* $A(t) = 3t^5 + 4t^2 + 1$ *με το πολυώνυμο* $B(t) = t^2 + 2t + 3$.

*Λύση.* Θα έχουμε τα ακόλουθα βήματα:

(1) Πολλαπλασιάζουμε το $B(t)$ με το $3t^3$ και το αποτέλεσμα το αφαιρούμε από το $A(t)$. Θα προκύψει τότε το πολυώνυμο $A_1(t) = -6t^4 - 9t^3 + 4t^2 + 1$.

(2) Πολλαπλασιάζουμε το $B(t)$ με το $-6t^2$ και το αποτέλεσμα το αφαιρούμε από το $A_1(t)$. Θα προκύψει τότε το πολυώνυμο $A_2(t) = 3t^3 + 22t^2 + 1$.

(3) Πολλαπλασιάζουμε το $B(t)$ με το $3t$ και το αποτέλεσμα το αφαιρούμε από το $A_2(t)$. Θα προκύψει τότε το πολυώνυμο $A_3(t) = 16t^2 - 9t + 1$.

(4) Πολλαπλασιάζουμε το $B(t)$ με το 16 και το αποτέλεσμα το αφαιρούμε από το $A_3(t)$. Θα προκύψει τότε το πολυώνυμο $A_4(t) = -41t - 47$.

(5) Επειδή $\deg A_4(t) = 1 < 2 = \deg B(t)$, έπεται ότι θα έχουμε: $Q(t) = 3t^3 - 6t^2 + 3t + 16$ και $R(t) = -41t - 47$:

$$3t^5 + 4t^2 + 1 = (t^2 + 2t + 3)(3t^3 - 6t^2 + 3t + 16) + (-41t - 47)$$

δηλαδή το πηλίκο της διαίρεσης είναι το πολυώνυμο $3t^3 - 6t^2 + 3t + 16$ και το υπόλοιπο το πολυώνυμο $-41t - 47$.

Σχηματικά:

$$\begin{array}{r|l}
3t^5 \quad + \qquad\quad 4t^2 + 1 & \qquad t^2 + 2t + 3 \\ \cline{2-2}
-3t^5 - 6t^4 - 9t^3 \qquad\qquad & 3t^3 - 6t^2 + 3t + 16 \\ \cline{1-1}
-6t^4 - 9t^3 + 4t^2 + 1 & \\
6t^4 + 12t^3 + 18t^2 \quad\; & \\ \cline{1-1}
3t^3 + 22t^2 + 1 & \\
-3t^3 - 6t^2 - 9t \; & \\ \cline{1-1}
16t^2 - 9t + 1 & \\
-16t^2 - 32t - 48 & \\ \cline{1-1}
-41t - 47 &
\end{array}$$

■

**Άσκηση 3.** *Θεωρούμε ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές*

$$P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n, \qquad n > 0, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \ \ 0 \leq i \leq n \quad \textit{και} \quad a_n \neq 0$$

*Αν* $\frac{r}{s}$ *είναι μια ρητή ρίζα του* $P(t)$*, όπου* $r, s \in \mathbb{Z}$*,* $s \neq 0$ *και* $(r, s) = 1$*, τότε:*

$$r \mid a_0 \qquad \& \qquad s \mid a_n$$

*Ακολούθως να εξετασθεί αν το πολυώνυμο*

$$P(t) = t^3 + 8t^2 - t + 9$$

*είναι ανάγωγο στο* $\mathbb{Q}[t]$.

*Λύση.* Θα έχουμε:

$$P\left(\frac{r}{s}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_0 + a_1\left(\frac{r}{s}\right) + a_2\left(\frac{r}{s}\right)^2 + \cdots + a_n\left(\frac{r}{s}\right)^n = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad a_0 s^n + a_1 r s^{n-1} + a_2 r^2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} r^{n-1} s + a_n r^n = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} a_0 s^n + a_1 r s^{n-1} + a_2 r^2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} r^{n-1} s = -a_n r^n \\ a_1 r s^{n-1} + a_2 r^2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} r^{n-1} s + a_n r^n = -a_0 s^n \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} s\big(a_0 s^{n-1} + a_1 r s^{n-2} + a_2 r^2 s^{n-3} + \cdots + a_{n-1} r^{n-1}\big) = -a_n r^n \\ r\big(a_1 s^{n-2} + a_2 r s^{n-2} + a_3 r^2 s^{n-3} + \cdots + a_{n-1} r^{n-2} s\big) = -a_0 s^n \end{cases}$$

Οι παραπάνω ισότητες είναι ισότητες μεταξύ ακεραίων αριθμών. Επομένως χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Ευκλείδη[2] από την Θεωρία Αριθμών, έπεται ότι:

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} s \mid a_n r^n \\ r \mid a_0 s^n \end{cases} \quad \overset{(r,s)=1}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} s \mid a_n \\ r \mid a_0 \end{cases}$$

Θεωρούμε το πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές $P(t) = t^3 + 8t^2 - t + 9$. Αν το $P(t)$ δεν ήταν ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[t]$, τότε θα υπήρχαν πολυώνυμα $Q(t)$ και $R(t)$ με ρητούς συντελεστές έτσι ώστε: $P(t) = Q(t)R(t)$, και προφανώς ένα εκ των $Q(t)$ και $R(t)$, έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας το $Q(t)$, είναι πρωτοβάθμιο και κανονικό. Άρα $Q(t) = t - \rho$, όπου $\rho = \frac{r}{s}$, όπου $r, s \in \mathbb{Z}$, $s \neq 0$ και προφανώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $(r, s) = 1$. Από την παραπάνω ανάλυση, έπεται ότι $r \mid 9$ και $s \mid 1$, δηλαδή $s = \pm 1$ και $r = \pm 1, \pm 3, \pm 9$. Επομένως η ρητή ρίζα $\rho$ του $P(t)$ είναι αναγκαστικά ένας εκ των ακεραίων: $\pm 1, \pm 3, \pm 9$. Επειδή:

$$\begin{cases} P(1) = 17 \neq 0 \\ P(-1) = 17 \neq 0 \\ P(3) = 105 \neq 0 \\ P(-3) = 57 \neq 0 \\ P(9) = 1477 \neq 0 \\ P(-9) = 99 \neq 0 \end{cases}$$

καταλήγουμε στην αντίφαση ότι $P(\rho) \neq 0$. Άρα το πολυώνυμο $P(t)$ δεν έχει πρωτοβάθμιο παράγοντα και επομένως το $P(t)$ είναι ανάγωγο. ■

**Άσκηση 4.** *Να δειχθεί το ακόλουθο* <u>Κριτηριο Eisenstein</u>*: Θεωρούμε ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές*

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n, \qquad n > 0, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \ \ 0 \leq i \leq n \quad \textit{και} \quad a_n \neq 0$$

*και έστω* $p$ *ένας πρώτος αριθμός. Τότε:*

$$p \mid a_0, \ p \mid a_1, \ \cdots, \ p \mid a_{n-1} \quad \& \quad p \nmid a_n \quad \& \quad p^2 \nmid a_0 \quad \Longrightarrow \quad f(t): \ \textit{ανάγωγο}$$

[2] Αν $r, a, s$ είναι ακέραιοι αριθμοί και ισχύει ότι $(r, s) = 1$, τότε: $r \mid as \implies r \mid a$.

<u>Εφαρμογη</u>: *Δείξτε ότι τα πολυώνυμα* $g_1(t) = t^4 - 6t^3 + 24t^2 - 30t + 14$, $g_2(t) = t^7 + 48t - 24$, $g_3(t) = t^5 + 5t + 5$, *και* $g_4(t) = t^n - p$, *όπου* $p$ *είναι ένας πρώτος αριθμός και* $n > 1$, *είναι ανάγωγα υπεράνω του* $\mathbb{Q}$. *Είναι το πολυώνυμο* $t^4 + 4$ *και ανάγωγο υπεράνω του* $\mathbb{Q}$;

*Λύση.* Έστω ότι το πολυώνυμο $f(t)$ δεν είναι ανάγωγο. ’ρα $f(t) = g(t)h(t)$ όπου $g(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_s t^s \in \mathbb{Z}[t]$, $h(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_r t^r \in \mathbb{Z}[t]$ και $s \geq 1$, $r \geq 1$. Τότε

$$a_0 = b_0 c_0, \quad a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0, \cdots, \quad a_i = b_0 c_i + b_1 c_{i-1} + \cdots + b_i c_0$$

όπου $0 \leq i \leq n$. Αφού $p \mid a_0$ και $a_0 = b_0 c_0$ έπεται ότι $p \mid b_0$ ή $p \mid c_0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $p \mid b_0$. Τότε $p \nmid c_0$, διότι αν $p \mid c_0$, θα είχαμε ότι $p^2 \mid b_0 c_0 = a_0$ το οποίο είναι άτοπο. Αν $p \mid b_s$ τότε

$$p \mid b_s c_r \implies p \mid a_n$$

που είναι άτοπο. ’ρα $p \nmid b_s$. Επομένως υπάρχει ένα $i \leq s$ έτσι ώστε $p \mid b_0, b_1, \cdots b_{i-1}$ και $p \nmid b_i$. Όμως $a_i = b_0 c_i + b_1 c_{i-1} + \cdots + b_{i-1} c_1 + b_i c_0$ και

$$\begin{cases} p \mid a_i \\ \\ p \mid b_0 c_i + \cdots + b_{i-1} c_1 \end{cases} \implies \begin{cases} p \mid b_i c_0 \\ \\ p \nmid c_0 \end{cases} \implies p \mid b_i$$

που είναι άτοπο. Συνεπώς το πολυώνυμο $f(t)$ είναι ανάγωγο.

<u>Εφαρμογη</u>: Επιλέγοντας, $p = 2$ για το $g_1(t)$, $p = 3$ για το $g_2(t)$, $p = 5$ για το $g_3(t)$, και $p = p$, για το $g_4(t)$, από το Κριτήριο Eisenstein βλέπουμε ότι τα πολυώνυμα $g_i(t)$, $1 \leq i \leq 4$, είναι ανάγωγα υπεράνω του $\mathbb{Q}$.

Αντίθετα το πολυώνυμο $t^4 + 4$, για το οποίο δεν μπορεί να εφαρμοσθεί το Κριτήριο Eisenstein, δεν είναι ανάγωγο διότι:

$$t^4 + 4 = \big(t^2 - 2t + 2\big) \cdot \big(t^2 + 2t + 2\big)$$

■

**Άσκηση 5.** *Θεωρούμε ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές*

$$P(t) = t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \cdots c_1 t + c_0,$$

*Αν* $\rho$ *είναι μια πραγματική ρίζα του* $P(t)$, *να δειχθεί ότι: είτε ο* $\rho$ *είναι ακέραιος ή ο* $\rho$ *είναι άρρητος.*

*Λύση.* Έστω $\rho = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ μια ρητή ρίζα του $P(t)$. Τότε $a, b \in \mathbb{Z}$, όπου $b \neq 0$, και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι οι $a, b$ δεν έχουν κανένα κοινό παράγοντα.

Τότε

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n + c_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \cdots + c_1 \frac{a}{b} + c_0 = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με $b^n$ θα έχουμε

$$a^n + c_{n-1} a^{n-1} b + \cdots + c_1 a b^{n-1} + c_0 b^n = 0 \implies a^n = b(-c_{n-1} a^{n-1} - \cdots - c_1 a b^{n-2} - c_0 b^{n-1})$$
$$\implies b \mid a^n$$

Υποθέτουμε ότι $b \neq \pm 1$. Τότε ο $b$ έχει ένα πρώτο διαιρέτη $q$ και άρα

$$\begin{cases} q \mid b \\ \\ b \mid a^n \end{cases} \implies q \mid a^n \implies q \mid a$$

Συνεπώς οι $a, b$ έχουν ένα κοινό πρώτο διαιρέτη που είναι άτοπο.

’ρα $b = \pm 1$ και έτσι έχουμε ότι η ρητή ρίζα $\rho$ του $P(t)$ είναι ακέραιος αριθμός, απ᾽ όπου προκύπτει το ζητούμενο. ■

**Άσκηση 6.** (1) *Να αναλυθεί το πολυώνυμο*

$$P(t) = t^3 - 2t^2 - 3t + 6$$

*σε γινόμενο ανάγωγων πολυωνύμων στο* $\mathbb{Q}[t]$.

(2) *Να αναλυθεί το πολυώνυμο*

$$P(t) = 2t^3 - (5+6i)t^2 + 9it + 1 - 3i$$

*σε γινόμενο ανάγωγων πολυωνύμων στο $\mathbb{C}[t]$, γνωρίζοντας ότι το $P(t)$ έχει μια πραγματική ρίζα.*

*Λύση.* (1) Επειδή το πολυώνυμο $P(t)$ είναι περιττού βαθμού, θα έχει μια πραγματική ρίζα $\rho$. Σύμφωνα με την Άσκηση 5, αν η ρίζα $\rho$ είναι ρητός αριθμός, θα είναι ακέραιος και τότε, σύμφωνα με την Άσκηση 3, ο ακέραιος $\rho$ θα πρέπει να διαιρεί τον σταθερό όρο του $P(t)$. Επομένως εξετάζουμε αν κάποιος από τους διαιρέτες του 6 είναι ρίζα του $P(t)$. Εύκολα βλέπουμε ότι πράγματι $P(2) = 0$ και επομένως το $\rho = 2$ είναι ρίζα του $P(t)$, Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να γράψουμε

$$P(t) = (t-2)(t^2+at+b) \implies t^3 - 2t^2 - 3t + 6 = t^3 + (a-2)t^2 + (b-2a)t - 2b \implies$$

$$\implies a-2 = -2 \;\;\&\;\; b-2a = -3 \;\;\&\;\; -2b = 6 \implies a = 0 \;\&\; b = -3$$

Άρα θα έχουμε:

$$P(t) = (t-2)(t^2-3)$$

Προφανώς το πολυώνυμο $t^2 - 3$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[t]$ (διαφορετικά θα είχε έναν πρωτοβάθμιο παράγοντα ο οποίος θα είχε ως ρίζα το $\sqrt{3}$ και αυτό είναι άτοπο διότι $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Έτσι η παραπάνω ανάλυση, είναι η ανάλυση του $P(t)$ σε ανάγωγους παράγοντες υπεράνω του $\mathbb{Q}$.

Επειδή $t^2 - 3 = (t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})$, έπεται ότι η ανάλυση του $P(t)$ σε ανάγωγους παράγοντες υπεράνω του $\mathbb{R}$ είναι

$$P(t) = (t-2)(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})$$

(2) Έστω $\rho$ η πραγματική ρίζα του $P(t)$. Τότε

$$P(\rho) = 0 \implies 2\rho^3 - (5+6i)\rho^2 + 9i\rho + 1 - 3i = 0 \implies \Big(2\rho^3 - 5\rho^2 + 1\Big) + i\Big(-6\rho^2 + 9\rho - 3\Big) = 0 \implies$$

$$\implies \begin{cases} 2\rho^3 - 5\rho^2 + 1 = 0 \\ -6\rho^2 + 9\rho - 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2\rho^3 - 5\rho^2 + 1 = 0 \\ 3\rho^2 - 3\rho + 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2\rho^3 - 5\rho^2 + 1 = 0 \\ \rho = 1 \text{ ή } \rho = \dfrac{1}{2} \end{cases} \implies \rho = \frac{1}{2}$$

Άρα η πραγματική ρίζα του $P(t)$ είναι η $\rho = \dfrac{1}{2}$ και επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$P(t) = (2t-1)\Big(t^2 + zt + w\Big) = 2t^3 + (2z-1)t^2 + (2w-z)t - w$$

όπου $z$ και $w$ είναι μιγαδικοί αριθμοί. Τότε θα έχουμε:

$$2t^3 - (5+6i)t^2 + 9it + 1 - 3i = P(t) = 2t^3 + (2z-1)t^2 + (2w-z)t - w$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

$$w = -1 + 3i \;\;\&\;\; z = -2 - 3i$$

Άρα

$$t^2 + zt + w = t^2 - (2+3i)t - 1 + 3i$$

Επειδή, όπως μπορούμε να δούμε εύκολα

$$t^2 - (2+3i)t - 1 + 3i = \Big(t - (1+2i)\Big)\Big(t - (1+i)\Big)$$

έπεται ότι η ανάλυση του $P(t)$ σε ανάγωγους παράγοντες υπεράνω του $\mathbb{C}$ είναι

$$P(t) = (2t-1)\Big(t - (1+2i)\Big)\Big(t - (1+i)\Big) = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)\Big(t - (1+2i)\Big)\Big(t - (1+i)\Big)$$

■

**Άσκηση 7.** *Να γραφούν τα ακόλουθα πολυώνυμα ως γινόμενα αναγώγων πολυωνύμων στα $\mathbb{Q}[t]$, $\mathbb{R}[t]$, και $\mathbb{C}[t]$:*

$$P(t) = t^3 - 2t^2 + 2t - 1, \quad Q(t) = 2t^4 - 5t^3 + 4t^2 - 5t + 2, \quad R(t) = -t^3 + 5t^2 - 8t + 4$$

*Λύση.* (1) Οι διαιρέτες του σταθερού όρου $-1$ του $P(t)$ είναι οι $\pm 1$. Επειδή $P(1) = 0$ και $P(-1) = -6 \neq -0$, έπεται ότι το 1 είναι μια ρητή ρίζα του $P(t)$. Άρα το $t-1$ διαιρεί το $P(t)$. Από την Ευκλείδεια διαίρεση του $P(t)$ με το $t-1$ εύκολα βλέπουμε ότι

$$P(t) = (t-1)(t^2 - t + 1)$$

Το πολυώνυμο $t^2 - t + 1$ δεν έχει πραγματικές ρίζες διότι είναι δευτεροβάθμιο με αρνητική ορίζουσα. Άρα το πολυώνυμο $t^2 - t + 1$ είναι ανάγωγο υπεράνω του $\mathbb{Q}$ και υπεράνω του $\mathbb{R}$, και η παραπάνω ανάλυση είναι η ανάλυση του $P(t)$ σε γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στα στα $\mathbb{Q}[t]$, $\mathbb{R}[t]$.

Στο $\mathbb{C}[t]$, όμως θα έχουμε

$$t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(t - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

Άρα η ανάλυση του $P(t)$ σε γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στα στο $\mathbb{C}[t]$ είναι η εξής:

$$P(t) = \Big(t-1\Big)\left(t - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(t - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

(2) Οι διαιρέτες του σταθερού όρου 2 του $Q(t)$ είναι οι $\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{2}$. Επειδή, όπως μπορούμε να δούμε εύκολα, $Q(2) = 0 = Q(\frac{1}{2})$ έπεται ότι τα 2 και $\frac{1}{2}$ είναι ρητές ρίζες του $Q(t)$. Άρα τα $t-2$ και $t-\frac{1}{2})$ διαιρούν το $Q(t)$, και επομένως το πολυώνυμο $(t-2)(t-\frac{1}{2}) = t^2 - \frac{5}{2} + 1$ διαιρεί το $Q(t)$. Από την Ευκλείδεια διαίρεση του $Q(t)$ με το $t^2 - \frac{5}{2} + 1$ εύκολα βλέπουμε ότι

$$Q(t) = \Big(t-2\Big)\left(t - \frac{1}{2}\right)\Big(2t^2+2\Big) = 2\Big(t-2\Big)\left(t - \frac{1}{2}\right)\Big(t^2+1\Big)$$

Το πολυώνυμο $t^2 + 1$ δεν έχει πραγματικές ρίζες διότι είναι δευτεροβάθμιο με αρνητική ορίζουσα. Άρα το πολυώνυμο $t^2+1$ είναι ανάγωγο υπεράνω του $\mathbb{Q}$ και υπεράνω του $\mathbb{R}$, και η παραπάνω ανάλυση είναι η ανάλυση του $Q(t)$ σε γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στα στα $\mathbb{Q}[t]$, $\mathbb{R}[t]$.

Στο $\mathbb{C}[t]$, όμως θα έχουμε

$$t^2 + 1 = (t-i)\,(t+i)$$

Άρα η ανάλυση του $Q(t)$ σε γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στο $\mathbb{C}[t]$ είναι η εξής:

$$Q(t) = 2\Big(t-2\Big)\left(t - \frac{1}{2}\right)(t-i)\,(t+i)$$

(3) Οι διαιρέτες του σταθερού όρου 4 του $Q(t)$ είναι οι $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Επειδή, όπως μπορούμε να δούμε εύκολα, $R(2) = 0$ έπεται ότι το 2 είναι ρητή ρίζα του $Q(t)$. Επειδή $R(t)' = -3t^2 + 10t - 8$ και $R(2)' = 0$, έπεται ότι το 2 έχει πολλαπλότητα τουλάχιστον 2 ως ρίζα του $R(t)$. Επειδή Επειδή $R(t)'' = -6t + 10$ και $R(2)'' = -2 \neq 0$, έπεται ότι το 2 είναι ρίζα του $R(t)$ πολλαπλότητας 2. Αυτό σημαίνει ότι $(t-2)^2 \mid R(t)$. Από την Ευκλείδεια διαίρεση του $R(t)$ με το $(t-2)^2$ εύκολα βλέπουμε ότι

$$R(t) = (t-2)^2(1-t) = -(t-1)(t-2)^2$$

η ανάλυση του $R(t)$ σε γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στα $\mathbb{Q}[t]$, $\mathbb{R}[t]$ και $\mathbb{C}[t]$. ∎

• • •

**Άσκηση 8.** *Θεωρούμε τους υπόχωρους του* $\mathbb{R}^3$*:*

$$\mathcal{V} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \ \ \textit{και} \ \ 3x + 2y + z = 0\big\}$$

$$\mathcal{W} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + 4y + 3z = 0\big\}$$

*Να εξετάσετε αν ισχύει ότι:* $\mathbb{R}^3 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$. *Αν αυτό δεν ισχύει να βρείτε υπόχωρους* $\mathcal{U}$ *και* $\mathcal{Z}$ *έτσι ώστε*

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}$$

*Λύση.* (1) Το διάνυσμα $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{V}$ αν και μόνον αν:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x+2y+z=0 \end{cases} \implies \begin{cases} z=-x-y \\ z=-3x-2y \end{cases} \implies \begin{cases} y=-2x \\ z=-x-y=-x+2x=x \end{cases} \implies \begin{cases} y=-2x \\ z=x \end{cases}$$

Επομένως

$$\mathcal{V}=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=-2x,\ z=x\big\}=\big\{(x,-2x,x)\in\mathbb{R}^3 \mid x\in\mathbb{R}\big\}=\big\langle(1,-2,1)\big\rangle$$

και άρα το μονοσύνολο $\mathcal{B}_1=\big\{(1,-2,1)\big\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}$. Ιδιαίτερα $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{V}=1$.

Παρόμοια θα έχουμε:

$$\mathcal{W}=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 5x+4y+3z=0\big\}=\left\{\left(x,y,-\frac{5}{3}x-\frac{4}{3}y\right)\in\mathbb{R}^3 \mid x,y\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$\left\{x\left(1,0,-\frac{5}{3}\right)+y(0,1,-\frac{4}{3}\right)\in\mathbb{R}^3 \mid x,y\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\left\langle\left(1,0,-\frac{5}{3}\right),\ (0,1,-\frac{4}{3}\right)\right\rangle$$

και άρα το σύνολο $\mathcal{B}_2=\big\{\big(1,0,-\frac{5}{3}\big),\ (0,1,-\frac{4}{3}\big)\big\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{W}$. Ιδιαίτερα $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{W}=2$.

Για να ισχύει $\mathbb{R}^3=\mathcal{V}\oplus\mathcal{W}$, θα πρέπει η ένωση

$$\mathcal{B}=\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2=\left\{(1,-2,1),\ \left(1,0,-\frac{5}{3}\right),\ (0,1,-\frac{4}{3}\right)\right\}$$

της βάσης $\mathcal{B}_1$ του $\mathcal{V}$ και της βάσης $\mathcal{B}_2$ του $\mathcal{W}$ να είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Αυτό δεν συμβαίνει διότι η ορίζουσα των συντελεστών των διανυσμάτων είναι ίση με μηδέν:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -5/3 \\ 0 & 1 & -4/3 \end{vmatrix}=0$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{R}^3\neq\mathcal{V}\oplus\mathcal{W}$.

(2) (α΄) Συμπληρώνουμε τη βάση $\mathcal{B}_1=\big\{(1,-2,1)\big\}$ του $\mathcal{V}$ σε μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Επειδή η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$$

έπεται ότι μια βάση του $\mathbb{R}^3$ η οποία συμπληρώνει τη βάση $\mathcal{B}_1$ του $\mathcal{V}$ είναι η εξής

$$\mathcal{C}=\big\{(1,-2,1),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\big\}$$

Θέτοντας $\mathcal{U}=\big\langle(0,1,0),\ (0,0,1)\big\rangle=\big\{(0,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y,z\in\mathbb{R}\big\}$, από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$\mathbb{R}^3=\mathcal{V}\oplus\mathcal{U}$$

(β΄) Συμπληρώνουμε τη βάση $\mathcal{B}_2=\big\{\big(1,0,-\frac{5}{3}\big),\ (0,1,-\frac{4}{3}\big)\big\}$ του $\mathcal{W}$ σε μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Επειδή η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5/3 \\ 0 & 1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$$

έπεται ότι μια βάση του $\mathbb{R}^3$ η οποία συμπληρώνει τη βάση $\mathcal{B}_2$ του $\mathcal{W}$ είναι η εξής

$$\mathcal{D}=\left\{\left(1,0,-\frac{5}{3}\right),\ (0,1,-\frac{4}{3}\right),\ (0,0,1)\right\}$$

Θέτοντας $\mathcal{Z}=\big\langle(0,0,1)\big\rangle=\big\{(0,0,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z\in\mathbb{R}\big\}$, από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$\mathbb{R}^3=\mathcal{W}\oplus\mathcal{Z}$$

■

**Άσκηση 9.** *Θεωρούμε τους ακόλουθους υπόχωρους του* $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{V} = \big\langle (1,2,1,-1),\ (1,1,1,1) \big\rangle \qquad \textit{και} \qquad \mathcal{W} = \big\langle (-1,1,-1,1),\ (0,1,0,1) \big\rangle$$

(1) *Είναι το άθροισμα* $\mathcal{V}+\mathcal{W}$ *ευθύ;*
(2) *Πόσοι υπόχωροι* $\mathcal{Z}$ *του* $\mathbb{R}^4$ *υπάρχουν έτσι ώστε* $\mathcal{V}\oplus\mathcal{Z}=\mathbb{R}^4$; *Δικαιολογήστε την απάντηση σας.*

*Λύση.* Τα σύνολα διανυσμάτων $\{(1,2,1,-1),(1,1,1,1)\}$ και $\{(-1,1,-1,1),(0,1,0,1)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα αποτελούν βάσεις αντίστοιχα των υπόχωρων $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$. Συνεπώς έχουμε $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{V}=2$ και $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{W}=2$. Ο υπόχωρος $\mathcal{V}+\mathcal{W}=\big\langle (1,2,1,-1),\ (1,1,1,1),\ (-1,1,-1,1),\ (0,1,0,1)\big\rangle$, αλλά

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3+\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3-3\Gamma_4]{\Gamma_2\to\Gamma_2+\Gamma_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2\leftrightarrow\Gamma_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4\to\Gamma_4+\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3\to-\frac{1}{3}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

και άρα

$$\mathcal{V}+\mathcal{W}=\big\langle (1,2,1,-1),\ (0,1,0,1),\ (0,0,0,1)\big\rangle$$

Το σύνολο διανυσμάτων $\{(1,2,1,-1),(0,1,0,1),(0,0,0,1)\}$ αποτελεί βάση του $\mathcal{V}+\mathcal{W}$, αφού είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και συνεπώς $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V}+\mathcal{W})=3$. Τότε

$$3=\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V}+\mathcal{W})\neq \dim_{\mathbb{R}}\mathcal{V}+\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{W}=2+2=4$$

και επομένως το άθροισμα $\mathcal{V}+\mathcal{W}$ δεν είναι ευθύ.

Για το δεύτερο ερώτημα, ζητάμε υπόχωρους $\mathcal{Z}$ του $\mathbb{R}^4$ έτσι ώστε $\mathcal{V}\oplus\mathcal{Z}=\mathbb{R}^4$. Αφού $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{V}=2$ θέλουμε επιπλέον δυο διανύσματα γραμμικά ανεξάρτητα με τα $\{(1,2,1,-1),(1,1,1,1)\}$. Δηλαδή, θέλουμε να συμπληρώσουμε το παρακάτω πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4\end{pmatrix}$$

με τέτοιο τρόπο ώστε η ορίζουσα του να είναι διάφορη του μηδενός. Θεωρούμε τα διανύσματα $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(0,0,1,0)$ και $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(0,0,0,\lambda)$ με $\lambda\neq 0$, δηλαδή $\mathcal{Z}=\langle (0,0,1,0),(0,0,0,\lambda)\rangle$. Τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σύνολο

$$\{(1,2,1,-1),(1,1,1,1),(0,0,1,0),(0,0,0,\lambda)\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Επομένως, υπάρχουν άπειροι υπόχωροι $\mathcal{Z}$ του $\mathbb{R}^4$ έτσι ώστε $\mathcal{V}\oplus\mathcal{Z}=\mathbb{R}^4$. ∎

**Άσκηση 10.** *Θεωρούμε τους ακόλουθους υπόχωρους του* $\mathbb{C}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathbb{C}^3$ :

$$\mathcal{V}=\big\langle (1,1,0),\ (i,1+i,1),\ (1+i,1+i,0)\big\rangle \qquad \textit{και} \qquad \mathcal{W}=\big\langle (1,0,1),\ (i,-i,0),\ (0,i,i)\big\rangle$$

*Να βρείτε υπόχωρο* $\mathcal{U}$ *του* $\mathbb{C}^3$ *έτσι ώστε*

$$(\mathcal{V}\cap\mathcal{W})\oplus\mathcal{U}=\mathbb{C}^3$$

*Λύση.* Θα προσδιορίσουμε πρώτα τον υπόχωρο $\mathcal{V}\cap\mathcal{W}$.

Θεωρούμε τον πίνακα των συντελεστών των διανυσμάτων $(1,1,0)$, $(i,1+i,1)$, $(1+i,1+i,0)$ τα οποία παράγουν τον $\mathcal{V}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ i & i+1 & 1\\ i+1 & i+1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2\to\Gamma_2-i\Gamma_1]{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_1-\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3+\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Επομένως $\mathcal{V} = \big\langle (1,1,0),\ (0,1,1),\ (0,0,1) \big\rangle$ και επειδή τα διανύσματα $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(0,0,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διότι $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{C} = \big\{ (1,1,0),\ (0,1,1),\ (0,0,1) \big\}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{V}$ και άρα $\mathsf{dim}_{\mathbb{C}} \mathcal{V} = 3$.

Θεωρούμε τον πίνακα των συντελεστών των διανυσμάτων $(1,0,1)$, $(i,-i,0)$, $(0,i,i)$ τα οποία παράγουν τον $\mathcal{W}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ i & -i & 0 \\ 0 & i & i \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - i\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -i & -i \\ 0 & i & i \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \to i\Gamma_2]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως $\mathcal{W} = \big\langle (1,0,1), (0,1,1) \big\rangle$ και επειδή τα διανύσματα $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ είναι προφανώς γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{D} = \big\{ (1,0,1), (0,1,1) \big\}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{W}$ και άρα $\mathsf{dim}_{\mathbb{C}} \mathcal{W} = 2$.

Από τον τύπο της διαστάσης του αθροίσματος υπόχωρων θα έχουμε:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V} + \mathcal{W}) = \mathsf{dim}_{\mathbb{C}} \mathcal{V} + \mathsf{dim}_{\mathbb{C}} \mathcal{W} - \mathsf{dim}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = 5 - \mathsf{dim}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \leq 3$$

όπου η τελευταία ανισότητα προέκυψε διότι ο $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{C}^3$. Άρα:

$$2 \ \leq \ \mathsf{dim}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \ \leq \ 2$$

όπου η τελευταία ανισότητα προέκυψε διότι ο $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{W}$ και γνωρίζουμε ότι $\mathsf{dim}_{\mathbb{C}} \mathcal{W} = 2$. Επομένως:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \ = \ 2$$

Παρατηρούμε ότι $(0,1,1) \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. Επίσης $(1,1,0) - (0,1,1) + (0,0,1) = (1,0,1)$ και αυτό σημαίνει το διάνυσμα $(1,0,1)$ του $\mathcal{W}$ ανήκει και στον $\mathcal{V}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{C}$ του $\mathcal{V}$. Έτσι $(1,0,1) \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. Επειδή προφανώς τα διανύσματα $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, ανήκουν στον $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$, και επειδή $\mathsf{dim}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = 2$, έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{A} = \big\{ (0,1,1), (1,0,1) \big\}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$.

Επειδή $\mathsf{dim}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = 2$, αναζητούμε υπόχωρο $\mathcal{U}$ έτσι ώστε $(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \oplus \mathcal{U} = \mathbb{C}^3$. Επεκτείνουμε τη βάση $\mathcal{A}$ του $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ σε μια βάση του $\mathbb{C}^3$: θεωρούμε το διάνυσμα $(0,0,1)$ και τότε επειδή η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{B} = \big\{ (1,0,1), (0,1,1), (0,0,1) \big\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{C}^3$ η οποία συμπληρώνει τη βάση $\mathcal{A}$ του $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. Θέτοντας $\mathcal{U} = \big\langle (0,0,1) \big\rangle = \big\{ (0,0,z) \in \mathbb{C}^3 \mid z \in \mathbb{C} \big\}$, αποκτούμε έναν υπόχωρο του $\mathbb{C}^3$, και τότε, επειδή η ένωση $\mathcal{B} = \big\{ (0,1,1), (1,0,1) \big\} \cup \big\{ (0,0,1) \big\}$ των βάσεων των υπόχωρων $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ και $\mathcal{U}$ είναι μια βάση του $\mathbb{C}^3$, έπεται ότι:

$$\mathbb{C}^3 = (\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \oplus \mathcal{U} \qquad \blacksquare$$

**Άσκηση 11.** *Να εξετάσετε αν ισχύει ότι:* $\mathbb{R}_3[t] = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, *όπου* $\mathcal{V}$ *και* $\mathcal{W}$ *είναι οι ακόλουθοι υπόχωροι του* $\mathbb{R}_3[t]$*:*

$$\mathcal{V} = \big\langle 1, t + t^2,\ 2 + 3t + 3t^2 \big\rangle \qquad \textit{και} \qquad \mathcal{W} = \big\langle t,\ t^3 \big\rangle$$

*Λύση.* Καταρχήν παρατηρούμε ότι
$$2 + 3t + 3t^2 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (t + t^2)$$
και άρα
$$\mathcal{V} = \big\langle 1, t + t^2 \big\rangle$$
Τα διανύσματα $1, t + t^2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διότι:
$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot (t + t^2) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot t + \lambda_2 \cdot t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 \\ &\Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$
Συνεπώς $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 2$. Όμοια $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W} = 2$ αφού το σύνολο διανυσμάτων $\{t, t^3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Για να ισχύει ότι $\mathbb{R}_3[t] = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, θα πρέπει η ένωση $\big\{1,\, t + t^2,\, t,\, t^3\big\}$ της βάσης $\big\{1,\, t + t^2\big\}$ του $\mathcal{V}$ και της βάσης $\big\{t,\, t^3\big\}$ της βάσης του $\mathcal{W}$ να είναι βάση του $\mathbb{R}_3[t]$ ή ισοδύναμα το σύνολο διανυσμάτων
$$\{1, t + t^2, t, t^3\}$$
να είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Πράγματι, εύκολα διαπιστώνουμε[3] ότι το παραπάνω σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα: $\mathbb{R}_3[t] = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$. ■

**Άσκηση 12.** *Να δείξετε, με ένα αντιπαράδειγμα, ότι αν $\mathcal{V}_1, \cdots, \mathcal{V}_n$ είναι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$, $n \geq 3$, και ισχύουν οι σχέσεις:*
$$\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \{\vec{0}\}, \quad \forall i, j = 1, \cdots, n, \;\; 1 \leq i \neq j \leq n \qquad (*)$$
*τότε δεν ισχύει απαραίτητα ότι το άθροισμα $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_n$ είναι ευθύ.*

*Λύση.* Προφανώς αν $n = 2$, τότε οι σχέσεις (*) εκφυλίζονται στη σχέση $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_1 = \big\{\vec{0}\big\}$ και γνωρίζουμε τότε ότι αν $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_1 = \big\{\vec{0}\big\}$, τότε το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$ είναι ευθύ.

Θα χρησιμοποιήσουμε ότι: «*Το άθροισμα υπόχωρων $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n$ είναι ευθύ αν και μόνον αν: $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n = \vec{0}$, $\vec{x}_i \in \mathcal{V}_i$, $1 \leq i \leq n \implies \vec{x}_i = \vec{0}$, $1 \leq i \leq n$.*»

Υποθέτουμε επομένως ότι $n \geq 3$.

(1) Έστω $n = 3$ και θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$. Θεωρούμε τους υπόχωρους:
$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= \big\langle (1, -1, 0) \big\rangle = \big\{ (x, -x, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R} \big\} \\ \mathcal{V}_2 &= \big\langle (0, 1, -1) \big\rangle = \big\{ (0, x, -x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R} \big\} \\ \mathcal{V}_3 &= \big\langle (-1, 0, 1) \big\rangle = \big\{ (-x, 0, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R} \big\} \end{aligned}$$
Από τις παραπάνω περιγραφές των υπόχωρων, έπεται άμεσα ότι
$$\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3 = \mathcal{V}_2 \cap \mathcal{V}_3 = \big\{\vec{0}\big\}$$
Όμως το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3$ δεν είναι ευθύ διότι $(1, -1, 0) \in \mathcal{V}_1$, $(0, 1, -1) \in \mathcal{V}_2$, και $(-1, 0, 1) \in \mathcal{V}_3$ είναι μη μηδενικά διανύσματα και
$$(1, -1, 0) + (0, 1, -1) + (-1, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

(2) Έστω $n = 4$ και θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$. Θεωρούμε τους υπόχωρους:
$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= \big\langle (1, -1, 0, 0) \big\rangle = \big\{ (x, -x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R} \big\} \\ \mathcal{V}_2 &= \big\langle (0, 1, -1, 0) \big\rangle = \big\{ (0, x, -x, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R} \big\} \\ \mathcal{V}_3 &= \big\langle (0, 0, 1, -1) \big\rangle = \big\{ (0, 0, x, -x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R} \big\} \\ \mathcal{V}_4 &= \big\langle (-1, 0, 0, 1) \big\rangle = \big\{ (-x, 0, 0, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R} \big\} \end{aligned}$$

[3] Το ότι το σύνολο $\{1, t, t + t^2, t^3\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}_3[t]$ προκύπτει και από το γεγονός ότι οι βαθμοί των πολυωνύμων είναι 0, 1, 2, και 3 αντίστοιχα. Εδώ χρησιμοποιούμε το, γνωστό από τη Γραμμική Άλγεβρα Ι, αποτέλεσμα ότι αν $\mathcal{B} = \big\{P_0(t),\, P_1(t),\, \cdots,\, P_n(t)\big\}$ είναι ένα σύνολο πολυωνύμων έτσι ώστε $\deg P_i(t) = i$, $0 \leq i \leq n$, τότε το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathbb{K}_n[t]$.

Από τις παραπάνω περιγραφές των υπόχωρων, έπεται άμεσα ότι

$$\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3 = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_2 \cap \mathcal{V}_3 = \mathcal{V}_2 \cap \mathcal{V}_4 = \mathcal{V}_3 \cap \mathcal{V}_4 = \{\vec{0}\}$$

Όμως το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3 + \mathcal{V}_4$ δεν είναι ευθύ διότι $(1,-1,0,0) \in \mathcal{V}_1$, $(0,1,-1,0) \in \mathcal{V}_2$, $(0,0,1,-1) \in \mathcal{V}_3$ και $(-1,0,0,1) \in \mathcal{V}_4$ είναι μη μηδενικά διανύσματα και

$$(1,-1,0,0) + (0,1,-1,0) + (0,0,1,-1) + (-1,0,0,1) = (0,0,0,0)$$

(3) Γενικά για κάθε $n \geq 3$, θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε τους υπόχωρους:

$$\mathcal{V}_1 = \big\langle (1,-1,0,0,\cdots,0) \big\rangle = \big\{ (x,-x,0,0,\cdots,0) \in \mathbb{R}^n \mid x \in \mathbb{R} \big\}$$

$$\mathcal{V}_2 = \big\langle (0,1,-1,0,\cdots,0) \big\rangle = \big\{ (0,x,-x,0,\cdots,0) \in \mathbb{R}^n \mid x \in \mathbb{R} \big\}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{V}_{n-1} = \big\langle (0,0,\cdots,1,-1) \big\rangle = \big\{ (0,0,\cdots,x,-x) \in \mathbb{R}^n \mid x \in \mathbb{R} \big\}$$

$$\mathcal{V}_n = \big\langle (-1,0,\cdots,0,1) \big\rangle = \big\{ (-x,0,\cdots,0,x) \in \mathbb{R}^n \mid x \in \mathbb{R} \big\}$$

Από τις παραπάνω περιγραφές των υπόχωρων, έπεται άμεσα ότι

$$1 \leq i \neq j \leq n \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \{\vec{0}\}$$

Όμως το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n$ δεν είναι ευθύ διότι $(1,-1,0,\cdots,0,0) \in \mathcal{V}_1$, $(0,1,-1,0,\cdots,0) \in \mathcal{V}_2$, $(0,0,\cdots,1,-1) \in \mathcal{V}_{n-1}$ και $(-1,0,\cdots,0,1) \in \mathcal{V}_n$ είναι μη μηδενικά διανύσματα και

$$(1,-1,0,\cdots,0,0) + (0,1,-1,0,\cdots,0) + \cdots + (0,0,\cdots,0,1,-1) + (-1,0,\cdots,0,1) = (0,0,\cdots,0,0) \quad \blacksquare$$

**Άσκηση 13.** *Έστω ότι $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \cdots, \mathcal{V}_n$ είναι υπόχωροι ενός $\mathbb{K}$- διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n$ είναι ευθύ.*
(2) $\mathcal{V}_i \cap \big(\mathcal{V}_{i+1} + \mathcal{V}_{i+2} + \cdots + \mathcal{V}_n\big) = \{\vec{0}\}$, $\forall i = 1,2,\cdots,n-1$, *δηλαδή:*

$$\mathcal{V}_1 \bigcap \big(\mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3 + \cdots + \mathcal{V}_n\big) = \{\vec{0}\}$$

$$\mathcal{V}_2 \bigcap \big(\mathcal{V}_3 + \mathcal{V}_4 + \cdots + \mathcal{V}_n\big) = \{\vec{0}\}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{V}_{n-2} \bigcap \big(\mathcal{V}_{n-1} + \mathcal{V}_n\big) = \{\vec{0}\}$$

$$\mathcal{V}_{n-1} \cap \mathcal{V}_n = \{\vec{0}\}$$

*Λύση.* (1) Υποθέτουμε ότι το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n$ είναι ευθύ. Γνωρίζουμε τότε ότι

$$\forall i = 1,2,\cdots,n: \quad \mathcal{V}_i \bigcap \big(\mathcal{V}_1 + \cdots + \mathcal{V}_{i-1} + \mathcal{V}_{i+1} + \cdots + \mathcal{V}_n\big) = \{\vec{0}\} \qquad (*)$$

Επειδή προφανώς

$$\mathcal{V}_{i+1} + \cdots + \mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{V}_1 + \cdots + \mathcal{V}_{i-1} + \mathcal{V}_{i+1} + \cdots + \mathcal{V}_n$$

από τη σχέση $(*)$ έπεται ότι

$$\forall i = 1,2,\cdots,n-1: \quad \mathcal{V}_i \bigcap \big(\mathcal{V}_{i+1} + \cdots + \mathcal{V}_n\big) \subseteq \mathcal{V}_i \bigcap \big(\mathcal{V}_1 + \cdots + \mathcal{V}_{i-1} + \mathcal{V}_{i+1} + \cdots + \mathcal{V}_n\big) = \{\vec{0}\}$$

(2) Υποθέτουμε ότι $\forall i = 1, 2, \cdots, n-1$: $\mathcal{V}_i \bigcap \big(\mathcal{V}_{i+1} + \cdots + \mathcal{V}_n\big) = \big\{\vec{0}\big\}$. Έστω $\vec{x}_i \in \mathcal{V}_i$, $1 \le i \le n$, και υποθέτουμε ότι

$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n = \vec{0}$$

Τότε

$$\mathcal{V}_1 \ni -\vec{x}_1 = \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n \in \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n \implies -\vec{x}_1 = \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n \in \mathcal{V}_1 \bigcap \big(\mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3 + \cdots + \mathcal{V}_n\big) = \big\{\vec{0}\big\}$$

Επομένως $\vec{x}_1 = \vec{0}$ και $\vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n = \vec{0}$. Τότε όπως και προηγουμένως

$$\mathcal{V}_2 \ni -\vec{x}_2 = \vec{x}_3 + \cdots + \vec{x}_n \in \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n \implies -\vec{x}_2 = \vec{x}_3 + \cdots + \vec{x}_n \in \mathcal{V}_2 \bigcap \big(\mathcal{V}_3 + \mathcal{V}_4 + \cdots + \mathcal{V}_n\big) = \big\{\vec{0}\big\}$$

Δηλαδή $\vec{x}_2 = \vec{0}$ και $\vec{x}_3 + \cdots + \vec{x}_n = \vec{0}$. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία, με μια απλή εφαρμογή της Αρχής Μαθηματικής Επαγωγής, έπεται ότι $\vec{x}_i = \vec{0}$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα υπόχωρων $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n$ είναι ευθύ. ■

**Άσκηση 14.** *Θεωρούμε τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}^4$ :*

$$\mathcal{W}_1 = \{(t, 2t, -t, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t \in \mathbb{R}\}, \qquad \mathcal{W}_2 = \{(t, s, t-3s, -s) \in \mathbb{R}^4 \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{W}_3 = \{(t, s, 0, r) \in \mathbb{R}^4 \mid t - 2s + r = 0\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι τα υποσύνολα $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$ και να βρεθεί η διάσταση τους.*
(2) *Να εξετασθεί αν το άθροισμα $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3$ είναι ευθύ.*
(3) *Να δειχθεί ότι $\mathbb{R}^4 = \mathcal{W}_1 \oplus (\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3)$.*

*Λύση.* Αφού

$$\mathcal{W}_1 = \langle (1, 2, -1, 1) \rangle, \quad \mathcal{W}_2 = \langle (1, 0, 1, 0), (0, 1, -3, -1) \rangle, \quad \mathcal{W}_3 = \langle (2, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, 1) \rangle$$

έπεται ότι τα $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$. Επίσης, τα σύνολα διανυσμάτων $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, -3, -1)\}$ και $\{(2, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα έχουμε: $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_1 = 1$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_2 = 2$ και $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_3 = 2$. Ο υπόχωρος $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3$ παράγεται από τα διανύσματα

$$\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3 = \langle (1, 2, -1, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, -3, -1), (2, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, 1) \rangle$$

Όμως τα παραπάνω διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα και $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3) = 4$. Συνεπώς

$$4 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3) \neq \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_1 + \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_2 + \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_3 = 1 + 2 + 2 = 5$$

και άρα το άθροισμα $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3$ δεν είναι ευθύ. Για το τελευταίο ερώτημα, ο υπόχωρος $\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3$ παράγεται από τα διανύσματα

$$\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3 = \langle (1, 0, 1, 0), (0, 1, -3, -1), (0, 0, 1, 1) \rangle$$

διότι

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 + \Gamma_1]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Τότε

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

και άρα το σύνολο διανυσμάτων $\{1, 2, -1, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, -3, -1), (0, 0, 1, 1)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Συνεπώς έχουμε: $\mathbb{R}^4 = \mathcal{W}_1 \oplus (\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3)$. ■

**Άσκηση 15.** *Έστω $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν $f^2 = f$, να δειχθεί ότι*

$$\mathcal{E} = \mathsf{Ker}\, f \oplus \mathsf{Im}\, f$$

*Επιπρόσθετα, αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n < \infty$, να δειχθεί ότι υπάρχει βάση $\mathcal{C}$ του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε ο πίνακας της $f$ στη βάση $\mathcal{C}$ να είναι ο εξής:*

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

*όπου το πλήθος των μονάδων στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με $r = \mathbf{r}(f)$.*

*Λύση.* Διαγραμματικά έχουμε:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathcal{E} \arrow[r, "f"] & \mathcal{E} \end{tikzcd} \qquad \text{και} \qquad f^2 = f \circ f = f$$

όπου: $f^2(\vec{x}) = f(f(\vec{x})) = f(\vec{x}), \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$.

Επειδή $f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}), \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$, τότε:

$$f(f(\vec{x})) = f(\vec{x}) \implies f(f(\vec{x}) - \vec{x}) = \vec{0} \implies f(\vec{x}) - \vec{x} \in \mathsf{Ker}\, f$$

Άρα το τυχαίο διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$ γράφεται ως: $\vec{x} = (\vec{x} - f(\vec{x})) + f(\vec{x}) \in \mathsf{Ker}\, f + \mathsf{Im}\, f$. Συνεπώς έχουμε:

$$\mathcal{E} = \mathsf{Ker}\, f + \mathsf{Im}\, f \tag{1}$$

Έστω $\vec{x} \in \mathsf{Ker}\, f \cap \mathsf{Im}\, f$, δηλαδή $\vec{x} \in \mathsf{Ker}\, f$ και $\vec{x} \in \mathsf{Im}\, f$. Άρα $f(\vec{x}) = \vec{0}$ και $f(\vec{y}) = \vec{x}$ για κάποιο $\vec{y} \in \mathcal{E}$. Τότε

$$f(\vec{x}) = f(f(\vec{y})) = f^2(\vec{y}) = f(\vec{y}) = \vec{x} \implies \vec{x} = \vec{0}$$

και άρα

$$\mathsf{Ker}\, f \cap \mathsf{Im}\, f = \{\vec{0}\} \tag{2}$$

Επομένως, από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι $\mathcal{E} = \mathsf{Ker}\, f \oplus \mathsf{Im}\, f$.

Έστω $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n < \infty$. Έστω $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k\}$ μια βάση του πυρήνα $\mathsf{Ker}(f)$ και $\{\vec{e}\,'_{k+1}, \vec{e}\,'_{k+2}, \cdots, \vec{e}\,'_n\}$ μια βάση της εικόνας $\mathsf{Im}(f)$. Προφανώς θα έχουμε ότι $\vec{e}\,'_i = f(\vec{e}_i)$, για κάποια διανύσματα $\vec{e}_i \in \mathcal{E}$, $k+1 \leq i \leq n$. Επειδή $\mathcal{E} = \mathsf{Ker}(f) \oplus \mathsf{Im}(f)$, έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k, f(\vec{e}_{k+1}), f(\vec{e}_{k+2}), \cdots, f(\vec{e}_n)\}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{E}$. Επειδή

$$f(\vec{e}_i) = \vec{0}, \quad 1 \leq i \leq k \qquad \text{και} \qquad f(f(\vec{e}_i)) = f^2(\vec{e}_i) = f(\vec{e}_i), \quad k+1 \leq i \leq n$$

έπεται ότι ο πίνακας της $f$ στη βάση $\mathcal{C}$ είναι ο

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

όπου το πλήθος των μονάδων στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με $n-k=\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\,\mathsf{Im}(f)=\mathbf{r}(f)$. ■

**Άσκηση 16.** *Έστω $f:\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν $f^2=\mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$, να δειχθεί ότι*

$$\mathcal{E}=\mathcal{V}_+\oplus\mathcal{V}_-$$

*όπου:*

$$\mathcal{V}_+=\big\{\vec{x}\in\mathcal{E}\mid f(\vec{x})=\vec{x}\big\}\qquad\text{και}\qquad\mathcal{V}_-=\big\{\vec{x}\in\mathcal{E}\mid f(\vec{x})=-\vec{x}\big\}$$

*Επιπρόσθετα, αν $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\,\mathcal{E}=n<\infty$, να δειχθεί ότι υπάρχει βάση $\mathcal{C}$ του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε ο πίνακας της $f$ στη βάση $\mathcal{C}$ είναι ο εξής:*

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&-1\end{pmatrix}$$

*όπου το πλήθος των εμφανίσεων της μονάδας $1$ στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\,\mathcal{V}_+$ και το πλήθος των εμφανίσεων του $-1$ στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\,\mathcal{V}_-$.*

*Λύση.* Διαγραμματικά έχουμε:

$$\begin{tikzcd}\mathcal{E}\arrow[r,"f"]\arrow[rr,bend right,"\mathsf{Id}_{\mathcal{E}}"']&\mathcal{E}\arrow[r,"f"]&\mathcal{E}\end{tikzcd}\qquad\text{και}\qquad f^2=f\circ f=\mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$$

όπου: $f^2(\vec{x})=f(f(\vec{x}))=\vec{x},\forall\vec{x}\in\mathcal{E}$.

Έστω $\vec{x}\in\mathcal{V}_+\cap\mathcal{V}_-$, δηλαδή $\vec{x}\in\mathcal{V}_+$ και $\vec{x}\in\mathcal{V}_-$. Τότε

$$\begin{cases}f(\vec{x})=\vec{x}\\f(\vec{x})=-\vec{x}\end{cases}\implies\vec{x}=-\vec{x}\implies 2\vec{x}=\vec{0}\implies\vec{x}=\vec{0}\implies\mathcal{V}_+\cap\mathcal{V}_-=\{\vec{0}\}\tag{3}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι κάποιο $\vec{x}\in\mathcal{E}$ γράφεται ως $\vec{x}=\vec{x}_1+\vec{x}_2$ με $\vec{x}_1\in\mathcal{V}_+$ και $\vec{x}_2\in\mathcal{V}_-$. Τότε $f(\vec{x})=f(\vec{x}_1)+f(\vec{x}_2)=\vec{x}_1-\vec{x}_2$ και άρα

$$\begin{cases}\vec{x}=\vec{x}_1+\vec{x}_2\\f(\vec{x})=\vec{x}_1-\vec{x}_2\end{cases}\implies\begin{cases}2\vec{x}_1=\vec{x}+f(\vec{x})\\2\vec{x}_2=\vec{x}-f(\vec{x})\end{cases}\implies\begin{cases}\vec{x}_1=\dfrac{\vec{x}+f(\vec{x})}{2}\\[2ex]\vec{x}_2=\dfrac{\vec{x}-f(\vec{x})}{2}\end{cases}$$

Έστω $\vec{x}\in\mathcal{E}$. Τότε

$$\vec{x}=\frac{\vec{x}+f(\vec{x})}{2}+\frac{\vec{x}-f(\vec{x})}{2}\in\mathcal{V}_++\mathcal{V}_-$$

διότι:

$$f\left(\frac{\vec{x}+f(\vec{x})}{2}\right)=\frac{1}{2}\big(f(\vec{x})+f^2(\vec{x})\big)=\frac{1}{2}\big(f(\vec{x})+\vec{x}\big)=\frac{\vec{x}+f(\vec{x})}{2}\ \in\ \mathcal{V}_+$$

και

$$f\left(\frac{\vec{x}-f(\vec{x})}{2}\right)=\frac{1}{2}\big(f(\vec{x})-f^2(\vec{x})\big)=\frac{1}{2}\big(f(\vec{x})-\vec{x}\big)=-\frac{\vec{x}-f(\vec{x})}{2}\ \in\ \mathcal{V}_-$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τη σχέση $f^2(\vec{x})=\vec{x},\forall\vec{x}\in\mathcal{E}$, δείξαμε ότι $\vec{x}\in\mathcal{V}_++\mathcal{V}_-$. Συνεπώς έχουμε

$$\mathcal{E}=\mathcal{V}_++\mathcal{V}_-\tag{4}$$

Άρα, από τις σχέσεις $(3)$ και $(4)$ έχουμε το ζητούμενο:

$$\mathcal{E}=\mathcal{V}_+\oplus\mathcal{V}_-$$

Έστω $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n < \infty$. Έστω $\mathcal{C}_+ = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k\}$ μια βάση του $\mathcal{V}_+$ και $\mathcal{C}_- = \{\vec{e}_{k+1}, \vec{e}_{k+2}, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια βάση του $\mathcal{V}_-$. Επειδή $\mathcal{E} = \mathcal{V}_+ \oplus \mathcal{V}_-$, έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_+ \bigcup \mathcal{C}_- = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \vec{e}_{k+2}, \cdots, \vec{e}_n\}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{E}$. Επειδή

$$f(\vec{e}_i) = \vec{e}_i, \ \ 1 \leq i \leq k \qquad \text{και} \qquad f(\vec{e}_i) = -\vec{e}_i, \ \ k+1 \leq i \leq n$$

έπεται ότι ο πίνακας της $f$ στη βάση $\mathcal{C}$ είναι ο

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

όπου το πλήθος των εμφανίσεων της μονάδας $1$ στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_+$ και το πλήθος των εμφανίσεων του $-1$ στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_-$. ■

**Άσκηση 17.** *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$.*

(1) *Αν $A^2 = A$, να δειχθεί ότι ο $A$ είναι όμοιος με τον πίνακα:*

$$B = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{(n-r)\times(n-r)} & \mathbb{O}_{r\times(n-r)} \\ \mathbb{O}_{(n-r)\times r} & I_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

*όπου $I_r$ είναι ο μοναδιαίος $r \times r$ πίνακας και $r = \mathbf{r}(A)$.*

(2) *Αν $A^2 = I_n$, να δειχθεί ότι ο $A$ είναι όμοιος με τον πίνακα*

$$B = \begin{pmatrix} I_{n-r} & \mathbb{O}_{r\times(n-r)} \\ \mathbb{O}_{(n-r)\times r} & -I_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

*όπου το πλήθος των εμφανίσεων της μονάδας $1$ στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με τη διάσταση του υπόχωρου $\{X \in \mathbb{K}_n \mid A \cdot X = X\}$ και το πλήθος των εμφανίσεων του $-1$ στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με τη διάσταση του υπόχωρου $\{X \in \mathbb{K}_n \mid A \cdot X = -X\}$.*

*Λύση.* (1) Θεωρούμε τον ενδομορφισμό

$$f_A \colon \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_n, \quad f_A(X) = AX$$

Γνωρίζουμε τότε ότι ο πίνακας $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A)$ του $f_A$ στην κανονική βάση

$$\mathcal{B} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \cdots, \ E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι ο

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A) = A$$

Προφανώς θα έχουμε

$$\forall X \in \mathbb{K}_n : \quad f_A^2(X) = f_A(f_A(X)) = f_A(AX) = A(AX) = (AA)X = A^2X = AX = f_A(X)$$

Επομένως

$$f_A^2 = f_A$$

και άρα από την Άσκηση 15, έπεται ότι υπάρχει βάση $\mathcal{C}$ του $\mathbb{K}_n$ έτσι ώστε:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f_A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = B$$

όπου το πλήθος των εμφανίσεων της μονάδας $1$ στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με τη βαθμίδα της γραμμικής απεικόνιση $f_A$, δηλαδή είναι ίσο με τη βαθμίδα του πίνακα $A$.

Επειδή οι πίνακες $A$ και $B$ είναι πίνακες της ίδιας γραμμικής απεικόνισης $f_A$ ως προς διαφορετικές βάσεις του $\mathbb{K}_n$, έπεται ότι οι πίνακες $A$ και $B$ είναι όμοιοι.

(2) Όπως στο μέρος (1), θεωρούμε τον ενδομορφισμό

$$f_A \colon \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_n, \quad f_A(X) = AX$$

Γνωρίζουμε τότε ότι ο πίνακας $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A)$ του $f_A$ στην κανονική βάση

$$\mathcal{B} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \cdots, \ E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι ο

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A) = A$$

Προφανώς θα έχουμε

$$\forall X \in \mathbb{K}_n : \quad f_A^2(X) = f_A(f_A(X)) = f_A(AX) = A(AX) = (AA)X = A^2X = I_nX = X = \mathsf{Id}_{\mathbb{K}_n}(X)$$

Επομένως

$$f_A^2 = \mathsf{Id}_{\mathbb{K}_n}$$

και άρα από την Άσκηση 16, έπεται ότι υπάρχει βάση $\mathcal{C}$ του $\mathbb{K}_n$ έτσι ώστε:

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} = B$$

όπου το πλήθος των εμφανίσεων της μονάδας $1$ στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με τη διάσταση του υπόχωρου $\big\{X \in \mathbb{K}_n \mid A \cdot X = X\big\}$ και το πλήθος των εμφανίσεων του $-1$ στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με τη διάσταση του υπόχωρου $\big\{X \in \mathbb{K}_n \mid A \cdot X = -X\big\}$.

Επειδή οι πίνακες $A$ και $B$ είναι πίνακες της ίδιας γραμμικής απεικόνισης ως προς διαφορετικές βάσεις του $\mathbb{K}_n$, έπεται ότι οι πίνακες $A$ και $B$ είναι όμοιοι. ■

**Άσκηση 18.** *Έστω ο $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ και η γραμμικές απεικονίσεις*

$$f\colon \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathsf{M}_n(\mathbb{K}), \quad f(A) = {}^tA$$

(1) *Να δειχθεί ότι*

$$\mathsf{M}_n(\mathbb{K}) = \mathsf{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathsf{A}_n(\mathbb{K})$$

*όπου*

(α') $\mathsf{S}_n(\mathbb{K}) = \big\{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \mid f(A) = A\big\}$ *είναι ο υπόχωρος των συμμετρικών πινάκων.*

(β') $\mathsf{A}_n(\mathbb{K}) = \big\{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \mid f(A) = -A\big\}$ *είναι ο υπόχωρος των αντισυμμετρικών πινάκων.*

(2) *Να δειχθεί ότι υπάρχει βάση $\mathcal{C}$ του $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ έτσι ώστε:*

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

*όπου η μονάδα $1$ εμφανίζεται $\frac{n^2+n}{2}$-φορές και το $-1$ εμφανίζεται $\frac{n^2-n}{2}$-φορές.*

*Λύση.* (1) Για κάθε πίνακα $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ έχουμε:

$$f^2(A) = f(f(A)) = f({}^tA) = {}^t({}^tA) = A \quad \Longrightarrow \quad f^2 = \mathsf{Id}_{\mathsf{M}_n(\mathbb{K})}$$

Από την Άσκηση 16 έπεται ότι ο χώρος $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ είναι το ευθύ άθροισμα των υπόχωρων $\big\{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \mid f(A) = A\big\} = \mathsf{S}_n(\mathbb{K})$ και $\big\{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \mid f(A) = -A\big\} = \mathsf{A}_n(\mathbb{K})$ των συμμετρικών και αντισυμμετρικών πινάκων αντίστοιχα. Άρα:

$$\mathsf{M}_n(\mathbb{K}) = \mathsf{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathsf{A}_n(\mathbb{K})$$

(2) Από την Άσκηση 16 έπεται ότι υπάρχει βάση $\mathcal{C}$ του $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ έτσι ώστε:

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

όπου η μονάδα 1 εμφανίζεται $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathsf{S}_n(\mathbb{K})$-φορές και το $-1$ εμφανίζεται $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathsf{A}_n(\mathbb{K})$-φορές. Από την Άσκηση **19** του Φυλλαδίου **6** των ασκήσεων Γραμμικής Άλγεβρας I, γνωρίζουμε ότι $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathsf{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n^2+n}{2}$ και $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathsf{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n^2-n}{2}$, απ' όπου προκύπτει το σητούμενο. ∎

Υπενθυμίζουμε ότι μια γραμμική απεικόνιση $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ καλείται **προβολή**[4], αν: $f^2 = f$.
Η γραμμική επεικόνιση $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ καλείται **ενέλιξη**, αν: $f^2 = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$.

**Άσκηση 19.** (1) *Αν η γραμμική απεικόνιση $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι μια προβολή, τότε η γραμμική απεικόνιση*

$$2f - \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (2f - \mathsf{Id}_{\mathcal{E}})(\vec{x}) = 2f(\vec{x}) - \vec{x}$$

*είναι μια ενέλιξη.*

(2) *Αν η γραμμική απεικόνιση $g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι μια ενέλιξη, τότε η γραμμική απεικόνιση*

$$\frac{g + \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}}{2}\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \left(\frac{g + \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}}{4}\right)(\vec{x}) = \frac{g(\vec{x}) + \vec{x}}{4}$$

*είναι μια προβολή.*

*Λύση.* (1) Εύκολα βλέπουμε ότι η απεικόνιση $2f - \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι γραμμική. Για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{E}$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\big(2f - \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}\big)^2(\vec{x}) &= \big((2f - \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}) \circ (2f - \mathsf{Id}_{\mathcal{E}})\big)(\vec{x}) = (2f - \mathsf{Id}_{\mathcal{E}})\big((2f - \mathsf{Id}_{\mathcal{E}})(\vec{x})\big) = (2f - \mathsf{Id}_{\mathcal{E}})(2f(\vec{x}) - \vec{x}) = \\ &= (2f)(2f(\vec{x}) - \vec{x}) - \mathsf{Id}_{\mathcal{E}})(2f(\vec{x}) - \vec{x}) = 4f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + \vec{x} = 4f^2(\vec{x}) - 4f(\vec{x}) + \vec{x} = \\ &= 4f(\vec{x}) - 4f(\vec{x}) + \vec{x} = \vec{x} = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}(\vec{x})\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $f^2 = f$ επειδή η $f$ είναι προβολή. Άρα $\big(2f - \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}\big)^2(\vec{x}) = \vec{x}$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$, και επομένως:

$$\big(2f - \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}\big)^2 = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$$

δηλαδή η γραμμική απεικόνιση $2f - \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$ είναι ενέλιξη.

(2) Εύκολα βλέπουμε ότι η απεικόνιση $\dfrac{g + \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}}{2}\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι γραμμική. Για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{E}$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\left(\frac{g + \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}}{2}\right)^2(\vec{x}) &= \left(\frac{g + \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}}{2} \circ \frac{g + \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}}{2}\right)(\vec{x}) = \frac{g + \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}}{2}\left(\frac{g + \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}}{2}(\vec{x})\right) = \frac{g + \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}}{2}\left(\frac{g(\vec{x}) + \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}(\vec{x})}{4}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(g\left(\frac{g(\vec{x}) + \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}(\vec{x})}{2}\right) + \frac{g(\vec{x}) + \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}(\vec{x})}{2}\right) = \frac{1}{4}\big(g^2(\vec{x}) + g(\vec{x}) + g(\vec{x}) + \vec{x}\big) = \frac{1}{4}\big(g(\vec{x}) + 2g(\vec{x}) + \vec{x}\big) = \\ &= \frac{1}{4}\big(\vec{x} + 2g(\vec{x}) + \vec{x}\big) = \frac{1}{4}\big(2g(\vec{x}) + 2\vec{x}\big) = \frac{1}{2}\big(g(\vec{x}) + \vec{x}\big) = \left(\frac{g + \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}}{2}\right)(\vec{x})\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $g^2 = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$ επειδή η $g$ είναι ενέλιξη. Άρα

$$\left(\frac{g + \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}}{2}\right)^2 = \frac{g + \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}}{2}$$

δηλαδή η γραμμική απεικόνιση $\left(\dfrac{g + \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}}{2}\right)^2$ είναι προβολή. ∎

**Άσκηση 20.** *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια προβολή. Τότε η γραμμική απεικόνιση $\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι προβολή και και ισχύει ότι:*

$$\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} = f + (\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f) \quad \textit{και} \quad f \circ (\mathsf{Id}_{\mathcal{F}} - f) = \mathsf{0} = (\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f) \circ f$$

*Επιπλέον:*

$$\mathsf{Ker}(f) = \mathsf{Im}(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f) \quad \textit{και} \quad \mathsf{Im}(f) = \mathsf{Ker}(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)$$

*και*

$$\mathcal{E} = \mathsf{Ker}\, f \oplus \mathsf{Im}\, f = \mathsf{Im}(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f) \oplus \mathsf{Ker}(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)$$

[4]Ακριβέστερα η $f$ καλείται **προβολή του χώρου** $\mathcal{E}$ **στον υπόχωρο** $\mathsf{Im}(f)$ **παράλληλα με τον υπόχωρο** $\mathsf{Ker}(f)$.

*Λύση.* (1) Για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έχουμε:

$$(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)^2(\vec{x}) = \big((\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f) \circ (\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)\big)(\vec{x}) = (\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)\big((\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)(\vec{x})\big) = (\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}}(\vec{x}) - f(\vec{x})) =$$
$$= (\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)(\vec{x} - f(\vec{x})) = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}(\vec{x}) - f(\vec{x})) - f(\vec{x} - f(\vec{x})) = \vec{x} - f(\vec{x}) - f(\vec{x}) + f(f(\vec{x})) =$$
$$= \vec{x} - f(\vec{x}) - f(\vec{x}) + f^2(\vec{x})) = \vec{x} - f(\vec{x}) - f(\vec{x}) + f(\vec{x})) = \vec{x} - f(\vec{x}) = (\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)(\vec{x})$$

Επομένως

$$(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)^2 = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f$$

δηλαδή η γραμμική απεικόνιση $\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f$ είναι προβολή.

Προφανώς $\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} = f + (\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)$. Για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έχουμε:

$$\big(f \circ (\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)\big)(\vec{x}) = f\big((\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)(\vec{x})\big) = f(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}}(\vec{x}) - f(\vec{x})) = f(\vec{x} - f(\vec{x})) = f(\vec{x}) - f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}) = \vec{0}$$

Επομένως $f \circ (\mathsf{Id}_{\mathcal{F}} - f) = 0$ και παρόμοια $(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f) \circ f = 0$.

(2) Έστω $\vec{x} \in \mathsf{Ker}(f)$. Τότε $f(\vec{x}) = \vec{0}$. Επειδή, από το μέρος (1), έχουμε $\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} = f + (\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)$, προκύπτει ότι

$$\vec{x} = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}(\vec{x}) = (f + (\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f))(\vec{x}) = f(\vec{x}) + (\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)(\vec{x}) = (\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)(\vec{x}) \in \mathsf{Im}(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)$$

Άρα $\mathsf{Ker}(f) \subseteq \mathsf{Im}(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)$. Έστω $\vec{x} \in \mathsf{Im}(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)$. Τότε υπάρχει $\vec{y} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $\vec{x} = (\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)(\vec{y}) = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}(\vec{y}) - f(\vec{y}) = \vec{y} - f(\vec{y})$. Επομένως θα έχουμε $f(\vec{x}) = f(\vec{y} - f(\vec{y})) = f(\vec{y}) - f^2(\vec{y}) = f(\vec{y}) - f(\vec{y}) = \vec{0}$, δηλαδή $\vec{x} \in \mathsf{Ker}(f)$. Άρα $\mathsf{Im}(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f) \subseteq \mathsf{Ker}(f)$ και επομένως:

$$\mathsf{Ker}(f) = \mathsf{Im}(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)$$

Παρόμοια, έστω $\vec{x} \in \mathsf{Im}(f)$. Τότε υπάρχει $\vec{y} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $\vec{x} = f(\vec{y})$. Τότε $(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)(\vec{x}) = \vec{x} - f(\vec{x}) = f(\vec{y}) - f(f(\vec{y})) = f(\vec{y}) - f^2(\vec{y}) = f(\vec{y}) - f(\vec{y}) = \vec{0}$ και επομένως $\vec{x} \in \mathsf{Ker}(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)$. Άρα $\mathsf{Im}(f) \subseteq \mathsf{Ker}(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)$. Έστω $\vec{x} \in \mathsf{Ker}(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)$. Τότε $(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)(\vec{x}) = \vec{x} - f(\vec{x}) = \vec{0}$, και τότε $\vec{x} = f(\vec{x}) \in \mathsf{Im}(f)$. Αυτό σημαίνει ότι $\mathsf{Ker}(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f) \subseteq \mathsf{Im}(f)$, και επομένως:

$$\mathsf{Im}(f) = \mathsf{Ker}(\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} - f)$$

(3) Οι ισχυρισμοί προκύπτουν από την Άσκηση 15. ■

**Άσκηση 21.** *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ και υποθέτουμε ότι*

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_n$$

*όπου $\mathcal{V}_i$, $1 \leq i \leq n$, είναι υπόχωροι του $\mathcal{E}$.*

(1) *Να δειχθεί ότι οι απεικονίσεις, $1 \leq j \leq n$:*

$$\pi_j \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{V}_j, \quad \pi_j(\vec{x}) = \vec{x}_j$$

*όπου $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n$ είναι η μοναδική γραφή του διανύσματος $\vec{x}$ του $\mathcal{E}$ ως άθροισμα διανυσμάτων $\vec{x}_i$ των υπόχωρων $\mathcal{V}_i$, $1 \leq i \leq n$, και*

$$\iota_j \colon \mathcal{V}_j \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \iota_j(\vec{x}_j) = \vec{x}_j$$

*είναι γραμμικές.*

(2) *Να δειχθεί ότι, $\forall \kappa, \mu = 1, 2, \cdots, n$:*

$$\pi_k \circ \iota_\mu = \begin{cases} 0, & \textit{αν } \kappa \neq \mu \\ \mathsf{Id}_{\mathcal{V}_k}, & \textit{αν } \kappa = \mu \end{cases}$$

(3) *Να δειχθεί ότι οι απεικονίσεις, $1 \leq j \leq n$:*

$$\iota_j \circ \pi_j \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

*είναι προβολές και ισχύει ότι:*

$$\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} = \iota_1 \circ \pi_1 + \iota_2 \circ \pi_2 + \cdots + \iota_n \circ \pi_n$$

*Λύση.* (1) Επειδή $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_n$, η γραφή ενός διανύσματος $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n$ του $\mathcal{E}$ ως άθροισμα διανυσμάτων $\vec{x}_i$ των υπόχωρων $\mathcal{V}_i$, $1 \leq i \leq n$, είναι μοναδική και επομένως η απεικόνιση $\pi_j$ είναι καλά ορισμένη, $1 \leq j \leq n$. Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ και $\lambda \in \mathbb{K}$. Έστω $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n$ και $\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \cdots + \vec{y}_n$ η μοναδική γραφή των διανυσμάτων $\vec{x}$ και $\vec{y}$ του $\mathcal{E}$ ως άθροισμα διανυσμάτων $\vec{x}_i$ $\vec{y}_i$ των υπόχωρων $\mathcal{V}_i$, $1 \leq i \leq n$. Τότε $\vec{x} + \vec{y} = (\vec{x}_1 \vec{y}_1) + (\vec{x}_2 \vec{y}_2) + \cdots + (\vec{x}_n + \vec{y}_n)$ και $\lambda\vec{x} = \lambda\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2 + \cdots + \lambda\vec{x}_n t$ είναι οι μοναδικές γραφές τωγν διανυσμάτων $\vec{x} + \vec{y}$ και $\lambda\vec{x}$ ως άθροισμα διανυσμάτων των υπόχωρων $\mathcal{V}_i$, $1 \leq i \leq n$. Τότε όμως θα έχουμε, $\forall j = 1, 2, \cdots, n$:

$$\pi_j(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x}_j + \vec{y}_j = \pi_j(\vec{x}) + \pi_j(\vec{y})$$

$$\pi_j(\lambda\vec{x}) = \lambda\vec{x}_i = \lambda\pi_j(\vec{x})$$

Επομένως η γραμμική απεικόνιση $\pi_j$, $1 \leq j \leq n$, είναι γραμμική.

Παρόμοια, έστω $\vec{x}_j, \vec{y}_j \in \mathcal{V}_j$ και $\lambda \in \mathbb{K}$. Τότε θα έχουμε:

$$\iota_j(\vec{x}_j + \vec{y}_j) = \vec{x}_j + \vec{y}_j = \iota_j(\vec{x}_j) + \iota_j(\vec{y}_j)$$

$$\iota_j(\lambda\vec{x}_j) = \lambda\vec{x}_j = \lambda\iota_j(\vec{x}_j)$$

Επομένως η γραμμική απεικόνιση $\iota_j$, $1 \leq j \leq n$, είναι γραμμική.

(2) Για κάθε $\kappa, \mu = 1, 2, \cdots, n$, θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση

$$\pi_k \circ \iota_\mu \colon \mathcal{V}_\mu \longrightarrow \mathcal{V}_k, \quad \vec{x}_\mu \longmapsto (\pi_k \circ \iota_\mu)(\vec{x}_\mu) = \pi_\kappa(\iota_\mu(\vec{x}_\mu)) = \pi_\kappa(\vec{x}_\mu)$$

Επειδή η μοναδική γραφή του διανύσματος $\vec{x}_\mu \in \mathcal{V}_\mu$ ως άθροισμα διανυσμάτων των υπόχωρων $\mathcal{V}_i$, $1 \leq i \leq n$ είναι $\vec{x}_\mu = \vec{0} + \vec{0} + \cdots + \vec{x}_\mu + \cdots + \vec{0}$, έπεται ότι $\pi_\kappa(\vec{x}_\mu) = \begin{cases} \vec{0}, & \text{αν } \kappa \neq \mu \\ \vec{x}_\mu, & \text{αν } \kappa = \mu \end{cases}$. Αυτό σημαίνει ότι $\pi_\kappa \circ \iota_\mu = 0$, αν $\kappa \neq \mu$ και $\pi_\kappa \circ \iota_\kappa = \mathsf{Id}_{\mathcal{V}_k}$.

(3) Για κάθε $j = 1, 2, \cdots, n$, χρησιμοποιώντας ότι $\pi_j \circ \iota_j = \mathsf{Id}_{\mathcal{V}_j}$, έχουμε:

$$(\iota_j \circ \pi_j) \circ \iota_j \circ \pi_j) = \iota_j \circ (\pi_j \circ \iota_j) \circ \pi_j = \iota_j \circ \mathsf{Id}_{\mathcal{V}_j} \circ \pi_j = \iota_j \circ \pi_j$$

και άρα οι γραμμικές απεικονίσεις $\iota_j \circ \pi_j \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι προβολές, $\forall j = 1, 2, \cdots, n$.

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$ με μοναδική γραφή $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n$ του $\mathcal{E}$ ως άθροισμα διανυσμάτων $\vec{x}_i$ των υπόχωρων $\mathcal{V}_i$, $1 \leq i \leq n$. Τότε θα έχουμε:

$$\big(\iota_1 \circ \pi_1 + \iota_2 \circ \pi_2 + \cdots + \iota_n \circ \pi_n\big)(\vec{x}) = (\iota_1 \circ \pi_1)(\vec{x}) + (\iota_2 \circ \pi_2)(\vec{x}) + \cdots + (\iota_n \circ \pi_n)(\vec{x}) =$$

$$= \iota_1(\pi_1(\vec{x})) + \iota_2(\pi_2(\vec{x})) + \cdots + \iota_n(\pi_n(\vec{x})) = \iota_1(\vec{x}_1) + \iota_2(\vec{x}_2) + \cdots + \iota_n(\vec{x}_n) =$$

$$= \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n = \vec{x} = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}(\vec{x})$$

Αυτό σημαίνει ότι: $\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} = \iota_1 \circ \pi_1 + \iota_2 \circ \pi_2 + \cdots + \iota_n \circ \pi_n$. ■

Η επόμενη Άσκηση παρουσιάζει ένα αντίστροφο του βασικού ισχυρισμού της προηγούμενης Άσκησης.

**Άσκηση 22.** *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος και έστω ότι, για κάθε $j = 1, 2, \cdots, n$, η γραμμική απεικόνιση*

$$\mathsf{p}_j \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

*είναι προβολή και ισχύει ότι:*

$$1 \leq i \neq j \leq n: \quad \mathsf{p}_i \circ \mathsf{p}_j = 0 \quad \text{και} \quad \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} = \mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_2 + \cdots + \mathsf{p}_n$$

*Τότε θέτοντας $\mathcal{V}_i = \mathsf{Im}(\mathsf{p}_i)$, $1 \leq i \leq n$, να δειχθεί ότι:*

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_n$$

*Λύση.* Επειδή οι απεικονίσεις $\mathsf{p}_i$, $1 \leq i \leq n$, είναι γραμμικές, τα υποσύνολα $\mathcal{V}_i = \mathsf{Im}(\mathsf{p}_i) = \big\{\mathsf{p}_i(\vec{x}) \in \mathcal{E} \mid \vec{x} \in \mathcal{E}\big\}$ είναι υπόχωροι του $\mathcal{E}$.

Επειδή $\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} = \mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_2 + \cdots + \mathsf{p}_n$, έπεται ότι για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$\vec{x} = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}(\vec{x}) = (\mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_2 + \cdots + \mathsf{p}_n)(\vec{x}) = \mathsf{p}_1(\vec{x}) + \mathsf{p}_2(\vec{x}) + \cdots + \mathsf{p}_n(\vec{x}) \,\in\, \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n$$

Επομένως

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n \qquad (\dagger)$$

Έστω $\vec{x}_i \in \mathcal{V}_i$, $1 \leq i \leq n$, και υποθέτουμε ότι $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n = \vec{0}$. Επειδή $\mathcal{V}_i = \mathsf{Im}(\mathsf{p}_i)$, έπεται ότι υπάρχουν διανύσματα $\vec{y}_i \in \mathcal{E}$, $1 \leq i \leq n$ έτσι ώστε: $\vec{x}_i = \mathsf{p}_i(\vec{y}_i)$, και αρα θα έχουμε:

$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{p}_1(\vec{y}_1) + \mathsf{p}_2(\vec{y}_2) + \cdots + \mathsf{p}_n(\vec{y}_n) = \vec{0}$$

Για κάθε $j = 1, 2, \cdots, n$, εφαρμόζουμε την προβολή και στα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας, και χρησιμοποιώντας ότι

$$\mathsf{p}_j \circ \mathsf{p}_i = \begin{cases} 0, & \text{αν } \ j \neq i \\ \mathsf{p}_i, & \text{αν } \ j = i \end{cases}$$

θα έχουμε, $\forall j = 1, 2, \cdots, n$:

$$\mathsf{p}_j\big(\mathsf{p}_1(\vec{y}_1) + \mathsf{p}_2(\vec{y}_2) + \cdots + \mathsf{p}_n(\vec{y}_n)\big) = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad (\mathsf{p}_j \circ \mathsf{p}_1)(\vec{y}_1) + (\mathsf{p}_j \circ \mathsf{p}_2)(\vec{y}_2) + \cdots + (\mathsf{p}_j \circ \mathsf{p}_n)(\vec{y}_n) = \vec{0} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 0(\vec{y}_1) + 0(\vec{y}_2) + \cdots + (\mathsf{p}_j \circ \mathsf{p}_j)(\vec{y}_j) + \cdots + 0(\vec{y}_n) = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{p}_j(\vec{y}_j) = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{x}_j = \vec{0}$$

Από γνωστή ιδιότητα, γνωρίζουμε τότε ότι το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n$ είναι ευθύ:

$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_n = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_n \qquad (\dagger\dagger)$$

Από τις σχέσεις $(\dagger)$ και $(\dagger\dagger)$, έπεται το ζητούμενο. ■

**Παρατήρηση 1.** *Ιδιαίτερα αν ο χώρος $\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ είναι το ευθύ άθροισμα των υπόχωρων $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$, τότε ορίζονται:*

(1) *η* **προβολή του $\mathcal{E}$ στον υπόχωρο $\mathcal{U}$ παράλληλα με τον υπόχωρο $\mathcal{V}$**

$$\pi_{\mathcal{U}} \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{U}, \quad \pi_{\mathcal{U}}(\vec{x}) = \vec{u}, \quad \textit{όπου } \ \vec{x} = \vec{u} + \vec{v}, \ \ \vec{u} \in \mathcal{U} \ \ \textit{και} \ \ \vec{v} \in \mathcal{V}$$

(2) *η* **προβολή του $\mathcal{E}$ στον υπόχωρο $\mathcal{V}$ παράλληλα με τον υπόχωρο $\mathcal{U}$**

$$\pi_{\mathcal{V}} \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{V}, \quad \pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = \vec{v}, \quad \textit{όπου } \ \vec{x} = \vec{u} + \vec{v}, \ \ \vec{u} \in \mathcal{U} \ \ \textit{και} \ \ \vec{v} \in \mathcal{V}$$

*Αυτό προκύπτει άμεσα διότι*

$$\mathsf{Ker}(\pi_{\mathcal{U}}) = \mathcal{V} = \mathsf{Im}(\pi_{\mathcal{V}}) \qquad \textit{και} \qquad \mathsf{Ker}(\pi_{\mathcal{V}}) = \mathcal{U} = \mathsf{Im}(\pi_{\mathcal{U}})$$

*Επιπλέον, ορίζονται και οι γραμμικές απεικονίσεις*

$$\iota_{\mathcal{U}} \colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \iota_{\mathcal{U}}(\vec{u}) = \vec{u}$$
$$\iota_{\mathcal{V}} \colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \iota_{\mathcal{V}}(\vec{v}) = \vec{v}$$

*και ισχύουν οι εξής σχέσεις:*

$$\mathsf{Id}_{\mathcal{E}} = \iota_{\mathcal{U}} \circ \pi_{\mathcal{U}} + \iota_{\mathcal{V}} \circ \pi_{\mathcal{V}}$$
$$\pi_{\mathcal{U}} \circ \iota_{\mathcal{U}} = \mathsf{Id}_{\mathcal{U}} \qquad \textit{και} \qquad \pi_{\mathcal{V}} \circ \iota_{\mathcal{V}} = \mathsf{Id}_{\mathcal{V}}$$
$$\pi_{\mathcal{U}} \circ \iota_{\mathcal{V}} = 0 \qquad \textit{και} \qquad \pi_{\mathcal{V}} \circ \iota_{\mathcal{U}} = 0$$

*Τέλος οι απεικονίσεις $\mathsf{p}_{\mathcal{U}} = \iota_{\mathcal{U}} \circ \pi_{\mathcal{U}} \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ και $\mathsf{p}_{\mathcal{V}} = \iota_{\mathcal{V}} \circ \pi_{\mathcal{V}} \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι προβολές.* ■

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, $\cdots$, $\mathcal{V}_m$ είναι διανυσματικοί χώροι υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, τότε το καρτεσιανό γινόμενο συνόλων

$$\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_m = \big\{(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m) \mid \vec{v}_i \in \mathcal{V}_i, \ 1 \leq i \leq m\big\}$$

εφοδιασμένο με τις ακόλουθες πράξεις

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m) + (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_m) = (\vec{v}_1 + \vec{u}_1, \vec{v}_2 + \vec{u}_2, \cdots, \vec{v}_m + \vec{u}_m)$$
$$\lambda(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m) = (\lambda\vec{v}_1, \lambda\vec{v}_2, \cdots, \lambda\vec{v}_m)$$

είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$.

**Άσκηση 23.** *Έστω ότι $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \cdots, \mathcal{V}_m$ είναι υπόχωροι ενός $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$. Θεωρούμε τον $\mathbb{K}$-διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_m$ και ορίζουμε μια απεικόνιση*

$$f\,:\,\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_m \longrightarrow \mathcal{E}, \quad f(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_m$$

(1) *Να δειχθεί ότι η $f$ είναι γραμμική.*
(2) *Ποιά είναι η εικόνα $\mathsf{Im}(f)$ της $f$;*
(3) *Να δειχθεί ότι η $f$ είναι μονομορφισμός αν και μόνον αν το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_m$ είναι ευθύ.*
(4) *Να δειχθεί ότι η $f$ είναι επιμορφισμός αν και μόνον αν $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_m$.*
(5) *Να δειχθεί ότι η $f$ είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_m$.*

*Λύση.* (1) Έστω $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m), (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_m) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_m$ και $\lambda \in \mathbb{K}$. Τότε:

$$\begin{aligned} f((\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m) + (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_m)) &= f(\vec{x}_1 + \vec{y}_1, \vec{x}_2 + \vec{y}_2, \cdots, \vec{x}_m + \vec{y}_m) \\ &= (\vec{x}_1 + \vec{y}_1) + (\vec{x}_2 + \vec{y}_2) + \cdots + (\vec{x}_m + \vec{y}_m) \\ &= (\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_m) + (\vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \cdots + \vec{y}_m) \\ &= f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m) + f(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_m) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} f(\lambda(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m)) &= f(\lambda\vec{x}_1, \lambda\vec{x}_2, \cdots, \lambda\vec{x}_m) \\ &= \lambda\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2 + \cdots + \lambda\vec{x}_m \\ &= \lambda(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_m) \\ &= \lambda f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m) \end{aligned}$$

Επομένως, η $f$ είναι γραμμική απεικόνιση.

(2) Η εικόνα $\mathsf{Im}(f)$ της $f$ είναι

$$\begin{aligned} \mathsf{Im}(f) &= \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \exists\,(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_m :\ f(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m) = \vec{x}\big\} \\ &= \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \exists\,(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_m :\ \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_m = \vec{x}\big\} \\ &= \{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_m \in \mathcal{E} \mid \vec{v}_i \in \mathcal{V}_i,\ 1 \leq i \leq m\} \\ &= \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_m \end{aligned}$$

(3) Έστω ότι η $f$ είναι μονομορφισμός. Θα δείξουμε ότι για το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_m$ ισχύει η μοναδικότητα της γραφής. Έστω $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_m = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \cdots + \vec{y}_m$ όπου $\vec{x}_1, \vec{y}_1 \in \mathcal{V}_1$, $\cdots$, $\vec{x}_m, \vec{y}_m \in \mathcal{V}_m$. Τότε:

$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_m = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \cdots + \vec{y}_m \implies f(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m) = f(\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_m) \xrightarrow{f:1\text{-}1}$$
$$(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m) = (\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_m) \implies \vec{x}_i = \vec{y}_i,\ \ 1 \leq i \leq m$$

Επομένως το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_m$ είναι ευθύ.

Αντίστροφα, έστω ότι το άθροισμα υπόχωρων $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_m$ είναι ευθύ, και έστω $f(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m) = f(\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_m)$, δηλαδή $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_m = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \cdots + \vec{y}_m$ όπου $\vec{x}_1, \vec{y}_1 \in \mathcal{V}_1, \cdots, \vec{x}_m, \vec{y}_m \in \mathcal{V}_m$. Τότε λόγω της μοναδικότητας της γραφής, έπεται άμεσα ότι $\vec{x}_i = \vec{y}_i$, $1 \leq i \leq m$, και άρα $(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m) = (\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_m)$. Επομένως η $f$ είναι μονομορφισμός.

(4) Επειδή από το μέρος (2) έχουμε $\mathsf{Im}(f) = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_m$, έπεται ότι η απεικόνιση $f$ είναι επιμορφισμός, δηλαδή $\mathsf{Im}(f) = \mathcal{E}$, αν και μόνον αν $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_m$.

(5) Έστω ότι η $f$ είναι ισομορφισμός. Τότε αφού η $f$ είναι μονομορφισμός έπεται από το (3) ότι το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_m$ είναι ευθύ. Επίσης, η $f$ είναι επιμορφισμός και άρα από το μέρος (4) έπεται ότι $\mathcal{E} = \mathsf{Im}(f) = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_m$. Συνεπώς θα έχουμε $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_m$.

Αντίστροφα, αν $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_m$ τότε επειδή το άθροισμα $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_m$ είναι ευθυ, από το μέρος (3) έπεται ότι η γραμμική απεικόνιση $f$ είναι μονομορφισμός. Επειδή $\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_m$ από το μέρος (4) έπεται ότι η γραμμική απεικόνιση $f$ είναι επιμορφισμός. Επομένως, η γραμμική απεικόνιση $f$ είναι ισομορφισμός. ∎

Η επόμενη Άσκηση παρουσιάζει ένα αντίστροφο του βασικού ισχυρισμού της προηγούμενης Άσκησης.

**Άσκηση 24.** *Έστω ότι $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \cdots, \mathcal{V}_m$ είναι διανυσματικοί χώροι υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ και έστω:*

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_m$$

*Για κάθε $i = 1, 2, \cdots, m$, θέτουμε:*

$$\mathcal{V}'_i = \Big\{ \underbrace{(\vec{0}, \cdots, \vec{0}, \vec{x}_i, \vec{0}, \cdots, \vec{0})}_{i\text{-θέση}} \in \mathcal{E} \mid \vec{x}_i \in \mathcal{V}_i \Big\}$$

*Να δειχθεί ότι τα υποσύνολα $\mathcal{V}'_i$, $1 \leq i \leq m$, είναι υπόχωροι του $\mathcal{E}$ και ισχύει ότι:*

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_m$$

*Λύση.* Προφανώς $\vec{0}_{\mathcal{E}} = (\vec{0}, \vec{0}, \cdots, \vec{0}) \in \mathcal{V}'_i$. Έστω $(\vec{0}, \cdots, \vec{0}, \vec{x}_i, \vec{0}, \cdots, \vec{0})$ και $(\vec{0}, \cdots, \vec{0}, \vec{y}_i, \vec{0}, \cdots, \vec{0})$ δύο στοιχεία του $\mathcal{V}'_i$ και $\lambda \in \mathbb{K}$. Τότε:

$$(\vec{0}, \cdots, \vec{0}, \vec{x}_i, \vec{0}, \cdots, \vec{0}) + (\vec{0}, \cdots, \vec{0}, \vec{y}_i, \vec{0}, \cdots, \vec{0}) = (\vec{0}, \cdots, \vec{0}, \vec{x}_i + \vec{y}_i, \vec{0}, \cdots, \vec{0}) \in \mathcal{V}'_i$$

$$\lambda(\vec{0}, \cdots, \vec{0}, \vec{x}_i, \vec{0}, \cdots, \vec{0}) = (\vec{0}, \cdots, \vec{0}, \lambda\vec{x}_i, \vec{0}, \cdots, \vec{0}) \in \mathcal{V}'_i$$

Άρα τα υποσύνολα $\mathcal{V}'_i$, $1 \leq i \leq m$, είναι υπόχωροι του $\mathcal{E}$.

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_m$. Τότε $\vec{x} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m)$, όπου $\vec{x}_i \in \mathcal{V}_i$, $1 \leq i \leq m$. Προφανώς θα έχουμε:

$$\vec{x} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m) = (\vec{x}_1, \vec{0}, \cdots, \vec{0}) + (\vec{0}, \vec{x}_2, \cdots, \vec{0}) + \cdots + (\vec{0}, \vec{0}, \cdots, \vec{x}_m)$$

Επειδή $(\vec{0}, \cdots, \vec{0}, \vec{x}_i, \vec{0}, \cdots, \vec{0}) \in \mathcal{V}'_i$, $1 \leq i \leq m$, από την παραπάνω σχέση έπεται άμεσα ότι $\vec{x} \in \mathcal{V}'_1 + \mathcal{V}'_2 + \cdots + \mathcal{V}'_m$ και επομένως:

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}'_1 + \mathcal{V}'_2 + \cdots + \mathcal{V}'_m \tag{†}$$

Έστω $\vec{x}'_1 + \vec{x}'_2 + \cdots + \vec{x}'_n = \vec{0}_{\mathcal{E}} = (\vec{0}, \vec{0}, \cdots, \vec{0})$, όπου $\vec{x}'_i \in \mathcal{V}'_i$, $1 \leq i \leq m$. Τότε θα έχουμε $\vec{x}'_i = (\vec{0}, \cdots, \vec{0}, \vec{x}_i, \vec{0}, \cdots, \vec{0})$, για κάποιο $\vec{x}_i \in \mathcal{V}_i$, και επομένως:

$$\vec{x}'_1 + \vec{x}'_2 + \cdots + \vec{x}'_n = (\vec{0}, \vec{0}, \cdots, \vec{0}) \implies (\vec{x}_1, \vec{0}, \cdots, \vec{0}) + (\vec{0}, \vec{x}_2, \cdots, \vec{0}) + \cdots + (\vec{0}, \vec{0}, \cdots, \vec{x}_m) = (\vec{0}, \vec{0}, \cdots, \vec{0})$$

$$\implies (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m) = (\vec{0}, \vec{0}, \cdots, \vec{0}) \implies \vec{x}_i = \vec{0},\ 1 \leq i \leq m, \implies \vec{x}'_i = \vec{0},\ 1 \leq i \leq m$$

Επομένως, σύμφωνα με γνωστή Πρόταση, θα έχουμε ότι το άθροισμα $\mathcal{V}'_1 + \mathcal{V}'_2 + \cdots + \mathcal{V}'_m$ είναι ευθύ:

$$\mathcal{V}'_1 + \mathcal{V}'_2 + \cdots + \mathcal{V}'_m = \mathcal{V}'_1 \oplus \mathcal{V}'_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}'_m \tag{††}$$

Από τις σχέσεις (†) και (††) έπεται το ζητούμενο: $\mathcal{E} = \mathcal{V}'_1 \oplus \mathcal{V}'_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}'_m$. ∎

**Άσκηση 25.** *Έστω $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ είναι $\mathbb{K}$-διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης. Υποθέτουμε ότι η $f$ είναι επιμορφισμός.*

(1) *Να δειχθεί ότι υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $g \colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε: $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$.*
(2) *Να δειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός:*

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \mathsf{Ker}(f) \oplus \mathsf{Im}(g)$$

*Λύση.* (1) Έστω $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k\}$ μια βάση του πυρήνα $\mathsf{Ker}(f)$ της $f$ την οποία συμπληρώνουμε σε μια βάση $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \vec{e}_{k+2}, \cdots, \vec{e}_n\}$ του $\mathcal{E}$. Γνωρίζουμε τότε ότι το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{C} = \{\vec{\epsilon}_{k+1} = f(\vec{e}_{k+1}), \vec{\epsilon}_{k+2} = f(\vec{e}_{k+2}), \cdots, \vec{\epsilon}_n = f(\vec{e}_n)\}$ είναι μια βάση τηε εικόνας $\mathsf{Im}(f)$ της $f$. Επειδή η γραμμική απεικόνιση $f$ είναι επιμορφισμός, έπεται ότι $\mathsf{Im}(f) = \mathcal{F}$ και επομένως το σύνολο $\mathcal{C}$ είναι μια βάση του $\mathcal{F}$. Από το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $g \colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε $g(\vec{\epsilon}_i) = \vec{e}_i$, $k+1 \leq i \leq n$. Δηλαδή αν $\vec{y} = \lambda_{k+1}\vec{\epsilon}_{k+1} + \lambda_{k+2}\vec{\epsilon}_{k+2} + \cdots + \lambda_n\vec{\epsilon}_n$

είναι ένα τυχόν διάνυσμα του $\mathcal{F}$, εκφρασμένο μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{C}$, τότε:

$$g(\vec{y}) = \lambda_{k+1}\vec{e}_{k+1} + \lambda_{k+2}\vec{e}_{k+2} + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n$$

Προφανώς τότε θα έχουμε, $\forall \vec{y} = \lambda_{k+1}\vec{\epsilon}_{k+1} + \lambda_{k+2}\vec{\epsilon}_{k+2} + \cdots + \lambda_n\vec{\epsilon}_n \in \mathcal{F}$:

$$(f \circ g)(\vec{y}) = f(g(\vec{y})) = f(\lambda_{k+1}\vec{e}_{k+1} + \lambda_{k+2}\vec{e}_{k+2} + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n) =$$

$$= \lambda_{k+1}f(\vec{e}_{k+1}) + \lambda_{k+2}f(\vec{e}_{k+2}) + \cdots + \lambda_n f(\vec{e}_n) = \lambda_{k+1}\vec{\epsilon}_{k+1} + \lambda_{k+2}\vec{\epsilon}_{k+2} + \cdots + \lambda_n\vec{\epsilon}_n = \vec{y}$$

Επομένως θα έχουμε τη ζητούμενη σχέση:

$$f \circ g = \mathsf{Id}_{\mathcal{F}}$$

(2) Έστω $\vec{y} \in \mathsf{Ker}(f) \cap \mathsf{Im}(g)$. Τότε $f(\vec{x}) = \vec{0}$ και υπάρχει $\vec{y} \in \mathcal{F}$ έτσι ώστε: $g(\vec{y}) = \vec{x}$. Εφαρμόζοντας την $f$ στην τελευταία σχέση και χρησιμοποιώντας ότι $f \circ g = \mathsf{Id}_{\mathcal{F}}$, θα έχουμε:

$$g(\vec{y}) = \vec{x} \implies f(g(\vec{y})) = f(\vec{x}) \implies \vec{y} = \vec{0} \implies \vec{x} = g(\vec{y}) = \vec{0}$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$\mathsf{Ker}(f) \cap \mathsf{Im}(g) = \{\vec{0}\} \implies \mathsf{Ker}(f) + \mathsf{Im}(g) = \mathsf{Ker}(f) \oplus \mathsf{Im}(g) \qquad (\dagger)$$

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Τότε

$$\vec{x} = \vec{x} - g(f(\vec{x})) + g(f(\vec{x}))$$

όπου προφανώς $g(f(\vec{x})) \in \mathsf{Im}(g)$ και $\vec{x} - g(f(\vec{x})) \in \mathsf{Ker}(f)$ διότι $f(\vec{x} - g(f(\vec{x}))) = f(\vec{x}) - f(g(f(\vec{x}))) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}) = \vec{0}$. Επομένως $\vec{x} \in \mathsf{Ker}(f) + \mathsf{Im}(g)$ και άρα:

$$\mathcal{E} = \mathsf{Ker}(f) + \mathsf{Im}(g) \qquad (\dagger\dagger)$$

Από τις σχέσεις $(\dagger)$ και $(\dagger\dagger)$ έπεται η ζητούμενη σχέση: $\mathcal{E} = \mathsf{Ker}(f) \oplus \mathsf{Im}(g)$. ■

**Άσκηση 26.** *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ είναι $\mathbb{K}$-διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης. Υποθέτουμε ότι η $f$ είναι μονομορφισμός.*

(1) *Να δειχθεί ότι υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $h\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε: $h \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.*

(2) *Να δειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός:*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\cong} \mathsf{Im}(f) \oplus \mathsf{Ker}(h)$$

*Λύση.* Επειδή η $f$ είναι μονομορφισμός, έπεται ότι η $f$ επάγει έναν ισομορφισμό

$$f'\colon \mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \mathsf{Im}(f), \quad f'(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

Ιδιαίτερα προκύπτει ότι $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{E} = \mathbf{r}(f) = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\,\mathsf{Im}(f)$.

(1) Έστω $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k\}$ μια βάση του $\mathcal{E}$. Τότε επειδή η απεικόνιση $f$ είναι μονομορφισμός, έπεται ότι το σύνολο $\{\vec{\epsilon}_1 = f(\vec{e}_1), \vec{\epsilon}_2 = f(\vec{e}_2), \cdots, \vec{\epsilon}_k = f(\vec{e}_k)\}$ είναι μια βάση της εικόνας $\mathsf{Im}(f)$ της $f$ την οποία συμπληρώνουμε σε μια βάση $\mathcal{B} = \{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_k, \vec{\epsilon}_{k+1}, \vec{\epsilon}_{k+2}, \cdots, \vec{\epsilon}_n\}$ του $\mathcal{F}$. Από το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $h\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε:

$$h(\vec{\epsilon}_i) = \vec{e}_i, \ \ 1 \le i \le k, \qquad \text{και} \qquad h(\vec{\epsilon}_i) = \vec{0}, \ \ k+1 \le i \le n$$

Δηλαδή αν $\vec{y} = \lambda_1\vec{\epsilon}_1 + \lambda_2\vec{\epsilon}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{\epsilon}_k + \lambda_{k+1}\vec{\epsilon}_{k+1} + \lambda_{k+2}\vec{\epsilon}_{k+2} + \cdots + \lambda_n\vec{\epsilon}_n$ είναι ένα τυχόν διάνυσμα του $\mathcal{F}$, εκφρασμένο μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B}$, τότε:

$$h(\vec{y}) = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{e}_k$$

Προφανώς τότε θα έχουμε, $\forall \vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{e}_k \in \mathcal{E}$:

$$(h \circ f)(\vec{x}) = h(f(\vec{x})) = h(\lambda_1 f(\vec{e}_1) + \lambda_2 f(\vec{e}_2) + \cdots + \lambda_k f(\vec{e}_k) = h(\lambda_1\vec{\epsilon}_1 + \lambda_2\vec{\epsilon}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{\epsilon}_k) =$$

$$= h(\lambda_1\vec{\epsilon}_1 + \lambda_2\vec{\epsilon}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{\epsilon}_k + 0\vec{\epsilon}_{k+1} + \cdots + 0\vec{\epsilon}_n) = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{e}_k = \vec{x}$$

Επομένως θα έχουμε τη ζητούμενη σχέση:

$$h \circ f = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$$

(2) Έστω $\vec{y} \in \mathsf{Im}(f) \cap \mathsf{Ker}(h)$. Τότε $h(\vec{y}) = \vec{0}$ και υπάρχει $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $f(\vec{x}) = \vec{y}$. Τότε:

$$h(f(\vec{x}) = h(\vec{y}) \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} = \vec{0}$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$\mathsf{Im}(f) \cap \mathsf{Ker}(h) = \{\vec{0}\} \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{Im}(f) + \mathsf{Ker}(h) = \mathsf{Im}(f) \oplus \mathsf{Ker}(h) \tag{$*$}$$

Έστω $\vec{y} \in \mathcal{F}$. Τότε

$$\vec{y} = \vec{y} - f(h(\vec{y})) + f(h(\vec{y}))$$

όπου προφανώς $f(h(\vec{y})) \in \mathsf{Im}(f)$ και $\vec{y} - f(h(\vec{y})) \in \mathsf{Ker}(h)$ διότι $h(\vec{y} - f(h(\vec{y}))) = h(\vec{y}) - h(f(h(\vec{y}))) = h(\vec{y}) - h(\vec{y}) = \vec{0}$. Επομένως $\vec{y} \in \mathsf{Im}(f) + \mathsf{Ker}(h)$ και άρα:

$$\mathcal{F} = \mathsf{Im}(f) + \mathsf{Ker}(h) \tag{$**$}$$

Από τις σχέσεις $(*)$ και $(**)$ έπεται η ζητούμενη σχέση: $\mathcal{F} = \mathsf{Im}(f) \oplus \mathsf{Ker}(h)$. ■

**Άσκηση 27.** *Έστω $A \in \mathsf{M}_2(\mathbb{K})$ ένας $2 \times 2$-πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$ και υποθέτουμε ότι υπάρχουν μη-μηδενικές στήλες $X, Y \in \mathbb{K}_2$ έτσι ώστε:*

$$AX = X \qquad \textit{και} \qquad AY = -Y$$

*Να βρεθεί ο πίνακας $A^{2018}$.*

*Λύση.* Ισχυριζόμαστε ότι το σύνολο στηλών $\mathcal{C} = \{X, Y\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{K}_2$. Πράγματι, αρκεί να δείξουμε ότι οι στήλες $X, Y$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Έστω

$$\lambda X + \mu Y = 0 \tag{$*$}$$

Τότε

$$A(\lambda X + \mu Y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda AX + \mu AY = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda X - \mu Y = 0 \tag{$**$}$$

Προσθέτοντας τις (*) και (**) προκύπτει ότι $2\lambda X = 0$ και επειδή $X \neq 0$, έπεται ότι $\lambda = 0$. Τότε από την (*) προκύπτει ότι $\mu Y = 0$ και επειδή $Y \neq 0$, έχουμε $\mu = 0$. Άρα πράγματι το σύνολο στηλών $\mathcal{C}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί μια βάση του χώρου των στηλών $\mathbb{K}_2$.

Θεωρούμε την επαγόμενη γραμμική απεικόνιση

$$f_A \colon \mathbb{K}_2 \longrightarrow \mathbb{K}_2, \quad f_A(Z) = AZ$$

της οποίας ο πίνακας στην κανονική βάση

$$\mathcal{B} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι ο

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_A) = A$$

Προφανώς ο πίνακας της $f_A$ στη βάση $\mathcal{C}$ είναι ο

$$\mathcal{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Επομένως οι πίνακες $A$ και $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ είναι όμοιοι διότι είναι πίνακες της ίδιας γραμμικής απεικόνισης $f_A$ σε διαφορετικές βάσεις του $\mathbb{K}_2$. Επομένως υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P$ έτσι ώστε:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Από την τελευταία σχέση, εύκολα βλέπουμε με επαγωγή ότι:

$$\forall n \geq 1 : \quad A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1} \tag{$\dagger$}$$

(1) Αν ο $n$ είναι άρτιος, τότε:

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$$

(2) Αν ο $n$ είναι περιττός, τότε ο $n-1$ είναι άρτιος και άρα από το (1) έπεται ότι $A^{n-1} = I_2$ από όπου προφανώς έχουμε $A^n = A$.

Συνοψίζουμε:

$$A^n = \begin{cases} I_2, & \text{αν } n: \text{ άρτιος} \\ A, & \text{αν } n: \text{ περιττός} \end{cases}$$

Ιδιαίτερα έπεται ότι:

$$A^{2018} = I_2 \qquad \blacksquare$$