

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΤΜΗΜΑ Β'

(Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII2020/LAII2020.html>

Παρασκευή 27 Μαρτίου 2020

Υπενθυμίζουμε τη μορφή του χαρακτηριστικού πολυώνυμου ενός 2×2 πίνακα $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$:

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{vmatrix} = t^2 - (a+b)t + (ad-bc) = t^2 - \text{Tr}(A)t + |A|$$

Άσκηση 1. Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$. Ναδειχθεί ότι η μόνη ιδιοτιμή του A είναι η $\lambda = 0$ αν και μόνον αν $A^n = 0$.

Λύση. Αν η μόνη ιδιοτιμή του πίνακα A είναι η $\lambda = 0$, έπεται ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι: $P_A(t) = (-1)^n t^n$. Τότε από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton προκύπτει ότι $P_A(A) = A^n = 0$.

Αντίστροφα, έστω ότι $A^n = 0$. Θεωρούμε το πολυώνυμο $Q(t) = t^n$ και τότε έχουμε $Q(A) = 0$. Γνωρίζουμε τότε ότι $Q_A(t) \mid Q(t)$ και επομένως $Q_A(t) = t^k$ για κάποιο $1 \leq k \leq n$. Η μόνη ρίζα του $Q_A(t)$ είναι η $\lambda = 0$. Επειδή το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο του A έχουν τις ίδιες ρίζες και οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυώνυμου είναι οι ιδιοτιμές του A , έπεται ότι η μόνη ιδιοτιμή του A είναι η $\lambda = 0$. ■

Άσκηση 2. Να δείξετε ότι ένας μηδενόδυναμος πίνακας $A \in M_n(\mathbb{K})$, δηλαδή υπάρχει $m \geq 1$ έτσι ώστε $A^m = 0$, είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνον αν $A = 0$.

Λύση. Έστω ότι $A^m = 0$ για κάποιο $m \geq 1$ και υποθέτουμε ότι ο μηδενόδυναμος πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος. Τότε γνωρίζουμε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων. Έστω το πολυώνυμο $Q(t) = t^m$. Τότε έχουμε ότι $Q(A) = A^m = 0$ και άρα

$$Q_A(t) \mid Q(t) \implies Q_A(t) = t^k, \quad 1 \leq k \leq m$$

Όμως επειδή το $Q_A(t)$ είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων έπεται ότι $Q_A(t) = t$. Επομένως από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε ότι $Q_A(A) = A = 0$. Το αντίστροφο προκύπτει άμεσα. ■

Άσκηση 3. Να εξετασθεί αν υπάρχει 2×2 πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} έτσι ώστε $A^3 = 0$ και $A^2 \neq 0$.

Λύση. Έστω ότι υπάρχει ένας πίνακας A ώστε $A^3 = 0$ και $A^2 \neq 0$. Θεωρούμε το πολυώνυμο $Q(t) = t^3$. Τότε $Q(A) = A^3 = 0$ και άρα $Q_A(t) \mid Q(t)$. Επομένως $Q_A(t) = t$ ή $Q_A(t) = t^2$ ή $Q_A(t) = t^3$. Αν $Q_A(t) = t^3$, τότε $\deg Q_A(t) = 3$ και καταλήγουμε σε άτοπο διότι $\deg Q_A(t) \leq \deg P_A(t) = 2$. Αν $Q_A(t) = t$, τότε $0 = Q_A(A) = A$ και τότε $A^2 = 0$ το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση. Παρόμοια αν $Q_A(t) = t^2$, τότε $0 = Q_A(A) = A^2 = 0$ το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση. Άρα όλες οι περιπτώσεις οδηγούν σε άτοπο και επομένως δεν υπάρχει 2×2 πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} έτσι ώστε $A^3 = 0$ και $A^2 \neq 0$. ■

Άσκηση 4. Αν $A \in M_n(\mathbb{K})$ και ισχύει ότι $A^k = O$, για κάποιον θετικό ακέραιο k , να δειχθεί ότι: $A^n = O$.

Λύση. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- (1) Αν $k \leq n$, τότε $n - k \geq 0$ και τότε θα έχουμε

$$A^n = A^{k+n-k} = A^k A^{n-k} = O \cdot A^{n-k} = O$$

- (2) Αν $k > n$, τότε θεωρούμε το πολυώνυμο $P(t) = t^k$. Προφανώς τότε έχουμε $P(A) = O$ και επομένως το πολυώνυμο $P(t)$ διαρείται από το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ του πίνακα A . Αυτό σημαίνει ότι $Q_A(t) = t^r$, για κάποιον θετικό ακέραιο $r \leq k$, και ιδιαίτερα $r = \deg Q_A(t)$. Επειδή $Q_A(t) \mid P_A(t)$ και $\deg P_A(t) = n$, έπεται ότι $r \leq n$. Τότε $O = Q_A(A) = A^r$ και όπως στην πρώτη περίπτωση $A^n = O$. ■

Άσκηση 5. Έστω $A \in M_2(\mathbb{K})$.

- (1) Αν $\text{Tr}(A^2) = 5$ και $\text{Tr}(A) = 3$, να βρεθεί η ορίζουσα $|A|$ του πίνακα A .
 (2) Αν $\mathbf{r}(A) = 1$ και $\text{Tr}(A) = 5$, να βρεθεί το ίχνος $\text{Tr}(A^2)$ του πίνακα A^2 .
 (3) Αν $B \in M_2(\mathbb{K})$ είναι ένας πίνακας όμοιος με τον A , τότε: $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$.
 (4) Αν ο A έχει θετικές ακέραιες ιδιοτιμές και ορίζουσα $|A| = 5$, να βρεθεί το ίχνος $\text{Tr}(A)$ του πίνακα A .

Λύση. (1) Έστω ότι $\text{Tr}(A^2) = 5$ και $\text{Tr}(A) = 3$. Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έπεται ότι

$$A^2 - 3A + |A|I_2 = O \implies A^2 - 3A = |A|I_2 \implies \text{Tr}(A^2 - 3A) = \text{Tr}(|A|I_2)$$

Επειδή η απεικόνιση $\text{Tr}: M_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ είναι γραμμική θα έχουμε:

$$\text{Tr}(A^2) - \text{Tr}(3A) = 2|A| \implies 5 - 3\text{Tr}(A) = 2|A| \implies 5 - 3 \cdot 3 = 2|A| \implies |A| = -2$$

- (2) Πρώτος Τρόπος: Έστω ότι $\mathbf{r}(A) = 1$ και $\text{Tr}(A) = 5$. Επειδή $\mathbf{r}(A) = 1$, έπεται ότι οι στήλες του A είναι γραμμικά εξαρτημένες, δηλαδή η μια από τις δύο στήλες είναι πολλαπλάσιο της άλλης με ένα στοιχείο k του σώματος \mathbb{K} . Επομένως, ο πίνακας A είναι της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} a & ka \\ b & kb \end{pmatrix} \implies A^2 = \begin{pmatrix} a & ka \\ b & kb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & ka \\ b & kb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + kab & 2kab \\ ab + kb^2 & kab + k^2b^2 \end{pmatrix}$$

Τότε θα έχουμε:

$$\text{Tr}(A^2) = a^2 + 2kab + (kb)^2 = (a + kb)^2 = \text{Tr}(A)^2$$

Όμως επειδή $\text{Tr}(A) = (a + kb)$, από την υπόθεση έχουμε $\text{Tr}(A) = 5$, και τότε:

$$\text{Tr}(A^2) = 25$$

Δεύτερος Τρόπος με χρήση Θεωρήματος Cayley-Hamilton: Επειδή $\mathbf{r}(A) = 1$, έπεται προφανώς ότι $|A| = 0$ και τότε από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton προκύπτει ότι:

$$A^2 - \text{Tr}(A)A = O \implies A^2 = \text{Tr}(A)A \implies \text{Tr}(A^2) = \text{Tr}(\text{Tr}(A)A) = \text{Tr}(A)\text{Tr}(A) = (\text{Tr}(A))^2 = 25$$

- (3) Επειδή όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, έπεται ότι

$$P_A(t) = P_B(t) \implies t^2 - \text{Tr}(A)t + |A| = t^2 - \text{Tr}(B)t + |B| \implies \begin{cases} \text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) \\ |A| = |B| \end{cases}$$

- (4) Έστω ότι ο A έχει θετικές ακέραιες ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 και ορίζουσα $|A| = 5$.

(α) Αν $\lambda_1 \neq \lambda_2$, τότε ο πίνακας A έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές και άρα είναι διαγωνοποιήσιμος.

Επομένως ο πίνακας A είναι όμοιος με τον διαγώνιο πίνακα $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Επειδή όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος και την ίδια ορίζουσα, έπεται ότι

$$\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{και} \quad |A| = \lambda_1 \lambda_2 = 5$$

Επειδή από την υπόθεση οι ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 είναι θετικές και ακέραιες, έπεται ότι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 5$. Επομένως:

$$\text{Tr}(A) = 1 + 5 = 6$$

(β) Υποθέτουμε ότι $\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Αν $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, τότε η μοναδική ιδιοτιμή λ είναι διπλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A :

$$P_A(t) = t^2 - \text{Tr}(A)t + |A| = t^2 - (a+b)t + (ad - bc) = t^2 - (a+b)t + 5$$

Άρα θα έχουμε:

$$\lambda^2 - (a+b)\lambda + 5 = 0$$

Όμως το τριώνυμο $t^2 - (a+b)t + 5$ έχει διπλή ρίζα αν και μόνον αν η διακρίνουσά του $(a+b)^2 - 20 = 0$ και άρα $(a+b)^2 = 20$. Τότε η διπλή ρίζα είναι ίση με $\lambda = \frac{a+b}{2}$, και επομένως θα έχουμε $(2\lambda)^2 = 20$, δηλαδή $4\lambda^2 = 20$ και τότε $\lambda^2 = 5$. Επειδή προφανώς η τελευταία σχέση δεν ικανοποιείται στο σύνολο των ακέραιων, καταλήγουμε σε άτοπο.

Επομένως:

$$\text{Tr}(A) = 6 \quad \blacksquare$$

Άσκηση 6. Έστω A και B δύο 2×2 πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} , και υποθέτουμε ότι $(AB)^2 = O$. Να εξετασθεί αν $(BA)^2 = O$.

Λύση. Θέτουμε:

$$M = AB \quad \text{και} \quad N = BA$$

Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton για τους πίνακες M και N έχουμε:

$$M^2 - \text{Tr}(M)M + |M|I_2 = O \quad \text{και} \quad N^2 - \text{Tr}(N)N + |N|I_2 = O \quad (\dagger)$$

Επειδή $|M^2| = |(AB)^2| = |O| = 0$, θα έχουμε

$$0 = |O| = |(AB)^2| = |(AB)(AB)| = |AB| \cdot |AB| = |AB|^2 \implies |AB| = |A| \cdot |B| = 0 \implies \\ \implies |A| = 0 \quad \text{ή} \quad |B| = 0 \implies |BA| = |B| \cdot |A| = 0$$

Τότε $|N| = |BA| = 0$, και άρα από τη σχέση (\dagger) προκύπτει ότι:

$$\text{Tr}(M)M = O \quad \text{και} \quad N^2 - \text{Tr}(N)N = O \quad (\dagger\dagger)$$

Από την πρώτη σχέση προκύπτει ότι είτε $\text{Tr}(M) = 0$ είτε $M = O$. Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε $\text{Tr}(M) = 0$. Επειδή¹

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) \quad (\star)$$

θα έχουμε

$$\text{Tr}(M) = \text{Tr}(N) \implies \text{Tr}(N) = 0$$

Τότε από τη σχέση (\dagger) προκύπτει ότι:

$$N^2 = O, \quad \text{δηλαδή:} \quad BA = O \quad \blacksquare$$

Άσκηση 7. Έστω A και B δύο 2×2 πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} , και υποθέτουμε ότι:

$$A = AB - BA$$

Να δειχθεί ότι:

$$A^2 = O$$

¹Έστω $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. Τότε:

$$AB = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad BA = \begin{pmatrix} xa + yc & xb + yd \\ za + wc & zb + wd \end{pmatrix}$$

Επομένως:

$$\text{Tr}(AB) = ax + bz + cy + dw = xa + yc + zb + wd = \text{Tr}(BA) \quad (\star)$$

Λύση. Επειδή για το ίχνος πινάκων ικανοποιείται η σχέση $\text{Tr}(C + D) = \text{Tr}(C) + \text{Tr}(D)$, $\forall C, D \in M_n(\mathbb{K})$, χρησιμοποιώντας τη σχέση (*), θα έχουμε:

$$A = AB - BA \implies \text{Tr}(A) = \text{Tr}(AB - BA) = \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = 0$$

Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έπεται τότε ότι:

$$A^2 - \text{Tr}(A)A + |A|I_2 = O \implies A^2 + |A|I_2 = O \implies A^2 = -|A|I_2 \quad (*)$$

Από τη σχέση $A = AB - BA$ θα έχουμε:

$$A = AB - BA \implies A^2 = A(AB - BA) = A^2B - ABA \quad \text{και} \quad A^2 = ABA - BA^2$$

Προσθέτοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε άμεσα ότι:

$$2A^2 = A^2B - BA^2 \stackrel{(*)}{\implies} 2A^2 = (-|A|I_2)B - B(-|A|I_2) = -|A|B + |A|B = O$$

Άρα $2A^2 = O$ και τότε προφανώς² θα έχουμε $A^2 = O$. ■

Άσκηση 8. Έστω A ένας 2×2 πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} , και υποθέτουμε ότι:

$$|A| = 0 \quad \text{και} \quad \text{Tr}(A) \neq -1$$

Ναδειχθεί ότι ο πίνακας $A + I_2$ είναι αντιστρέψιμος και:

$$A^{-1} = I_2 - \frac{1}{1 + \text{Tr}(A)}A$$

Λύση. Επειδή $|A| = 0$, από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton, θα έχουμε:

$$A^2 - \text{Tr}(A)A = O \implies A^2 = \text{Tr}(A)I_2$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} (A + I_2) \cdot \left(I_2 - \frac{1}{1 + \text{Tr}(A)}A \right) &= A - \frac{1}{1 + \text{Tr}(A)}A^2 + I_2 - \frac{1}{1 + \text{Tr}(A)}A = \\ &= A - \frac{\text{Tr}(A)}{1 + \text{Tr}(A)}A + I_2 - \frac{1}{1 + \text{Tr}(A)}A = \left(1 - \frac{\text{Tr}(A)}{1 + \text{Tr}(A)} - \frac{1}{1 + \text{Tr}(A)} \right) A + I_2 = I_2 \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε τότε ότι ο πίνακας $A + I_2$ είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = I_2 - \frac{1}{1 + \text{Tr}(A)}A \quad \blacksquare$$

Άσκηση 9. Θεωρούμε τον πίνακα πραγματικών αριθμών

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

και έστω ο πίνακας

$$B = A^4 - 3A^3 + 3A^2 - 2A + 8I_2$$

(1) Ναδειχθεί ότι:

$$B^2 = -I_2$$

(2) Είναι ο πίνακας B ή ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του \mathbb{R} ;

(3) Είναι ο πίνακας B ή ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του \mathbb{C} ;

Αν είναι στις παραπάνω περιπτώσεις ο πίνακας B ή ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, να διαγωνοποιηθεί.

²Υπενθυμίζουμε ότι το σώμα \mathbb{K} είναι ένα εκ των \mathbb{Q} , \mathbb{R} , και \mathbb{C} . Υπάρχουν σώματα \mathbb{K} για τα οποία ισχύει ότι $2a = 0$, $\forall a \in \mathbb{K}$, για παράδειγμα το σώμα \mathbb{Z}_2 . Για ένα τέτοιο σώμα \mathbb{K} , ισχύει ότι $2C = O$ για κάθε πίνακα C με στοιχεία από το \mathbb{K} .

Λύση. (1) Θα υπολογίσουμε πρώτα τον πίνακα $B = A^4 - 3A^3 + 3A^2 - 2A + 8I_2$.

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A :

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & -1 \\ 2 & 3-t \end{vmatrix} = t^2 - 4t + 5$$

Ακολουθώντας για να υπολογίσουμε τον πίνακα B εκτελούμετην Ευκλείδεια διαίρεση του πολυωνύμου $P(t) = t^4 - 3t^3 + 3t^2 - 2t + 8$ με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t) = t^2 - 4t + 5$ του πίνακα A :

$$P(t) = P_A(t)Q(t) + R(t) \implies t^4 - 3t^3 + 3t^2 - 2t + 8 = (t^2 - 4t + 5)(t^2 + t + 2) + t - 2$$

Άρα $P(t) = P_A(t)Q(t) + (t - 2)$. Επειδή $P(A) = B$, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα των Cayley-Hamilton θα έχουμε:

$$B = P(A) = P_A(A)Q(A) + (A - 2I_2) \quad \text{και} \quad P_A(A) = O \implies B = A - 2I_2$$

και τότε:

$$B = A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \boxed{B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B :

$$P_B(t) = \begin{vmatrix} -1-t & -1 \\ 2 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 + 1$$

Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton προκύπτει ότι

$$O = P_B(B) = B^2 + I_2 \implies B^2 = -I_2$$

- (2) Επειδή $P_B(t) = t^2 + 1$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B δεν έχει καμία πραγματική τιμή και άρα ο πίνακας B δεν είναι διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του \mathbb{R} .
- (3) Επειδή $P_B(t) = t^2 + 1 = (t - i)(t + i)$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B έχει δύο διακεκριμένες ρίζες $\lambda_1 = i$ και $\lambda_2 = -i$ υπεράνω του \mathbb{C} και επομένως ο πίνακας B είναι διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του \mathbb{C} .

- Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(i)$ έχουμε το ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$(B - iI_2)X = O \implies \begin{pmatrix} -1-i & -1 \\ 2 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\mathcal{V}(i) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix} \right\rangle$$

- Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(-i)$ έχουμε το ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$(B + iI_2)X = O \implies \begin{pmatrix} -1+i & -1 \\ 2 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\mathcal{V}(-i) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix} \right\rangle$$

Θέτοντας $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1+i & -1+i \end{pmatrix}$, αποκτούμε έναν αντιστρέψιμο πίνακα μιγαδικών αριθμών έτσι ώστε:

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

(4) Επειδή $B = A - 2I_2$, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} P^{-1}BP &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \implies P^{-1}(A - 2I_2)P = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \implies P^{-1}AP - P^{-1}(2I_2)P = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\ \implies P^{-1}AP - 2I_2 &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \implies P^{-1}AP = 2I_2 + \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \implies \\ &\implies P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Επομένως ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του \mathbb{C} καθώς είναι όμοιος με τον πίνακα $\begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}$ και δεν είναι διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του \mathbb{R} διότι το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο $P_A(t) = t^2 - 4t + 5$ δεν έχει πραγματικές ρίζες. ■

Άσκηση 10. Να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$, δηλαδή να βρεθεί ένας πίνακας $B \in M_2(\mathbb{K})$ έτσι ώστε $B^2 = A$.

Λύση. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A :

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 6-t & 2 \\ 3 & 7-t \end{vmatrix} = t^2 - 13t + 36$$

Επειδή, όπως μπορούμε να δούμε εύκολα $t^2 - 13t + 36 = (t-9)(t-4)$, οι ρίζες του $P_A(t)$ είναι οι 9 και 4 και επομένως οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι $\lambda_1 = 4$ και $\lambda_2 = 9$. Επειδή οι ιδιοτιμές του A είναι διακεκριμένες, έπεται ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος και άρα υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 \implies A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 P^{-1} \implies A = \left(P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} \right)^2$$

Επομένως, θέτοντας:

$$B = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} \tag{†}$$

αποκτούμε έναν 2×2 πίνακα B έτσι ώστε: $B^2 = A$. Θα προσδιορίσουμε τους πίνακες P, P^{-1} .

- Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(4)$ έχουμε το ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$(A - 4I_2)X = O \implies \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies x + y = 0 \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\mathcal{V}(4) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(9)$ έχουμε το ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$(A - 9I_2)X = O \implies \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies 3x - 2y = 0 \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\mathcal{V}(9) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Θέτουμε

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{και τότε} \quad P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε από τη σχέση (†) προκύπτει ότι:

$$B = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

και τελικά:

$$B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$$

■

Άσκηση 11. Έστω \mathcal{E} ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} και \mathcal{B} μια βάση του \mathcal{E} . Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του \mathcal{E} και $P(t) \in \mathbb{K}[t]$ ένα πολυώνυμο. Τότε:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(P(f)) = P(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f))$$

Λύση. Έστω $P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_{m-1}t^{m-1} + a_mt^m$. Τότε:

$$P(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)) = a_0I_n + a_1M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) + a_2M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)^2 + \dots + a_{m-1}M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)^{m-1} + a_mM_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)^m \quad (\dagger)$$

Υπενθυμίζουμε από την Γραμμική Άλγεβρα I, ότι αν \mathcal{B} είναι μια βάση του \mathcal{E} , τότε η απεικόνιση

$$\Phi: \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \rightarrow M_n(\mathbb{K}), \quad \Phi(f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$$

είναι ισομορφισμός \mathbb{K} -διανυσματικών χώρων, όπου $n = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}$. Επιπλέον η Φ στέλνει την σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων στο γινόμενο των αντίστοιχων πινάκων, δηλαδή ισχύει:

$$\Phi(f \circ g) = \Phi(f) \cdot \Phi(g) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g)$$

Ιδιαίτερα θα έχουμε:

$$\Phi(f^k) = \Phi(f \circ f \circ \dots \circ f) = \Phi(f) \cdot \Phi(f) \cdot \dots \cdot \Phi(f) = \Phi(f)^k = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)^k$$

Επίσης η Φ και στέλνει τον ταυτοτικό ενδομορφισμό $\text{Id}_{\mathcal{E}}$ στον μοναδιαίο $n \times n$ πίνακα I_n :

$$\Phi(\text{Id}_{\mathcal{E}}) = I_n$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ιδιότητες του ισομορφισμού Φ , η σχέση (†) δίνει:

$$\begin{aligned} P(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)) &= a_0\Phi(\text{Id}_{\mathcal{E}}) + a_1\Phi(f) + a_2\Phi(f)^2 + \dots + a_n\Phi(f)^m = \\ &= \Phi(a_0\text{Id}_{\mathcal{E}} + a_1f + a_2f^2 + \dots + a_mf^m) = \Phi(P(f)) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(P(f)) \end{aligned}$$

■

Άσκηση 12. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} , όπου $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$. Να δειχθεί ότι το ελάχιστο πολυώνυμο της f συμπίπτει με το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακά της σε μια τυχούσα βάση \mathcal{B} του \mathcal{E} :

$$Q_f(t) = Q_{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)}(t)$$

Λύση. Έστω $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$. Τότε θέτοντας $P(t) = Q_f(t)$ στην Άσκηση 11, θα έχουμε:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(Q_f(f)) = Q_f(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)) = Q_f(A)$$

Επειδή $Q_f(f) = 0$ και ο πίνακας του μηδενικού ενδομορφισμού ως προς τυχούσα βάση είναι ο μηδενικός, έπεται ότι $Q_f(A) = O$, δηλαδή το ελάχιστο πολυώνυμο της f μηδενίζει τον πίνακα A . Τότε όμως θα έχουμε:

$$Q_A(t) \mid Q_f(t) \quad (1)$$

Από την άλλη πλευρά, θέτοντας $P(t) = Q_A(t)$ στην Άσκηση 11, θα έχουμε:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(Q_A(f)) = Q_A(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)) = Q_A(A)$$

Επειδή $Q_A(A) = O$ και επειδή ο μοναδικός ενδομορφισμός με μηδενικό πίνακα σε τυχούσα βάση είναι ο μηδενικός ενδομορφισμός, έπεται ότι ο ενδομορφισμός $Q_A(f)$ είναι ο μηδενικός, δηλαδή το ελάχιστο πολυώνυμο του A μηδενίζει τον ενδομορφισμό f . Τότε όμως θα έχουμε:

$$Q_f(t) \mid Q_A(t) \quad (2)$$

Επειδή τα πολυώνυμα $Q_A(t)$ και $Q_f(t)$ είναι κανονικά, από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι $Q_A(t) = Q_f(t)$, δηλαδή: $Q_{M_B^B(f)}(t) = Q_f(t)$. ■

Άσκηση 13. (1) Έστω $Q(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_mt^m \in \mathbb{K}[t]$ και $A \in M_n(\mathbb{K})$. Τότε για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $P \in M_n(\mathbb{K})$ ισχύει ότι:

$$Q(P^{-1}AP) = P^{-1}Q(A)P$$

(2) Ναδειχθεί ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

(3) Ναδειχθεί ότι³, για κάθε τετραγωνικό πίνακα A , οι πίνακες A και tA έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

Λύση. (1) Χρησιμοποιώντας ότι $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP, \forall k \geq 1$, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} Q(P^{-1}AP) &= a_0I_n + a_1(P^{-1}AP) + a_2(P^{-1}AP)^2 + \dots + a_m(P^{-1}AP)^m = \\ &= a_0I_n + a_1(P^{-1}AP) + a_2(P^{-1}A^2P) + \dots + a_m(P^{-1}A^mP) = \\ &= a_0I_n + P^{-1}a_1AP + P^{-1}a_2A^2P + \dots + P^{-1}a_mA^mP = \\ &= P^{-1}(a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_mA^m)P = P^{-1}Q(A)P \end{aligned}$$

(2) Έστω ότι A και B είναι όμοιοι πίνακες. Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε $P^{-1}AP = B$. Θέτοντας $P(t) = Q_B(t)$ και $P(t) = Q_A(t)$ στο μέρος (1) να είναι τα ελάχιστα πολυώνυμα των πινάκων B και A , έπεται ότι:

$$O = Q_B(B) = Q_B(P^{-1}AP) = P^{-1}Q_B(A)P \implies Q_B(A) = O \implies Q_A(t) \mid Q_B(t) \quad (\dagger)$$

$$Q_A(B) = Q_A(P^{-1}AP) = P^{-1}Q_A(A)P = P^{-1}OP = O \implies Q_A(B) = O \implies Q_B(t) \mid Q_A(t) \quad (\dagger\dagger)$$

Επειδή τα ελάχιστα πολυώνυμα $Q_A(t)$ και $Q_B(t)$ είναι κανονικά, από τις σχέσεις (\dagger) και $(\dagger\dagger)$ προκύπτει ότι: $Q_A(t) = Q_B(t)$.

(3) Έστω ότι $Q_{{}^tA}(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_{k-1}t^{k-1} + t^k$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του tA . Τότε, χρησιμοποιώντας ότι η απεικόνιση $M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K}), A \mapsto {}^tA$ είναι γραμμική και ${}^t(A^m) = ({}^tA)^m, \forall m \geq 0$, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} O &= Q_{{}^tA}({}^tA) = a_0I_n + a_1{}^tA + a_2({}^tA)^2 + \dots + a_{k-1}({}^tA)^{k-1} + ({}^tA)^k = \\ &= a_0I_n + a_1{}^tA + a_2{}^t(A^2) + \dots + a_{k-1}{}^t(A^{k-1}) + {}^t(A^k) = \\ &= {}^t(a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_{k-1}A^{k-1} + A^k) = Q_{{}^tA}(A) \end{aligned}$$

Επομένως:

$$Q_A(t) \mid Q_{{}^tA}(t) \quad (*)$$

Παρόμοια, έστω ότι $Q_A(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots + b_{m-1}t^{m-1} + t^m$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του A . Τότε:

$$\begin{aligned} O &= Q_A(A) = b_0I_n + b_1A + b_2A^2 + \dots + b_{m-1}A^{m-1} + A^m \implies \\ &\implies {}^t(b_0I_n + b_1A + b_2A^2 + \dots + b_{m-1}A^{m-1} + A^m) = O \implies \\ &\implies b_0I_n + b_1{}^tA + b_2{}^t(A^2) + \dots + b_{m-1}{}^t(A^{m-1}) + {}^t(A^m) = O \implies \\ &\implies b_0I_n + b_1{}^tA + b_2({}^tA)^2 + \dots + b_{m-1}({}^tA)^{m-1} + ({}^tA)^m = O \quad Q_A({}^tA) = O \end{aligned}$$

Επομένως:

$$Q_{{}^tA}(t) \mid Q_A(t) \quad (**)$$

Επειδή τα ελάχιστα πολυώνυμα $Q_A(t)$ και $Q_{{}^tA}(t)$ είναι κανονικά, από τις σχέσεις $(*)$ και $(**)$ προκύπτει ότι: $Q_A(t) = Q_{{}^tA}(t)$. ■

³Αποδεικνύεται ότι οι πίνακες A και tA είναι όμοιοι.

Άσκηση 14. Βρείτε τα ελάχιστα πολυώνυμα των ακόλουθων πινάκων πραγματικών αριθμών:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Λύση. **1.** Για τον πίνακα A έχουμε:

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -5-t & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3-t & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-t & -4 \\ 4 & -5-t \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3-t & -2 \\ 2 & -1-t \end{vmatrix} = (t+1)^2(t-1)^2$$

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t)$, και τα πολυώνυμα $Q_A(t)$ και $P_A(t)$ έχουν τις ίδιες ρίζες. Άρα το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι ένα εκ των:

$$(t+1)(t-1), \quad (t+1)^2(t-1), \quad (t+1)(t-1)^2, \quad (t+1)^2(t-1)^2$$

Στη συνέχεια για να προσδιορίσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο, υπολογίζουμε ποιο από τα παρακάτω γινόμενα πινάκων δίνει το μηδενικό πίνακα:

$$(A + I_4)(A - I_4), \quad (A + I_4)^2(A - I_4), \quad (A + I_4)(A - I_4)^2, \quad (A + I_4)^2(A - I_4)^2$$

Εύκολα υπολογίζουμε ότι

$$(A + I_4)(A - I_4) \neq O, \quad (A + I_4)^2(A - I_4) \neq O, \quad (A + I_4)(A - I_4)^2 \neq O$$

Άρα το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το

$$Q_A(t) = (t+1)^2(t-1)^2$$

Πραγματικά:

$$(A + I_4)^2(A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^2 = \dots = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

δηλαδή το $(t+1)^2(t-1)^2$ μηδενίζει τον πίνακα A και είναι το κανονικό πολυώνυμο με τον μικρότερο βαθμό το οποίο μηδενίζει τον πίνακα A . Επομένως το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A είναι $Q_A(t) = (t+1)^2(t-1)^2$.

2. Για τον πίνακα B έχουμε:

$$P_B(t) = \begin{vmatrix} 4-t & 0 & -1 \\ 0 & 4-t & -1 \\ -1 & -1 & 5-t \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{vmatrix} 4-t & 0 & -1 \\ -(4-t) & 4-t & 0 \\ -1 & -1 & 5-t \end{vmatrix} = (4-t) \begin{vmatrix} 4-t & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 5-t \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \Gamma_3} (4-t) \begin{vmatrix} 4-t & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 5-t \\ -1 & -1 & 5-t \end{vmatrix} = (4-t) \begin{vmatrix} 4-t & -1 \\ -2 & 5-t \end{vmatrix} = (4-t)(t^2 - 9t + 18) = (4-t)(t-3)(t-6)$$

Συνεπώς, αφού το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_B(t)$ έχει τις ίδιες ρίζες με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_B(t)$ έπεται ότι

$$Q_B(t) = (4-t)(t-3)(t-6) \quad \blacksquare$$

Άσκηση 15. Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t)$ του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

και στη συνέχεια με τη βοήθεια του Θεωρήματος των Cayley-Hamilton να υπολογίσετε τον πίνακα

$$B = A^{23} - 3A^{22} - 4A^{21} + 10A^{20} - A^6 + 3A^5 + 4A^4 - 11A^3 + 4A^2 + 5A + I_3$$

Λύση. Εύκολα βρίσκουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t)$ είναι

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ -1 & -t & 4 \\ 0 & 2 & 2-t \end{vmatrix} = \dots = -t^3 + 3t^2 + 4t - 10$$

Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$R(t) = t^{23} - 3t^{22} - 4t^{21} + 10t^{20} - t^6 + 3t^5 + 4t^4 - 11t^3 + 4t^2 + 5t + 1$$

Διαιρώντας το πολυώνυμο $R(t)$ με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t)$ θα έχουμε:

$$R(t) = P_A(t)(-t^{20} + t^3 + 1) + (t^2 + t + 11) \quad (*)$$

Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε ότι $P_A(A) = 0$. Επομένως, από τη σχέση (*) έχουμε:

$$\begin{aligned} B = R(A) &= P_A(A)(-A^{20} + A^3 + I_3) + (A^2 + A + 11I_3) \\ \implies B &= A^2 + A + 11I_3 \end{aligned}$$

⋮

$$\implies B = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 20 \\ -2 & 17 & 9 \\ -2 & 6 & 25 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Άσκηση 16. Έστω A ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας. Να δείχθεί ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ο σταθερός όρος του ελαχίστου πολυωνύμου $Q_A(t)$ του A είναι μη-μηδενικός.

Λύση. “ \Leftarrow ” Υποθέτουμε πρώτα ότι ο σταθερός όρος του ελαχίστου πολυωνύμου του πίνακα A είναι μη-μηδενικός και επομένως, αν $Q_A(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots + b_{k-1}t^{k-1} + t^k$, τότε $b_0 \neq 0$. Επειδή $Q_A(A) = O$, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} b_0I_n + b_1A + b_2A^2 + \dots + b_{k-1}A^{k-1} + A^k = O &\implies b_1A + b_2A^2 + \dots + b_{k-1}A^{k-1} + A^k = -b_0I_n \implies \\ \left(-\frac{b_1}{b_0}I_n - \frac{b_2}{b_0}A - \dots - \frac{b_{k-1}}{b_0}A^{k-2} - \frac{1}{b_0}A^{k-1} \right) A &= I_n \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = -\frac{b_1}{b_0}I_n - \frac{b_2}{b_0}A - \dots - \frac{b_{k-1}}{b_0}A^{k-2} - \frac{1}{b_0}A^{k-1}$$

“ \Rightarrow ” Έστω ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Γνωρίζουμε τότε ότι ο σταθερός όρος a_0 του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $P_A(t)$ του A είναι μη-μηδενικός. Έστω ότι:

$$P_A(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_{n-1}t^{n-1} + (-1)^n t^n \quad \text{και} \quad Q_A(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots + b_{k-1}t^{k-1} + t^k$$

Επειδή $Q_A(t) \mid P_A(t)$, έπεται ότι υπάρχει πολυώνυμο $R(t) = c_0 + c_1t + \dots + c_m t^m$ έτσι ώστε:

$$P_A(t) = Q_A(t)R(t) \implies a_0 = b_0c_0$$

Επειδή $a_0 \neq 0$ έπεται ότι $b_0 \neq 0$. ■

Άσκηση 17. Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Με τη βοήθεια του Θεωρήματος των Cayley-Hamilton να εκφράσετε τον αντίστροφο του πίνακα

$$B = A^4 + 5A^3 - 48A^2 - I_2$$

στη μορφή $\kappa A + \lambda I_2$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ είναι κατάλληλοι πραγματικοί αριθμοί.

Λύση. Έχουμε:

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -5 \\ -1 & 3-t \end{vmatrix} = (2-t)(3-t) - 5 = t^2 - 5t + 1$$

Θεωρούμε το πολυώνυμο $R(t) = t^4 + 5t^3 - 48t^2 - 1$ και εκτελούμε τη διαίρεση του $R(t)$ με το $P_A(t)$:

$$R(t) = P_A(t)(t^2 + 10t + 1) + (-5t - 2)$$

Επομένως, από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε:

$$B = R(A) = P_A(A)(A^2 + 10A + I_2) + (-5A - 2I_2) = -5A - 2I_2$$

Επομένως:

$$B = \begin{pmatrix} -12 & 25 \\ 5 & -17 \end{pmatrix}$$

Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B . Έχουμε:

$$P_B(t) = \begin{vmatrix} -12-t & 25 \\ 5 & -17-t \end{vmatrix} = (-12-t)(-17-t) - 125 = t^2 + 29t + 79$$

Συνεπώς από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε:

$$\begin{aligned} P_B(B) = 0 &\implies B^2 + 29B + 79I_2 = 0 \\ &\implies B(B + 29I_2) = -79I_2 \\ &\implies B\left(-\frac{1}{79}(B + 29I_2)\right) = I_2 \\ &\implies B^{-1} = -\frac{1}{79}(B + 29I_2) \\ &\implies B^{-1} = -\frac{1}{79}(-5A - 2I_2 + 29I_2) \\ &\implies B^{-1} = \frac{5}{79}A - \frac{27}{79}I_2 \end{aligned}$$

Άρα εκφράσαμε τον αντίστροφο του πίνακα B στη μορφή $\kappa A + \lambda I_2$, όπου $\kappa = \frac{5}{79}$ και $\lambda = -\frac{27}{79}$. ■

Άσκηση 18. Έστω A ένας 2×2 πίνακας με στοιχεία από το \mathbb{K} , και έστω k ένας φυσικός αριθμός, $k > 2$. Με τη βοήθεια του Θεωρήματος των Cayley-Hamilton να αποδειχθεί ότι

$$A^k = 0 \implies A^2 = 0$$

Λύση. Θεωρούμε το πολυώνυμο $R(t) = t^k$. Τότε από υπόθεση έπεται ότι $R(A) = A^k = 0$. Συνεπώς το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ του πίνακα A διαιρεί το πολυώνυμο $g(t)$ και άρα $Q_A(t) = t^n$ όπου $1 \leq n \leq k$. Όμως ο βαθμός του $Q_A(t)$ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος του 2 διότι $Q_A(t)/P_A(t)$ και $\deg P_A(t) = 2$. Άρα έχουμε ότι $1 \leq n \leq 2$. Αν $n = 1$ τότε $Q_A(t) = t$ και από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε

$$Q_A(A) = 0 \implies A = 0 \implies A^2 = 0$$

που είναι η τετριμμένη περίπτωση.

Αν $n = 2$ τότε $Q_A(t) = t^2$ και από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έπεται ότι

$$Q_A(A) = 0 \implies A^2 = 0$$

και έτσι έχουμε το ζητούμενο. ■

Άσκηση 19. Αν A είναι ένας $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών, όπου n είναι περιττός, ναδειχθεί ότι

$$A^2 + I_n \neq O$$

Λύση. Υποθέτουμε ότι $A^2 + I_n = O$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Θεωρούμε το πολυώνυμο $Q(t) = t^2 + 1$. Τότε $Q(A) = O$ και επομένως

$$Q_A(t) \mid t^2 + 1$$

Επειδή το πολυώνυμο $t^2 + 1$ είναι ανάγωγο, έπεται ότι $Q_A(t) = t^2 + 1$. Το πολυώνυμο $t^2 + 1$ δεν έχει πραγματικές ρίζες. Από την άλλη πλευρά, επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t)$ είναι περιττού βαθμού, έπεται ότι⁴ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα. Επειδή το ελάχιστο και χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχουν τις ίδιες ρίζες, έπεται ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t) = t^2 + 1$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα, και αυτό είναι άτοπο. Στο άτοπο καταλήξαμε υποθέτοντας ότι $A^2 + I_n = O$. Άρα $A^2 + I_n \neq O$. ■

Άσκηση 20. Έστω $R(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_k t^k$ ένα πολυώνυμο υπεράνω του \mathbb{K} με $a_0 \neq 0$.

- (1) Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του \mathcal{E} , όπου \mathcal{E} είναι ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Αν $R(f) = 0$, ναδειχθεί ότι ο f είναι ισομορφισμός και να υπολογισθεί ο f^{-1} .
- (2) Αν $A \in M_n(\mathbb{K})$ και $R(A) = 0$, ναδειχθεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και να υπολογισθεί ο A^{-1} .

Λύση. Συμβολίζουμε με $\text{Id}_{\mathcal{E}}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ τον ταυτοτικό ενδομορφισμό του \mathcal{E} . Επειδή $a_0 \neq 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} R(f) &= a_0 \text{Id}_{\mathcal{E}} + a_1 f + \dots + a_k f^k = 0 \\ \implies a_1 f + \dots + a_k f^k &= -a_0 \text{Id}_{\mathcal{E}} \\ \implies f \circ (a_1 \text{Id}_{\mathcal{E}} + \dots + a_k f^{k-1}) &= -a_0 \text{Id}_{\mathcal{E}} \\ \implies f \circ \left(-\frac{a_1}{a_0} \text{Id}_{\mathcal{E}} - \dots - \frac{a_k}{a_0} f^{k-1}\right) &= \text{Id}_{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

Παρόμοια θα έχουμε: $\left(-\frac{a_1}{a_0} \text{Id}_{\mathcal{E}} - \dots - \frac{a_k}{a_0} f^{k-1}\right) \circ f = \text{Id}_{\mathcal{E}}$.

Άρα ο ενδομορφισμός f είναι ισομορφισμός με αντίστροφο ενδομορφισμό

$$f^{-1} = -\frac{a_1}{a_0} \text{Id}_{\mathcal{E}} - \dots - \frac{a_k}{a_0} f^{k-1}$$

Παρόμοια εργαζόμαστε στη περίπτωση του ερωτήματος (2). Εναλλακτικά χρησιμοποιούμε τον ενδομορφισμό $f_A: \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_n$, $f_A(X) = AX$. ■

Άσκηση 21. Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος (α) υπεράνω του \mathbb{R} ; (β) υπεράνω του \mathbb{C} ;

Λύση. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A :

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 0 & 1 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & -t \end{vmatrix} = -t^3 + 1$$

1. Επειδή, όπως μπορούμε να δούμε εύκολα $P_A(t) = -t^3 + 1 = -(t-1)(t^2 + t + 1)$, η μόνη ρίζα του $P_A(t)$ υπεράνω του \mathbb{R} είναι η $\lambda = 1$ και επομένως ο πίνακας A δεν διαγωνοποιείται υπεράνω του \mathbb{R} .

Το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ είναι όπως γνωρίζουμε διαιρέτης του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $P_A(t) = -t^3 + 1$. Οι μόνοι διαιρέτες, εκτός του σταθερού πολυωνύμου 1, υπεράνω του \mathbb{R} του $-t^3 + 1 =$

⁴Θεωρούμε γνωστό ότι: «κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα».

$-(t-1)(t^2+t+1)$ είναι οι $t-1$, t^2+t+1 , και $(t-1)(t^2+t+1) = t^3-1$. Προφανώς $Q_A(t) \neq t-1$ διότι διαφορετικά θα είχαμε

$$O = Q_A(A) = A - I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

και αυτό είναι άτοπο.

Αν $Q_A(t) = t^2+t+1$ τότε θα είχαμε

$$O = Q_A(A) = A^2 + A + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα $Q_A(t) \neq t^2+t+1$ και επομένως: $Q_A(t) = (t-1)(t^2+t+1) = t^3-1$.

2. Εργαζόμενοι υπεράνω του \mathbb{C} , έχουμε

$$P_A(t) = -(t-1)(t^2+t+1) = -(t-1)(t-\omega)(t-\omega^2)$$

όπου

$$\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{και} \quad \omega^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

είναι οι κυβικές μιγαδικές ρίζες της μονάδας. Έτσι οι ιδιοτιμές του A υπεράνω του \mathbb{C} είναι διακεκριμένες, έπεται ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του \mathbb{C} , και άρα υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$$

• Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(1)$ έχουμε το ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} (A - I_3)X = O &\implies \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -x + z = 0 \\ x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \implies \\ &\implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\mathcal{V}(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

• Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(\omega)$ έχουμε το ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} (A - \omega I_3)X = O &\implies \begin{pmatrix} -\omega & 0 & 1 \\ 1 & -\omega & 0 \\ 0 & 1 & -\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -\omega x + z = 0 \\ x - \omega y = 0 \\ y - \omega z = 0 \end{cases} \implies \\ &\implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \omega^2 x \\ \omega x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\mathcal{V}(\omega) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix} \right\rangle$$

- Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(\omega^2)$ έχουμε το ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$(A - \omega^2 I_3)X = O \implies \begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 & 1 \\ 1 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 1 & -\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -\omega^2 x + z = 0 \\ x - \omega^2 y = 0 \\ y - \omega^2 z = 0 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \omega x \\ \omega^2 x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{C}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\mathcal{V}(\omega^2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Θέτοντας

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}$$

αποκτούμε έναν αντιστρέψιμο πίνακα μιγαδικών αριθμών έτσι ώστε:

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$$

Επειδή ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του \mathbb{C} , το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ του A είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων και έχει ως ρίζες τις ιδιοτιμές του A . Επομένως:

$$Q_A(t) = (t - 1)(t^2 + t + 1) = t^3 - 1.$$

Συνοψίζοντας, το ελάχιστο πολυώνυμο του A , υπεράνω του \mathbb{R} ή του \mathbb{C} είναι το:

$$\boxed{Q_A(t) = t^3 - 1} \quad \blacksquare$$

Άσκηση 22. Έστω ο $n \times n$ πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) Ναδειχθεί ότι ο πίνακας $\frac{1}{n}A$ είναι ταυτοδύναμος, δηλαδή $(\frac{1}{n}A)^2 = \frac{1}{n}A$.
- (2) Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του $\frac{1}{n}A$.
- (3) Ναδειχθεί ότι ο πίνακας $\frac{1}{n}A$ είναι διαγωνοποιήσιμος. Ποιά είναι η διαγώνια μορφή του;

Λύση. Για το πρώτο ερώτημα έχουμε:

$$\left(\frac{1}{n}A\right)^2 = \left(\frac{1}{n}A\right) \left(\frac{1}{n}A\right) = \frac{1}{n^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{n^2} \begin{pmatrix} n & n & \cdots & n \\ n & n & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & n \end{pmatrix} = \frac{1}{n}A$$

και άρα ο πίνακας $\frac{1}{n}A$ είναι ταυτοδύναμος.

Έστω λ μια ιδιοτιμή του πίνακα $B = \frac{1}{n}A$. Συνεπώς, υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα στήλη X έτσι ώστε $BX = \lambda X$. Επειδή $B^2 = B$ από το πρώτο ερώτημα, τότε έχουμε:

$$BX = \lambda X \implies B^2 X = \lambda B X \implies BX = \lambda^2 X \implies \lambda X = \lambda^2 X \implies (\lambda - \lambda^2)X = 0$$

και επειδή το $X \neq 0$ έπεται ότι $\lambda(1 - \lambda) = 0$, δηλαδή $\lambda = 0$ ή $\lambda = 1$. Αντίστροφα εύκολα βλέπουμε ότι πράγματι οι αριθμοί $0, 1$ είναι ιδιοτιμές του B . Επομένως, ο πίνακας $B = \frac{1}{n}A$ έχει ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ με κατάλληλες πολλαπλότητες. Θεωρούμε το πολυώνυμο $R(t) = t^2 - t$. Τότε

$$R(B) = B^2 - B = B - B = 0$$

και άρα το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_B(t)$ του πίνακα B διαιρεί το πολυώνυμο $R(t)$. Επομένως, έχουμε:

$$Q_B(t) / R(t) \implies Q_B(t) = 1 \quad \text{ή} \quad Q_B(t) = t - 1 \quad \text{ή} \quad Q_B(t) = t(t - 1)$$

Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχουν τις ίδιες ρίζες, έπεται ότι

$$Q_B(x) = t(t - 1)$$

Άρα το ελάχιστο πολυώνυμο του A έχει διακεκριμένες ρίζες και και συνεπώς από γνωστό κριτήριο διαγωνοποίησης έπεται ότι ο πίνακας $B = \frac{1}{n}A$ είναι διαγωνοποιήσιμος. Επομένως ο πίνακας B είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα στη διαγώνιο του οποίου είναι τα στοιχεία 0 και 1 . Για να προσδιορίσουμε πόσες φορές εμφανίζεται το 1 και πόσες φορές εμφανίζεται το 0 , αρκεί να προσδιορίσουμε την αλγεβρική πολλαπλότητα τους ως ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του B .

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B :

$$P_{\frac{1}{n}A}(t) = \left| \frac{1}{n}A - tI_n \right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{n} - t & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} - t & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} - t & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} - t & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} - t \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_n}$$

$$\begin{vmatrix} 1 - t & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 1 - t & \frac{1}{n} - t & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 1 - t & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} - t & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 - t & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} - t & \frac{1}{n} \\ 1 - t & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} - t \end{vmatrix} = (1-t) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} - t & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} - t & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} - t & \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} - t \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1, \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1, \\ \dots, \Gamma_n \rightarrow \Gamma_n - \Gamma_1 \end{matrix}}$$

$$(1-t) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -t \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} (1-t)t^{n-1}$$

Άρα

$$P_{A_n}(t) = (-1)^n t^{n-1} (1-t)$$

και επομένως οι ιδιοτιμές του $B = \frac{1}{n}A$ είναι οι $\lambda_1 = 1$ με πολλαπλότητα 1 και $\lambda_2 = 0$ με πολλαπλότητα $n - 1$. Επειδή ο πίνακας B είναι διαγωνοποιήσιμος, έπεται ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}(1) = 1$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}(0) = n - 1$. Επομένως ο πίνακας $B = \frac{1}{n}A$ είναι όμοιος με τον διαγώνιο πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■

Υπενθυμίζουμε ότι η σχέση ομοιότητας $n \times n$ πινάκων είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $M_n(\mathbb{K})$. Η κλάση ομοιότητας ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{K})$ αποτελείται από το σύνολο όλων των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} οι οποίοι είναι όμοιοι με τον A .

Άσκηση 23. Να περιγραφούν οι διαφορετικές κλάσεις ομοιότητας ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{K})$ για τον οποίο ισχύει

$$A^3 = A$$

Λύση. Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$Q(t) = t^3 - t$$

Τότε προφανώς θα έχουμε ότι $Q(A) = O$ και επομένως το πολυώνυμο $Q(t)$ διαιρείται από το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$:

$$Q_A(t) \mid Q(t)$$

Επειδή $Q(t) = t(t^2 - 1) = t(t-1)(t+1)$, οι διαιρέτες του $Q(t)$, εκτός του σταθερού πολυωνύμου 1, είναι οι: $t, t-1, t+1, t(t-1), t(t+1), (t-1)(t+1)$, και $t(t-1)(t+1)$, θα έχουμε ότι το $Q_A(t)$ θα είναι ένα εκ των πολυωνύμων:

$$t, \quad t-1, \quad t+1, \quad t(t-1), \quad t(t+1), \quad (t-1)(t+1), \quad t(t-1)(t+1)$$

- (1) Αν $Q_A(t) = t$, τότε $O = Q_A(A) = A = O$, και άρα: $A = O$.
- (2) Αν $Q_A(t) = t-1$, τότε $O = Q_A(A) = A - I_n = O$, και άρα: $A = I_n$.
- (3) Αν $Q_A(t) = t+1$, τότε $O = Q_A(A) = A + I_n = O$, και άρα: $A = -I_n$.
- (4) Αν $Q_A(t) = t(t-1)$, τότε $O = Q_A(A) = A(A - I_n) = O$, και άρα ο πίνακας A είναι ταυτοδύναμος: $A^2 = A$. Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων έπεται ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος και άρα ο A είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα στη διαγώνιο του οποίου υπάρχουν τα στοιχεία 0 και 1.
- (5) Αν $Q_A(t) = t(t+1)$, τότε $O = Q_A(A) = A(A + I_n) = O$, και άρα για τον πίνακα A ισχύει ότι: $A^2 = -A$. Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων έπεται ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος και άρα ο A είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα στη διαγώνιο του οποίου υπάρχουν τα στοιχεία 0 και -1 .
- (6) Αν $Q_A(t) = (t-1)(t+1)$, τότε $O = Q_A(A) = A^2 - I_2 = O$, και άρα: $A^2 = I_2$. Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων έπεται ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος και άρα ο A είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα στη διαγώνιο του οποίου υπάρχουν τα στοιχεία 1 και -1 .
- (7) Αν $Q_A(t) = t(t-1)(t+1)$, τότε $O = Q_A(A) = A(A^2 - I_2) = O$, και άρα: $A^3 = A$. Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων έπεται ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος και άρα ο A είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα στη διαγώνιο του οποίου υπάρχουν τα στοιχεία 0, 1 και -1 .

Επομένως υπάρχουν οι ακόλουθες 7 διαφορετικές κλάσεις ομοιότητας για την πίνακα A , δηλαδή ο πίνακας A είναι όμοιος με έναν και μόνον έναν εκ των παρακάτω 7 διαγώνιων πινάκων:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad -I_n = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Επειδή ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, η πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής είναι ίση με την διάσταση του αντίστοιχου ιδιοχώρου και επομένως η πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής συμπίπτει με το πλήθος των εμφανίσεων της στον διαγώνιο πίνακα ο οποίος είναι όμοιος με τον A . Επειδή η διάσταση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(\lambda)$ συμπίπτει με τη διάσταση του χώρου των λύσεων $\Lambda(\Sigma(\lambda))$, όπου $\Sigma(\lambda)$ είναι το ομογενές γραμμικό σύστημα $(A - \lambda I_n)X = O$, έπεται ότι: $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}(\lambda) = n - \mathbf{r}(A - \lambda I_n)$.

Επομένως θα έχουμε:

- (1) Στον πίνακα O η μόνη ιδιοτιμή 0 εμφανίζεται n φορές.
- (2) Στον πίνακα I_n η μόνη ιδιοτιμή 1 εμφανίζεται n φορές.
- (3) Στον πίνακα $-I_n$ η μόνη ιδιοτιμή -1 εμφανίζεται n φορές.
- (4) Στον πίνακα A_1 η ιδιοτιμή 0 εμφανίζεται $n - \mathbf{r}(A)$ φορές και η ιδιοτιμή 1 εμφανίζεται $\mathbf{r}(A)$ φορές.
- (5) Στον πίνακα A_2 η ιδιοτιμή 0 εμφανίζεται $n - \mathbf{r}(A)$ φορές και η ιδιοτιμή -1 εμφανίζεται $\mathbf{r}(A)$ φορές.
- (6) Στον πίνακα A_3 η ιδιοτιμή 1 εμφανίζεται $n - \mathbf{r}(A - I_n)$ φορές και η ιδιοτιμή -1 εμφανίζεται $\mathbf{r}(A - I_n) = n - \mathbf{r}(A + I_n)$ φορές.
- (7) Στον πίνακα A_4 η ιδιοτιμή 0 εμφανίζεται $n - \mathbf{r}(A)$ φορές, η ιδιοτιμή 1 εμφανίζεται $n - \mathbf{r}(A - I_n)$ φορές, και η ιδιοτιμή -1 εμφανίζεται $n - \mathbf{r}(A + I_n)$ φορές. ■

Άσκηση 24. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

- (1) Να βρεθεί μη-μηδενικό πολυώνυμο $Q(t)$ έτσι ώστε $Q(A) = 0$.
- (2) Να δείξετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί πολυώνυμο $P(t)$ έτσι ώστε $P(A) = A^{-1}$.

Λύση. Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A :

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & -1 \\ 1 & -t & 1 \\ 4 & -4 & 5-t \end{vmatrix} = \dots = -t^3 + 6t^2 - 11t + 6$$

και άρα από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε:

$$\begin{aligned} P_A(A) = 0 &\implies -A^3 + 6A^2 - 11A + 6I_3 = 0 \\ &\implies A^3 - 6A^2 + 11A = 6I_3 \\ &\implies A\left(\frac{1}{6}(A^2 - 6A + 11I_3)\right) = I_3 \\ &\implies A^{-1} = \frac{1}{6}A^2 - A^2 + \frac{11}{6}I_3 \end{aligned}$$

Επομένως βρήκαμε πολυώνυμα $Q(t) = -t^3 + 6t^2 - 11t + 6$ και $P(t) = \frac{1}{6}t^2 - t + \frac{11}{6}$ έτσι ώστε

$$Q(A) = 0 \quad \text{και} \quad P(A) = A^{-1}$$

Να σημειώσουμε ότι από τον υπολογισμό του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $P_A(t) = -t^3 + 6t^2 - 11t + 6$ γνωρίζουμε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος διότι $|A| = 6$, όπου 6 είναι ο σταθερός όρος του πολυωνύμου $P_A(t)$. ■

Άσκηση 25. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Ναδειχθεί ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί πολυώνυμο $P(t)$ έτσι ώστε:

$$A^{-2} = P(A)$$

(2) Ναδειχθεί ότι

$$A^{2018} - 2A^{2017} = A^2 - 2A$$

Λύση. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A :

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -1 & -1 \\ 0 & -2-t & -1 \\ 0 & 3 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t) \begin{vmatrix} -2-t & -1 \\ 3 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)((-2-t)(2-t) + 3) = (2-t)(t^2 - 1)$$

Επομένως

$$P_A(t) = -(t-2)(t-1)(t+1) = -t^3 + 2t^2 + t - 2 = -(t^3 - 2t^2 - t + 2)$$

Επομένως ο πίνακας A έχει τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές, τις $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, και $\lambda_3 = 2$, και επομένως είναι διαγωνοποιήσιμος. Επειδή ο πίνακας A δεν έχει τον αριθμό 0 ως ιδιοτιμή, έπεται ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Πράγματι έχουμε $|A| = P_A(0) = -2 \neq 0$. Έτσι υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας A^{-1} και επομένως υπάρχουν οι πίνακες $(A^{-1})^n = A^{-n}$, $\forall n \geq 1$.

Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έπεται ότι:

$$0 = P_A(A) = A^3 - 2A^2 - A + 2I_2 \implies A^3 - 2A^2 - A = -2I_2 \implies A\left(-\frac{1}{2}(A^2 - 2A - I_2)\right) = I_2$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= -\frac{1}{2}(A^2 - 2A - I_2) \implies A^{-2} = (A^{-1})^2 = \left(-\frac{1}{2}(A^2 - 2A - I_2)\right)^2 \implies \\ &\implies A^{-2} = \frac{1}{4}(A^4 - 4A^3 + 2A^2 + 4A + I_2) \end{aligned}$$

Επειδή $A^3 = 2A^2 + A - 2I_2$, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} A^4 &= 2A^3 + A^2 - 2A \implies A^4 - 4A^3 + 2A^2 + 4A + I_2 = 2A^3 + A^2 - 2A - 4A^3 + 2A^2 + 4A + I_2 = \\ &= -2A^3 + 3A^2 + 2A + I_2 = -2(2A^2 + A - 2I_2) + 3A^2 + 2A + I_2 = -4A^2 - 2A + 4I_2 + 3A^2 + 2A + I_2 = \\ &= -A^2 + 5I_2 \end{aligned}$$

Επομένως :

$$A^{-2} = \frac{1}{4} (-A^2 + 5I_2) = -\frac{1}{4}A^2 + \frac{5}{4}I_2$$

Άρα θεωρώντας το πολυώνυμο

$$P(t) = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{5}{4}$$

προκύπτει ότι :

$$P(A) = A^{-2}$$

Από τη σχέση $A^3 - 2A^2 - A + 2I_2$ προκύπτει ότι :

$$A^3 - 2A^2 = A - 2I_2 \implies A^4 - 2A^3 = A^2 - 2A \quad (1)$$

Δείχνουμε με επαγωγή ότι, $\forall k \geq 1$:

$$A^{2k} - 2A^{2k-1} = A^2 - 2A \quad (*)$$

Η σχέση (*) είναι προφανώς αληθής αν $k = 1$, και η σχέση (1) δείχνει ότι η ζητούμενη σχέση (*) είναι αληθής αν $k = 2$.

Υποθέτουμε ότι $k > 2$ και ότι η σχέση (*) είναι αληθής. Τότε πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (*) με A^2 προκύπτει ότι :

$$A^{2k+2} - 2A^{2k+1} = A^4 - 2A^3 \xrightarrow{(1)} A^{2(k+1)} - 2A^{2(k+1)-1} = A^2 - 2A$$

δηλαδή η σχέση (*) ισχύει και για $k + 1$. Επομένως η σχέση (*) ισχύει για κάθε $k \geq 2$. Θέτοντας $k = 1009$ στη σχέση (2) έχουμε :

$$A^{2018} - 2A^{2017} = A^2 - 2A$$

Γενικότερα, εργαζόμενοι παρόμοια δείχνουμε ότι, $\forall n \geq 2$:

$$A^{n+1} - 2A^n = \begin{cases} A^2 - 2A, & \text{αν } n : \text{περιττός} \\ A - 2I_2, & \text{αν } n : \text{άρτιος} \end{cases}$$

Άσκηση 26. Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα πραγματικών αριθμών

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a & a-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Είναι ο A διαγωνοποιήσιμος :

Λύση. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A :

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 2-a-t & a & a-3 \\ 1 & -t & -1 \\ 0 & 1 & -1-t \end{vmatrix} = -t^3 - (a-1)t^2 + t + a - 1$$

Επομένως

$$P_A(t) = -(t^2 - 1)(t + (a-1)) = -(t-1)(t+1)(t - (1-a))$$

Εξετάζουμε περιπτώσεις :

1. Αν $1 - a \neq \pm 1$, δηλαδή $a \neq 0$ και $a \neq 2$. Τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t)$ έχει τρεις διακεκριμένες ρίζες, τις 1 , -1 , και $1 - a$. Άρα ο πίνακας A έχει τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές, τις $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, και $\lambda_3 = 1 - a$, και επομένως ο A είναι διαγωνοποιήσιμος. Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ του πίνακα A έχει τις ίδιες ρίζες με το $P_A(t)$, έπεται ότι :

$$Q_A(t) = t^3 + (a-1)t^2 - t + 1 - a$$

και υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

Εύκολα βλέπουμε, επιλύοντας τα αντίστοιχα ομογενή γραμμικά συστήματα, ότι:

$$\mathcal{V}(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathcal{V}(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathcal{V}(1-a) = \left\langle \begin{pmatrix} a^2 - 3a + 3 \\ 2-a \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Επομένως

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & a^2 - 3a + 3 \\ 2 & 0 & 2-a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Έστω $a = 0$. Τότε:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = -(t-1)(t+1)(t-1) = -(t-1)^2(t+1)$$

Το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ του A είναι ένα εκ διαιρετών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, και άρα θα είναι ένα εκ των:

$$(t-1), \quad (t+1), \quad (t-1)(t+1), \quad (t-1)^2, \quad (t-1)^2(t+1)$$

(α) Επειδή

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \neq O \implies Q_A(t) \neq t-1$$

(β) Επειδή

$$A + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq O \implies Q_A(t) \neq t+1$$

(γ) Επειδή

$$(A - I_2)(A + I_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \neq O \implies Q_A(t) \neq (t-1)(t+1)$$

(δ) Επειδή

$$(A - I_2)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \neq O \implies Q_A(t) \neq (t-1)^2$$

Άρα το πολυώνυμο που μένει $(t-1)^2(t+1)$ είναι αναγκαστικά το ελάχιστο πολυώνυμο του A :

$$Q_A(t) = (t-1)^2(t+1)$$

Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A δεν είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων, έπεται ότι ο πίνακας A δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

3. Έστω $a = 2$. Τότε:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = -(t-1)(t+1)(t+1) = -(t+1)^2(t-1)$$

Το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ του A είναι ένα εκ διαιρετών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, και άρα θα είναι ένα εκ των:

$$(t-1), \quad (t+1), \quad (t-1)(t+1), \quad (t+1)^2, \quad (t-1)^2(t+1)$$

(α) Επειδή

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \neq O \implies Q_A(t) \neq t-1$$

(β) Επειδή

$$A + I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq O \implies Q_A(t) \neq t+1$$

(γ) Επειδή

$$(A - I_2)(A + I_2) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \neq O \implies Q_A(t) \neq (t-1)(t+1)$$

(δ) Επειδή

$$(A + I_2)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \neq O \implies Q_A(t) \neq (t+1)^2$$

Άρα το πολυώνυμο που μένει $(t+1)^2(t-1)$ είναι αναγκαστικά το ελάχιστο πολυώνυμο του A :

$$Q_A(t) = (t+1)^2(t-1)$$

Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A δεν είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων, έπεται ότι ο πίνακας A δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

Συνοψίζουμε:

$$Q_A(t) = \begin{cases} t^3 + (a-1)t^2 - t + 1 - a, & \text{αν } a \neq 0, 2 \\ (t-1)^2(t+1), & \text{αν } a = 0 \\ (t+1)^2(t-1), & \text{αν } a = 2 \end{cases}$$

και

$$\text{Ο πίνακας } A \text{ είναι διαγωνοποιήσιμος} \iff a \neq 0, 2$$

και τότε ο A είναι όμοιος με τον διαγώνιο πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Άσκηση 27. Έστω ότι $A \in M_n(\mathbb{K})$ είναι ένας πίνακας τέτοιος ώστε $A^3 = 2A$. Αν ο A είναι πίνακας πραγματικών αριθμών, δηλαδή αν $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ναδειχθεί ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος. Ποιά είναι η διαγώνια μορφή του;

Αν ο A είναι πίνακας ρητών αριθμών, δηλαδή αν $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, είναι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος;

Λύση. Θεωρούμε το πολυώνυμο $Q(t) = t^3 - 2t = t(t^2 - 2)$. Τότε προφανώς θα έχουμε:

$$Q(A) = A^3 - 2A = O \implies Q_A(t) \mid Q(t) \implies Q_A(t) \mid t(t^2 - 2)$$

- (1) Αν $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, τότε, επειδή το πολυώνυμο $t^2 - 2$ είναι ανάγωγο υπεράνω του \mathbb{Q} , και δεν έχει ρίζες στο \mathbb{Q} , έπεται ότι είτε $Q_A(t) = t$ είτε $Q_A(t) = t^2 - 2$ είτε $Q_A(t) = t(t^2 - 2)$. Η μόνη περίπτωση για να έχει το $Q_A(t)$ διακεκριμένες ρίζες στο \mathbb{Q} , είναι η περίπτωση $Q_A(t) = t$ και τότε $A = 0$. Άρα αν $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, τότε ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του \mathbb{Q} αν και μόνον αν $A = 0$.

(2) Υποθέτουμε ότι $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Τότε, $t(t^2 - 2) = t(t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})$ και επομένως το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ είναι ένα εκ των:

$$t, \quad t - \sqrt{2}, \quad t + \sqrt{2}, \quad t(t - \sqrt{2}), \quad t((t + \sqrt{2}), \quad t^2 - 2 = (t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2}), \quad t(t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})$$

Σε κάθε περίπτωση το ελάχιστο πολυώνυμο είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβάθμιων παραγόντων και επομένως ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του \mathbb{R} .

Επειδή ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, η πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής είναι ίση με την διάσταση του αντίστοιχου ιδιοχώρου και επομένως η πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής συμπίπτει με το πλήθος των εμφανίσεών της στον διαγώνιο πίνακα ο οποίος είναι όμοιος με τον A . Επειδή η διάσταση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(\lambda)$ συμπίπτει με τη διάσταση του χώρου των λύσεων $\Lambda(\Sigma(\lambda))$, όπου $\Sigma(\lambda)$ είναι το ομογενές γραμμικό σύστημα $(A - \lambda I_n)X = O$, έπεται ότι: $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}(\lambda) = n - \mathbf{r}(A - \lambda I_n)$.

Επομένως θα έχουμε:

- (α) Αν $Q_A(t) = t$, τότε $A = O$ και η διαγώνια μορφή του πίνακα είναι ο μηδενικός πίνακας O και άρα η μόνη ιδιοτιμή 0 εμφανίζεται n φορές.
- (β) Αν $Q_A(t) = t - \sqrt{2}$, τότε $A = \sqrt{2}I_n$ και η διαγώνια μορφή του πίνακα είναι ο διαγώνιος πίνακας $\sqrt{2}I_n$, όπου η ιδιοτιμή $\sqrt{2}$ εμφανίζεται n φορές.
- (γ) Αν $Q_A(t) = t + \sqrt{2}$, τότε $A = -\sqrt{2}I_n$ και η διαγώνια μορφή του πίνακα είναι ο διαγώνιος πίνακας $-\sqrt{2}I_n$, όπου η ιδιοτιμή $-\sqrt{2}$ εμφανίζεται n φορές.
- (δ) Αν $Q_A(t) = t(t - \sqrt{2})$, τότε $A^2 = A\sqrt{2}I_n$ και στη διαγώνια μορφή του πίνακα A , η ιδιοτιμή 0 εμφανίζεται $n - \mathbf{r}(A)$ φορές και η ιδιοτιμή $\sqrt{2}$ εμφανίζεται $\mathbf{r}(A)$ φορές.
- (ε) Αν $Q_A(t) = t(t + \sqrt{2})$, τότε $A^2 = -A\sqrt{2}I_n$ και στη διαγώνια μορφή του πίνακα A η ιδιοτιμή 0 εμφανίζεται $n - \mathbf{r}(A)$ φορές και η ιδιοτιμή $-\sqrt{2}$ εμφανίζεται $\mathbf{r}(A)$ φορές.
- (ς) Αν $Q_A(t) = (t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})$, τότε $A^2 = 2I_n$ και στη διαγώνια μορφή του πίνακα A η ιδιοτιμή $\sqrt{2}$ εμφανίζεται $n - \mathbf{r}(A - \sqrt{2}I_2)$ φορές και η ιδιοτιμή $-\sqrt{2}$ εμφανίζεται $\mathbf{r}(A + \sqrt{2}I_2)$ φορές.
- (ζ) Αν $Q_A(t) = t(t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})$, τότε $A^3 = 2A$ και στη διαγώνια μορφή του πίνακα A , η ιδιοτιμή 0 εμφανίζεται $n - \mathbf{r}(A)$ φορές, η ιδιοτιμή $\sqrt{2}$ εμφανίζεται $n - \mathbf{r}(A - \sqrt{2}I_2)$ φορές, και η ιδιοτιμή $-\sqrt{2}$ εμφανίζεται $n - \mathbf{r}(A + \sqrt{2}I_2)$ φορές. ■

Άσκηση 28. Έστω A ένας 4×4 πίνακας πραγματικών αριθμών για τον οποίο ισχύουν τα εξής:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του A .

Λύση. Θεωρούμε τον πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

και θέτουμε:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Εύκολα υπολογίζουμε ότι $|B| = -6 \neq 0$ και άρα ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος. Επομένως το σύνολο $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ αποτελεί βάση του \mathbb{R}_4 και ιδιαίτερα έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 : \text{ιδιοδιάνυσμα του } A \text{ με αντίστοιχη ιδιοτιμή } \lambda_1 = 0 \text{ διότι: } A \cdot E_1 = 0 \cdot E_1 \\ E_2 : \text{ιδιοδιάνυσμα του } A \text{ με αντίστοιχη ιδιοτιμή } \lambda_2 = -1 \text{ διότι: } A \cdot E_2 = -1 \cdot E_2 \\ E_3 : \text{ιδιοδιάνυσμα του } A \text{ με αντίστοιχη ιδιοτιμή } \lambda_3 = 2 \text{ διότι: } A \cdot E_3 = 2 \cdot E_3 \\ E_4 : \text{ιδιοδιάνυσμα του } A \text{ με αντίστοιχη ιδιοτιμή } \lambda_3 = 2 \text{ διότι: } A \cdot E_4 = 2 \cdot E_4 \end{array} \right.$$

Επειδή η βάση $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του πίνακα A έπεται ότι ο A διαγωνοποιείται. Επειδή ο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και το ελάχιστο πολυώνυμο του A έχουν τις ίδιες ρίζες, έπεται ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$Q_A(t) = t(t+1)(t-2)$$

Τέλος να σημειώσουμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το πίνακα A . Πράγματι έχουμε:

$$\begin{aligned} B^{-1} \cdot A \cdot B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \implies A = B \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot B^{-1} \\ \implies A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε ότι:

- (1) Ένας ενδομορφισμός $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ καλείται *μηδενοδύναμος* αν: $f^m = 0$, για κάποιο $m \geq 1$.
- (2) Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{K})$ καλείται *μηδενοδύναμος* αν: $A^m = 0$, για κάποιο $m \geq 1$.

Άσκηση 29. Έστω \mathcal{E} ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος διάστασης $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$ και $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του \mathcal{E} . Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) Ο f είναι μηδενοδύναμος: $f^m = 0$, για κάποιο $m \geq 1$.
- (2) Η μόνη ιδιοτιμή του f είναι η μηδενική.
- (3) $f^n = 0$.
- (4) Το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_f(t)$ του f είναι της μορφής: $Q_f(t) = t^m$, για κάποιο $m \geq 1$.

Λύση. (1) \implies (2) Αν $f^m = 0$, τότε το πολυώνυμο $Q(t) = t^m$ μηδενίζει τον f και άρα διαιρείται από το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_f(t)$. Προφανώς τότε το ελάχιστο πολυώνυμο της f είναι της μορφής $Q_f(t) = t^k$, για κάποιο $k \leq m$, του οποίου η μοναδική ρίζα είναι η $\lambda = 0$. Επειδή οι ρίζες του ελαχίστου πολυωνύμου είναι οι ιδιοτιμές της f έπεται ότι η μόνη ιδιοτιμή του f είναι η μηδενική.

(2) \implies (3) Αν η μόνη ιδιοτιμή του f είναι η μηδενική, τότε προφανώς το ελάχιστο πολυώνυμο του f θα είναι της μορφής $Q_f(t) = t^m$ για κάποιο $1 \leq m \leq n$. Επειδή το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο έχουν τις ίδιες ρίζες, έπεται ότι $P_f(t) = (-1)^n t^n$. Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton θα έχουμε: $0 = P_f(f) = (-1)^n f^n$ και άρα $f^n = 0$.

(3) \implies (4) Αν $f^n = 0$, τότε το πολυώνυμο $Q(t) = t^n$ μηδενίζει τον f και άρα διαιρείται το από το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_f(t)$ της f . Προφανώς τότε $Q_f(t) = t^m$ για κάποιο $1 \leq m \leq n$.

(4) \implies (1) Αν το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_f(t)$ είναι της μορφής $Q_f(t) = t^m$, για κάποιο $m \geq 1$, τότε $0 = Q_f(f) = f^m$. ■

Άσκηση 30. Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$ ένας τετραγωνικός πίνακας. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) Ο A είναι μηδενοδύναμος: $A^m = O$, για κάποιο $m \geq 1$.
- (2) Η μόνη ιδιοτιμή του A είναι η μηδενική.
- (3) $A^n = O$.
- (4) Το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ είναι της μορφής: $Q_A(t) = t^m$, για κάποιο $m \geq 1$.

Λύση. Η λύση προκύπτει χρησιμοποιώντας τον ενδομορφισμό $f_A: \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_n$, $f_A(X) = AX$, την Άσκηση 29, και τα γνωστά μας αποτελέσματα: (α) Ο πίνακας του f_A στην κανονική βάση του \mathbb{K}_n είναι ο A , (β) $A^m = O$ αν και μόνον αν $f_A^m = 0$, (γ) οι ιδιοτιμές του A συμπίπτουν με τις ιδιοτιμές του f_A , και (δ) το ελάχιστο πολυώνυμο του f_A συμπίπτει με το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα της σε τυχούσα βάση του \mathbb{K}_n . ■

Άσκηση 31. Αν $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Τότε οι πίνακες AB και BA έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$$

Λύση. • Πρώτη Περίπτωση: Ένας εκ των πινάκων A, B είναι αντιστρέψιμος. Έστω ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Τότε:

$$BA = A^{-1}ABA = A^{-1}(AB)A$$

και επομένως οι πίνακες AB και BA είναι όμοιοι. Επειδή όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, έπεται ότι: $P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$. Παρόμοια αν ο B είναι αντιστρέψιμος, τότε $AB = B^{-1}BAB = B^{-1}(BA)B$, δηλαδή οι πίνακες AB και BA είναι όμοιοι και άρα $P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$.

• Δεύτερη Περίπτωση: Υποθέτουμε ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος. Τότε η βαθμίδα του είναι $r(A) := r < n$. Από την Γραμμική Άλγεβρα I γνωρίζουμε ότι ο A είναι ισοδύναμος με τον πίνακα

$$\tilde{I}_r := \begin{pmatrix} I_r & O_{r \times n-r} \\ O_{n-r \times r} & O_{n-r \times n-r} \end{pmatrix}$$

Δηλαδή υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $Q_1, P_1 \in M_n(\mathbb{K})$ έτσι ώστε:

$$Q_1 A P_1 = \tilde{I}_r$$

Θέτοντας $Q = Q_1^{-1}$ και $P := P_1^{-1}$ θα έχουμε τότε:

$$A = Q \tilde{I}_r P \tag{3}$$

Θεωρούμε τον πίνακα $C := PBQ$ τον οποίο τον χωρίζουμε σε υποπίνακες:

$$C = PBQ = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

όπου

$$C_{11} \in M_r(\mathbb{K}), \quad C_{12} \in M_{r \times n-r}(\mathbb{K}), \quad C_{21} \in M_{n-r \times r}(\mathbb{K}), \quad C_{22} \in M_{n-r}(\mathbb{K})$$

και τότε

$$B = P^{-1} C Q^{-1} = P^{-1} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Επομένως:

$$AB = AP^{-1} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} Q^{-1} = Q \tilde{I}_r P P^{-1} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} Q^{-1} = Q \tilde{I}_r \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι:

$$\tilde{I}_r \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ O_{r \times r} & O_{n-r \times n-r} \end{pmatrix}$$

και επομένως θα έχουμε:

$$AB = Q \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ O_{r \times r} & O_{n-r \times n-r} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Δηλαδή ο πίνακας AB είναι όμοιος με τον πίνακα

$$M = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ O_{r \times r} & O_{n-r \times n-r} \end{pmatrix}$$

Επίσης:

$$BA = P^{-1}CQ^{-1}A = P^{-1} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} Q^{-1} Q\tilde{I}_r P = P^{-1} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \tilde{I}_r P$$

Εύκολα βλέπουμε ότι:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \tilde{I}_r = \begin{pmatrix} C_{11} & O_{r \times n-r} \\ C_{21} & O_{n-r \times n-r} \end{pmatrix}$$

Άρα θα έχουμε

$$BA = P^{-1} \begin{pmatrix} C_{11} & O_{r \times n-r} \\ C_{21} & O_{n-r \times n-r} \end{pmatrix} P$$

Δηλαδή ο πίνακας BA είναι όμοιος με τον πίνακα

$$N = \begin{pmatrix} C_{11} & O_{r \times n-r} \\ C_{21} & O_{n-r \times n-r} \end{pmatrix}$$

Επειδή όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα έχουμε

$$P_{AB}(t) = P_M(t)$$

$$P_{BA}(t) = P_N(t)$$

Όμως:

$$P_M(t) = \begin{vmatrix} C_{11} - tI_r & C_{12} \\ O_{n-r \times n-r} - tI_{n-r \times n-r} & C_{21} \end{vmatrix} = (-1)^{n-r} P_{C_{11}}(t)$$

και

$$P_N(t) = \begin{vmatrix} C_{11} - tI_r & O_{r \times n-r} \\ C_{21} & O_{n-r \times n-r} - tI_{n-r \times n-r} \end{vmatrix} = (-1)^{n-r} P_{C_{11}}(t)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι $P_M(t) = P_N(t)$ και επομένως

$$P_{AB}(t) = P_{BA}(t) \quad \blacksquare$$

Άσκηση 32. Έστω \mathcal{E} ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, και έστω $f, g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ δύο ενδομορφισμοί του \mathcal{E} . Τότε οι ενδομορφισμοί $f \circ g$ και $g \circ f$ έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$P_{f \circ g}(t) = P_{g \circ f}(t)$$

Λύση. Έστω \mathcal{B} μια βάση του \mathcal{E} και $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ και $B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g)$. Τότε από την Άσκηση 31 έχουμε: $P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$. Επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μιας γραμμικής απεικόνισης συμπίπτει με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακά της σε τυχούσα βάση, έπεται ότι:

$$P_f(t) = P_A(t) \quad \text{και} \quad P_g(t) = P_B(t)$$

Επειδή ο πίνακας της $f \circ g$ στην βάση \mathcal{B} είναι ο AB , δηλαδή $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f \circ g) = AB$, και ο πίνακας της $g \circ f$ στην βάση \mathcal{B} είναι ο BA , δηλαδή $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g \circ f) = BA$, θα έχουμε:

$$P_{f \circ g}(t) = P_{AB}(t) = P_{BA}(t) = P_{g \circ f}(t) \quad \blacksquare$$

Άσκηση 33. Έστω A ένας 2×2 πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} και υποθέτουμε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι 3 και -1 . Έστω $n \geq 0$. Να βρεθεί ο πίνακας A^n , $\forall n \in \mathbb{Z}$, συναρτήσσει των πινάκων A και I_2 , σε δύο μέρη:

- (1) Να βρεθούν αριθμοί $a_n, b_n \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $A^{n+1} = a_n A + b_n I_2$.
- (2) Να βρεθούν αριθμοί $c_n, d_n \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $A^{-n-1} = c_n A + d_n I_2$.

Λύση. Επειδή οι ιδιοτιμές του A είναι οι αριθμοί 3 και -1 , έπεται ότι το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο θα είναι

$$P_A(t) = (t-3)(t+1) = t^2 - 2t - 3$$

Επειδή ο A έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές, έπεται ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος και άρα είναι όμοιος με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) Προφανώς θα έχουμε:

$$A = 1A + 0I_2 \implies a_0 = 1 \text{ και } b_0 = 0$$

Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έπεται ότι $P_A(A) = O$, και επομένως:

$$P_A(A) = O \implies A^2 - 2A - 3I_2 = O \implies A^2 = 2A + 3I_2 \implies a_1 = 2 \text{ και } b_1 = 3$$

Πολλαπλασιάζοντας την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι:

$$A^2 = 2A + 3I_2 \implies A^3 = 2A^2 + 3A = 2(2A + 3I_2) + 3A = 7A + 6I_2 \implies a_2 = 7 \text{ και } b_2 = 6$$

Υποθέτουμε ότι έχουμε προσδιορίσει τις ακολουθίες αριθμών $\{a_n\}_{n \geq 0}$ και $\{b_n\}_{n \geq 0}$ έτσι ώστε $A^{n+1} = a_n A + b_n I_2$. Τότε:

$$\begin{aligned} a_{n+1}A + b_{n+1}I_2 = A^{n+2} = A \cdot A^{n+1} &= A(a_n A + b_n I_2) = a_n A^2 + b_n A = a_n(2A + 3I_2) + b_n A \implies \\ \implies a_{n+1}A + b_{n+1}I_2 &= (2a_n + b_n)A + 3a_n I_2 \end{aligned} \quad (\dagger)$$

Ισχυρισμός: Οι πίνακες A, I_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του χώρου $M_2(\mathbb{K})$.

Πράγματι αν οι πίνακες A, I_2 είναι γραμμικά εξαρτημένοι, τότε υπάρχουν αριθμοί $(x, y) \neq (0, 0)$ έτσι ώστε $x A + y I_2 = O$. Αν $x = 0$, τότε θα έχουμε $y I_2 = O$ από όπου άμεσα προκύπτει ότι $y = 0$ και αυτό είναι άτοπο διότι $(x, y) \neq (0, 0)$. Άρα $x \neq 0$ και τότε $A = -\frac{y}{x} I_2$ και αυτό σημαίνει ότι $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, όπου $\lambda = -\frac{y}{x}$, ιδιαίτερα έπεται ότι η μόνη ιδιοτιμή του A είναι η λ με πολλαπλότητα ίση με δύο. Αυτό είναι άτοπο διότι ο πίνακας έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές. Επομένως οι πίνακες A, I_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητοι.

Από τη γραμμική ανεξαρτησία των πινάκων A, I_2 και τη σχέση (\dagger) έπεται ότι:

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n \quad \text{και} \quad b_{n+1} = 3a_n \quad (\dagger\dagger)$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{όπου} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad (\dagger\dagger)$$

Τότε θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = B^2 \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = B^3 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \end{pmatrix} = \dots = B^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Θα προσδιορίσουμε την n -οστή δύναμη του πίνακα B . Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B είναι

$$P_B(t) = |B - tI_2| = \begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ 3 & -t \end{vmatrix} = -2t + t^2 - 3 = t^2 - 2t - 3$$

Επειδή $t^2 - 2t - 3 = (t-3)(t+1)$, έπεται ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα B είναι οι αριθμοί $\lambda_1 = 3$ και $\lambda_2 = -1$. Επειδή ο πίνακας B έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές, έπεται ότι ο πίνακας B είναι διαγωνοποιήσιμος.

• Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(3)$, θεωρούμε το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -x + y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases} \implies x = y \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Άρα

$$\mathcal{V}(3) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}_2 \mid x \in \mathbb{K} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

• Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(-1)$, θεωρούμε το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \implies -3x = y \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -3x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Άρα

$$\mathcal{V}(-1) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}_2 \mid x \in \mathbb{K} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι μια βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(3)$ είναι η στήλη $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ και μια βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(-1)$ είναι η στήλη $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Επομένως, θέτοντας

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

αποκτούμε έναν αντιστρέψιμο πίνακα P έτσι ώστε:

$$\begin{aligned} P^{-1}BP &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \implies B = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \implies \\ \implies B^n &= P \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε εύκολα ότι:

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3^{n+1} + (-1)^n & 3^n - (-1)^n \\ 3^{n+1} - 3(-1)^n & 3^n + 3(-1)^n \end{pmatrix}$$

Τότε από τη σχέση (††) προκύπτει ότι:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3^{n+1} + (-1)^n & 3^n - (-1)^n \\ 3^{n+1} - 3(-1)^n & 3^n + 3(-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3^{n+2} + (-1)^{n+1} \\ 3^{n+2} + 3(-1)^n \end{pmatrix}$$

Επομένως:

$$a_n = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{4} \quad \text{και} \quad b_n = \frac{3^{n+1} + 3(-1)^{n-1}}{4}$$

και άρα, $\forall n \geq 0$:

$$\boxed{A^{n+1} = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{4} A + \frac{3^{n+1} + 3(-1)^{n-1}}{4} I_2}$$

(2) Επειδή ο αριθμός 0 δεν είναι ιδιοτιμή του A , έπεται ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Επειδή όπως είδαμε $A^2 - 2A - 3I_2 = O$, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} A^2 - 2A = 3I_2 &\implies A(A - 2I_2) = 3I_2 \implies A\left(\frac{1}{3}A - \frac{2}{3}I_2\right) = I_2 \implies \\ \implies A^{-1} &= \frac{1}{3}A - \frac{2}{3}I_2 = \frac{1}{3}(A - 2I_2) \end{aligned}$$

Τότε:

$$A^{-n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} (A - 2I_2)^{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}} (A - 2I_2)^{n+1} \quad (\star)$$

Άρα αρκεί να υπολογίσουμε την n -οστή δύναμη του πίνακα $C = A - 2I_2$.

Υπολογίζουμε εύκολα ότι:

$$C^2 = -2A + 7I_2$$

Υποθέτουμε ότι έχουμε προσδιορίσει τις ακολουθίες αριθμών $\{c_n\}_{n \geq 0}$ και $\{d_n\}_{n \geq 0}$ έτσι ώστε, $\forall n \geq 2$: $C^n = c_{n-1}A + d_{n-1}I_2$. Τότε:

$$c_0 = 1 \quad \text{και} \quad d_0 = -2 \quad \text{και} \quad c_1 = -2 \quad \text{και} \quad d_1 = 7$$

$$\begin{aligned} c_n A + d_n I_2 = C^{n+1} = C \cdot C^n &= (A - 2I_2)(c_{n-1}A + d_{n-1}I_2) = \dots = d_{n-1}A + (3c_{n-1} - 2d_{n-1}I_2) \\ \implies c_n A + d_n I_2 &= d_{n-1}A + (3c_{n-1} - 2d_{n-1}I_2) \end{aligned}$$

Επειδή όπως είδαμε οι πίνακες A και I_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητοι, έπεται ότι

$$c_{n-1} = d_{n-1} \quad \text{και} \quad d_n = 3c_{n-1} - 2d_{n-1}$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{n-1} \\ d_{n-1} \end{pmatrix} \quad (*)$$

και επομένως, θέτοντας

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} c_{n-1} \\ d_{n-1} \end{pmatrix} = D^2 \begin{pmatrix} c_{n-2} \\ d_{n-2} \end{pmatrix} = D^3 \begin{pmatrix} c_{n-3} \\ d_{n-3} \end{pmatrix} = \dots = D^n \begin{pmatrix} c_0 \\ d_0 \end{pmatrix} = D^n \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (**)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα D είναι το $P_D(t) = t^2 + 2t - 3$ και οι ρίζες του, δηλαδή οι ιδιοτιμές του D , είναι οι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -3$. Προφανώς τότε ο πίνακας D είναι διαγωνοποιήσιμος και άρα είναι όμοιος με τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Εύκολα υπολογίζουμε

$$\mathcal{V}(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{και} \quad \mathcal{V}(-3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Επομένως ο πίνακας $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος, με αντίστροφο τον πίνακα $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, και ικανοποιεί τη σχέση:

$$\begin{aligned} P^{-1}DP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \implies D = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1} \implies D^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}^n P^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 + (-3)^n & 1 - (-3)^n \\ 3 + (-3)^{n+1} & 1 - (-3)^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Άρα

$$D^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 + (-3)^n & 1 - (-3)^n \\ 3 + (-3)^{n+1} & 1 - (-3)^{n+1} \end{pmatrix}$$

και τότε από τη σχέση (**) θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} = D^n \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 + (-3)^n & 1 - (-3)^n \\ 3 + (-3)^{n+1} & 1 - (-3)^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + 3(-3)^n \\ 1 + 3(-3)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Επομένως:

$$c_n = \frac{1 + 3(-3)^n}{4} \quad \text{και} \quad d_n = \frac{1 + 3(-3)^{n+1}}{4}$$

και άρα, $\forall n \geq 0$:

$$A^{-n-1} = \frac{1}{3^{n+1}} C^{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}} (c_n A + d_n I_2) = \frac{1}{3^{n+1}} \left(\frac{1 + 3(-3)^n}{4} A + \frac{1 + 3(-3)^{n+1}}{4} I_2 \right)$$

Επομένως:

$$A^{-n-1} = \frac{1 + 3(-3)^n}{4 \cdot 3^{n+1}} A + \frac{1 + 3(-3)^{n+1}}{4 \cdot 3^{n+1}} I_2$$

■

Άσκηση 34 (Θεώρημα Cayley-Hamilton). Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Αν $P_A(t)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A , ναδειχθεί ότι:

$$P_A(A) = O$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι το

$$P_A(t) = |A - tI_n| = (-1)^n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + a_{n-2} t^{n-2} + \cdots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \quad (\dagger)$$

Θεωρούμε τον πίνακα $A - tI_n$ και τον προσαρτημένο του πίνακα $\text{adj}(A - tI_n)$. Γνωρίζουμε ότι⁵ θα έχουμε τότε την ακόλουθη σχέση μεταξύ πινάκων με στοιχεία πολυώνυμο με συντελεστές από το σώμα \mathbb{K} :

$$(A - tI_n) \cdot \text{adj}(A - tI_n) = |A - tI_n| I_n = \text{adj}(A - tI_n) \cdot (A - tI_n)$$

και επομένως

$$(A - tI_n) \cdot \text{adj}(A - tI_n) = P_A(t) I_n = \text{adj}(A - tI_n) \cdot (A - tI_n)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$A \cdot \text{adj}(A - tI_n) - t \text{adj}(A - tI_n) = P_A(t) I_n \quad (*)$$

Από τον ορισμό του προσαρτημένου πίνακα, τα στοιχεία του $\text{adj}(A - tI_n)$ είναι ελλάσσονες ορίζουσες $(n-1) \times (n-1)$ πινάκων με στοιχεία πολυώνυμο και άρα τα στοιχεία του $\text{adj}(A - tI_n)$ είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $n-1$. Τότε ο πίνακας $\text{adj}(A - tI_n)$ μπορεί να γραφεί ως πολυώνυμο βαθμού το πολύ $n-1$ με συντελεστές $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} :

$$\text{adj}(A - tI_n) = B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + \cdots + B_{n-1} t^{n-1}, \quad B_i \in M_n(\mathbb{K}), \quad 0 \leq i \leq n-1 \quad (**)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (*) και (**) θα έχουμε:

$$A(B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + \cdots + B_{n-1} t^{n-1}) - t(B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + \cdots + B_{n-1} t^{n-1}) = P_A(t) I_n$$

Επομένως με αναγωγή ομοίων όρων προκύπτει ότι:

$$AB_0 + (AB_1 - B_0)t + (AB_2 - B_1)t^2 + \cdots + (AB_{n-1} - B_{n-2})t^{n-1} - B_{n-1}t^n = P_A(t) I_n \quad (\dagger\dagger)$$

Από τις σχέσεις (\dagger) και (\dagger\dagger) τότε, εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβάθμιων όρων, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} AB_0 &= a_0 I_n \\ AB_1 - B_0 &= a_1 I_n \\ AB_2 - B_1 &= a_2 I_n \\ &\vdots \\ AB_{n-1} - B_{n-2} &= a_{n-1} I_n \\ -B_{n-1} &= (-1)^n I_n \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη σχέση με τον πίνακα I_n , τη δεύτερη σχέση με τον πίνακα A , την τρίτη σχέση με τον πίνακα A^2 , \cdots , την τελευταία σχέση με τον πίνακα A^n , και ακολούθως προσθέτοντας τις σχέσεις που προκύπτουν, θα έχουμε:

$$a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_{n-1} A^{n-1} + (-1)^n A^n = O$$

⁵Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε πίνακα A με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} , ισχύει η σχέση

$$A \cdot \text{adj}(A) = |A| I_n = \text{adj}(A) \cdot A$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η παραπάνω σχέση ισχύει και για πίνακες με στοιχεία πολυώνυμο με συντελεστές υπεράνω ενός σώματος.

Επομένως :

$$P_A(A) = O \quad \blacksquare$$

• • • • •

Ταυτόχρονη Διαγωνοποίηση Πινάκων

Η επόμενη ομάδα ασκήσεων **35 - 40** αφορά ταυτόχρονη διαγωνοποίηση ενδομορφισμών και τετραγωνικών πινάκων, με την ακόλουθη έννοια.

- (1) Έστω \mathcal{E} ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f, g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ δύο ενδομορφισμοί του \mathcal{E} . Τότε οι ενδομορφισμοί f και g καλούνται **ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι**, αν υπάρχει βάση \mathcal{C} του \mathcal{E} η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f και του g .
- (2) Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ δύο $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} . Οι πίνακες A, B καλούνται **ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι** αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε :

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \Delta_1 \quad \text{και} \quad P^{-1} \cdot B \cdot P = \Delta_2$$

όπου οι πίνακες Δ_1 και Δ_2 είναι διαγώνιοι. Δηλαδή αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ο οποίος διαγωνοποιεί ταυτόχρονα τους A, B .

Άσκηση 35. Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ δύο $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} . Αν οι πίνακες A, B είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι, τότε ισχύει ότι :

$$AB = BA$$

Λύση. Υποθέτουμε ότι οι πίνακες A, B είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι. Τότε οι πίνακες είναι διαγωνοποιήσιμοι και υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε :

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \Delta_1 \quad \text{και} \quad P^{-1} \cdot B \cdot P = \Delta_2$$

όπου οι πίνακες Δ_1 και Δ_2 είναι διαγώνιοι. Τότε θα έχουμε :

$$P^{-1} \cdot (A \cdot B) \cdot P = P^{-1} \cdot A \cdot B \cdot P = P^{-1} \cdot A \cdot P \cdot P^{-1} \cdot B \cdot P = \Delta_1 \cdot \Delta_2$$

$$P^{-1} \cdot (B \cdot A) \cdot P = P^{-1} \cdot B \cdot A \cdot P = P^{-1} \cdot B \cdot P \cdot P^{-1} \cdot A \cdot P = \Delta_2 \cdot \Delta_1$$

Επειδή προφανώς διαγώνιοι πίνακες μετατίθενται, θα έχουμε $\Delta_1 \cdot \Delta_2 = \Delta_2 \cdot \Delta_1$. Τότε

$$P^{-1} \cdot (A \cdot B) \cdot P = P^{-1} \cdot (B \cdot A) \cdot P \implies (A \cdot B) \cdot P = (B \cdot A) \cdot P \implies A \cdot B = B \cdot A \quad \blacksquare$$

Άσκηση 36. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός, όπου $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$. Υποθέτουμε ότι

$$\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \quad \text{και} \quad f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$$

Θεωρούμε τον επαγόμενο ενδομορφισμό $f_{\mathcal{V}} = f|_{\mathcal{V}}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, όπου $f|_{\mathcal{V}}$ είναι ο περιορισμός του f στον υπόχωρο \mathcal{V} .

- (1) Να δειχθεί ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_{f_{\mathcal{V}}}(t)$ του $f_{\mathcal{V}}$ διαιρεί το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_f(t)$ του f :

$$Q_{f_{\mathcal{V}}}(t) \mid Q_f(t)$$

- (2) Να δειχθεί ότι

$$O \text{ } f \text{ είναι διαγωνοποιήσιμος} \implies O \text{ } f_{\mathcal{V}} \text{ είναι διαγωνοποιήσιμος}$$

Λύση. (1) Έστω $Q_f(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_{m-1}t^{m-1} + t^m$ το ελάχιστο πολυώνυμο του f , και θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση

$$Q_f(f_V) = a_0 \text{Id}_V + a_1 f_V + \cdots + a_{m-1} (f_V)^{m-1} + (f_V)^m : V \longrightarrow V$$

Τότε, $\forall \vec{v} \in V$: $Q_f(f_V)(\vec{v}) = a_0(\vec{v}) + a_1 f_V(\vec{v}) + \cdots + a_{m-1} (f_V)^{m-1}(\vec{v}) + (f_V)^m(\vec{v})$. Επειδή $f_V(\vec{v}) = f(\vec{v})$, $\forall \vec{v} \in V$, έπεται ότι θα έχουμε: $Q_f(f_V)(\vec{v}) = a_0(\vec{v}) + a_1 f(\vec{v}) + \cdots + a_{m-1} f^{m-1}(\vec{v}) + f^m(\vec{v}) = (a_0 \text{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_{m-1} f^{m-1} + f^m)(\vec{v}) = Q_f(f)(\vec{v}) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο $Q_f(t)$ μηδενίζει την f_V . Τότε όμως το $Q_f(t)$ θα διαιρείται από το ελάχιστο πολυώνυμο της f_V : $Q_{f_V}(t) \mid Q_f(t)$.

(2) Από το μέρος (1), έχουμε $Q_{f_V}(t) \mid Q_f(t)$. Επειδή ο f είναι διαγωνοποιήσιμος, έπεται ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_f(t)$ του f αναλύεται σε γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων. Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο του f_V είναι διαιρέτης του $Q_f(t)$, έπεται ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_{f_V}(t)$ του f_V αναλύεται σε γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων. Επομένως ο f_V είναι διαγωνοποιήσιμος. ■

Άσκηση 37. Έστω $f: E \longrightarrow E$ ένας ενδομορφισμός, όπου $\dim_{\mathbb{K}} E < \infty$. Υποθέτουμε ότι

$$E = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_k \quad \text{και} \quad f(\mathcal{V}_i) \subseteq \mathcal{V}_i, \quad 1 \leq i \leq k$$

Θεωρούμε τους επαγόμενους ενδομορφισμούς $f_{\mathcal{V}_i}: \mathcal{V}_i \longrightarrow \mathcal{V}_i$, όπου $f_{\mathcal{V}_i} = f|_{\mathcal{V}_i}$ είναι ο περιορισμός του f στον υπόχωρο \mathcal{V}_i . Τότε:

$$O \text{ } f \text{ είναι διαγωνοποιήσιμος} \iff O \text{ } f_{\mathcal{V}_i} \text{ είναι διαγωνοποιήσιμος}, \quad 1 \leq i \leq k$$

Λύση. Αν ο ενδομορφισμός f είναι διαγωνοποιήσιμος, τότε από την Άσκηση 36 έπεται ότι κάθε ενδομορφισμός $f_{\mathcal{V}_i}$ είναι διαγωνοποιήσιμος, $1 \leq i \leq k$.

Αντίστροφα, έστω \mathcal{B}_i μια βάση του \mathcal{V}_i , $1 \leq i \leq k$, η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του $f_{\mathcal{V}_i}$. Από το ορισμό των ενδομορφισμών $f_{\mathcal{V}_i}$, έπεται προφανώς ότι τα διανύσματα κάθε βάσης \mathcal{B}_i είναι και ιδιοδιανύσματα του f . Επειδή το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_k$ είναι ευθύ και μας δίνει τον χώρο E , έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{C} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$$

είναι μια βάση του E η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f . Άρα ο f είναι διαγωνοποιήσιμος. ■

Άσκηση 38. Έστω E ένας \mathbb{K} -διάνυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f, g: E \longrightarrow E$ δύο ενδομορφισμοί του E . Υποθέτουμε ότι οι f και g είναι διαγωνοποιήσιμοι και $f \circ g = g \circ f$. Να δειχθεί ότι υπάρχει βάση \mathcal{C} του E η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f και του g .

Λύση. Επειδή ο g είναι διαγωνοποιήσιμος, όπως γνωρίζουμε θα έχουμε:

$$E = \mathcal{V}_g(\lambda_1) \oplus \mathcal{V}_g(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_g(\lambda_k)$$

όπου $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του g και $\mathcal{V}_g(\lambda_i)$ είναι οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι:

$$\mathcal{V}_g(\lambda_i) = \{\vec{x} \in E \mid g(\vec{x}) = \lambda_i \vec{x}\}, \quad 1 \leq i \leq k$$

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{V}_g(\lambda_i)$. Τότε $g(\vec{x}) = \lambda_i \vec{x}$ και επομένως, $\forall i = 1, 2, \cdots, k$:

$$f(g(\vec{x})) = f(\lambda_i \vec{x}) \implies (f \circ g)(\vec{x}) = \lambda_i f(\vec{x}) \implies (g \circ f)(\vec{x}) = \lambda_i f(\vec{x}) \implies g(f(\vec{x})) = \lambda_i f(\vec{x})$$

Επομένως το διάνυσμα $f(\vec{x}) \in \mathcal{V}_g(\lambda_i)$, και άρα: $f(\mathcal{V}_g(\lambda_i)) \subseteq \mathcal{V}_g(\lambda_i)$. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να περιορίσουμε τον f σε έναν ενδομορφισμό

$$f_i := f|_{\mathcal{V}_g(\lambda_i)} : \mathcal{V}_g(\lambda_i) \longrightarrow \mathcal{V}_g(\lambda_i), \quad f_i(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

Επειδή ο f είναι διαγωνοποιήσιμος, από την Άσκηση 37 έπεται ότι ο ενδομορφισμός f_i είναι διαγωνοποιήσιμο, για κάθε $i = 1, 2, \cdots, k$. Έστω \mathcal{B}_i μια βάση του $\mathcal{V}_g(\lambda_i)$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f_i . Από το ορισμό των ενδομορφισμών f_i , έπεται προφανώς ότι τα διανύσματα κάθε βάσης \mathcal{B}_i είναι και ιδιοδιανύσματα

του f . Επειδή το άθροισμα $\mathcal{V}_g(\lambda_1) + \mathcal{V}_g(\lambda_2) + \dots + \mathcal{V}_g(\lambda_k)$ είναι ευθύ και μας δίνει τον χώρο \mathcal{E} , έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{C} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$$

είναι μια βάση του \mathcal{E} η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f . Επειδή $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{V}_g(\lambda_i)$ έπεται ότι τα διανύσματα κάθε βάσης \mathcal{B}_i είναι και ιδιοδιανύσματα του g . Καταλήγουμε ότι η βάση \mathcal{C} του \mathcal{E} αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f και του g . ■

Η ακόλουθη Άσκηση παρουσιάζει ένα κριτήριο ταυτόχρονης διαγωνοποίησης για ενδομορφισμούς.

Άσκηση 39. Έστω \mathcal{E} ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f, g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ δύο ενδομορφισμοί του \mathcal{E} . Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) Οι f και g είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι.
- (2) Οι f και g είναι διαγωνοποιήσιμοι και: $f \circ g = g \circ f$.

Λύση. (2) \implies (1) Η κατεύθυνση αυτή αποδείχθηκε στην Άσκηση 38.

(1) \implies (2) Έστω ότι οι f και g είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι, δηλαδή υπάρχει βάση

$$\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$$

του \mathcal{E} η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f και του g , τα οποία αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ του f και στις ιδιοτιμές $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ του g . Τότε:

$$(f \circ g)(\vec{e}_i) = f(g(\vec{e}_i)) = f(\mu_i \vec{e}_i) = \mu_i f(\vec{e}_i) = \mu_i \lambda_i \vec{e}_i$$

$$(g \circ f)(\vec{e}_i) = g(f(\vec{e}_i)) = g(\lambda_i \vec{e}_i) = \lambda_i g(\vec{e}_i) = \lambda_i \mu_i \vec{e}_i$$

Επομένως $(f \circ g)(\vec{e}_i) = (g \circ f)(\vec{e}_i)$, για κάθε διάνυσμα \vec{e}_i της βάσης \mathcal{C} . Τότε όμως προφανώς $f \circ g = g \circ f$. ■

Η ακόλουθη Άσκηση παρουσιάζει ένα κριτήριο ταυτόχρονης διαγωνοποίησης για τετραγωνικούς πίνακες.

Άσκηση 40. Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ δύο $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} . Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) Οι πίνακες A και B είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι.
- (2) Οι πίνακες A και B είναι διαγωνοποιήσιμοι και: $AB = BA$.

Λύση. (1) \implies (2) Η κατεύθυνση αυτή αποδείχθηκε στην Άσκηση 35.

(2) \implies (1) Υποθέτουμε ότι οι πίνακες A και B είναι διαγωνοποιήσιμοι και: $AB = BA$. Θεωρούμε τους ενδομορφισμούς

$$f_A, f_B: \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_n, \quad f_A(X) = A \cdot X \quad \text{και} \quad f_B(X) = B \cdot X$$

Επειδή οι πίνακες A και B είναι διαγωνοποιήσιμοι, έπεται ότι και οι ενδομορφισμοί f_A και f_B είναι διαγωνοποιήσιμοι. Επειδή $A \cdot B = B \cdot A$, έπεται άμεσα ότι $f_A \circ f_B = f_B \circ f_A$. Τότε από την Άσκηση 39 έπεται ότι υπάρχει βάση \mathcal{C} του \mathbb{K}_n η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f_A και του f_B . Άρα ο πίνακας του f_A στην \mathcal{C} είναι ένας διαγώνιος πίνακας Δ_1 και ο πίνακας του f_B στην \mathcal{C} είναι ένας διαγώνιος πίνακας Δ_2 . Τότε όμως υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε οι πίνακες $P^{-1} \cdot A \cdot P = \Delta_1$ και $P^{-1} \cdot B \cdot P = \Delta_2$. ■

• • • • •

Αλγόριθμος Τριγωνοποίησης Πίνακα

Οι υπόλοιπες ασκήσεις είναι αφιερωμένες στην τριγωνοποίηση τετραγωνικών πινάκων με βάση τον αλγόριθμο τριγωνοποίησης ο οποίος περιγράφεται στη συνέχεια.

Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$ ένας πίνακας και υποθέτουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές του $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ανήκουν στο σώμα \mathbb{K} , έτσι ώστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A να αναλύεται ως εξής:

$$P_A(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{a_1} (t - \lambda_2)^{a_2} \dots (t - \lambda_k)^{a_k}$$

Έτσι $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A . Τότε όπως γνωρίζουμε ο πίνακας A είναι τριγωνοποιήσιμος. Επομένως υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε:

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \epsilon_{12} & \dots & \epsilon_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \epsilon_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Αλγόριθμος Τριγωνοποίησης του A

1. Επιλέγουμε μια ιδιοτιμή λ_1 του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα-στήλη E_1 :

$$A \cdot E_1 = \lambda_1 E_1$$

και συμπληρώνουμε το ιδιοδιάνυσμα E_1 σε μια βάση

$$\mathcal{B}_1 = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$$

του χώρου των στηλών \mathbb{K}_n .

Θεωρούμε τον αντιστρέψιμο πίνακα

$$P_1 = (E_1 E_2 \dots E_n)$$

ο οποίος σχηματίζεται από τις στήλες της βάσης \mathcal{B}_1 . Τότε ο πίνακας $P_1^{-1} \cdot A \cdot P_1$ έχει την ακόλουθη μορφή:

$$P_1^{-1} \cdot A \cdot P_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * & \dots & * \\ 0 & \boxed{B_1} & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

Ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας B_1 έχει όλες τις ιδιοτιμές του στο \mathbb{K} διότι

$$P_A(t) = P_{P_1^{-1} \cdot A \cdot P_1}(t) = (\lambda_1 - t) P_{B_1}(t)$$

(α) Αν ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας B_1 είναι άνω τριγωνικός, ο αλγόριθμος σταματάει και έχουμε βρει την άνω τριγωνική μορφή του A η οποία είναι ο πίνακας $P^{-1} \cdot A \cdot P$.

(β) Αν ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας B_1 δεν είναι άνω τριγωνικός, τότε προχωρούμε στο επόμενο βήμα:

2. Επιλέγουμε μια ιδιοτιμή λ_2 του B_1 (η οποία εκ' κατασκευής είναι και ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα E'_2):

$$B_1 \cdot E'_2 = \lambda_2 E'_2$$

και συμπληρώνουμε το ιδιοδιάνυσμα E'_2 σε μια βάση

$$\mathcal{B}_2 = \{E'_2, E'_3, \dots, E'_n\}$$

του χώρου των στηλών \mathbb{K}_{n-1} .

Θεωρούμε τον αντιστρέψιμο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακα

$$P_2 = (E'_2 E'_3 \cdots E'_n)$$

ο οποίος σχηματίζεται από τις στήλες της βάσης \mathcal{B}_2 . Τότε ο πίνακας $P_2^{-1} \cdot B_1 \cdot P_2$ θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$P_2^{-1} \cdot B_1 \cdot P_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & * & * & * & \dots & * \\ 0 & \boxed{B_2} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

Ο $(n-2) \times (n-2)$ πίνακας B_2 έχει όλες τις ιδιοτιμές του στο \mathbb{K} διότι

$$P_{B_1}(t) = P_{P_2^{-1} \cdot B_1 \cdot P_2}(t) = (\lambda_2 - t)P_{B_2}(t)$$

(α) Αν ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας B_2 είναι άνω τριγωνικός, ο αλγόριθμος σταματάει και έχουμε βρει την άνω τριγωνική μορφή του A ως εξής:

Θέτουμε

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{P_2} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

Τότε ο πίνακας Q_2 είναι αντιστρέψιμος, διότι $|Q_2| = 1|P_2| = |P_2| \neq 0$, και

$$Q_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{P_2^{-1}} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

Επιπλέον έχουμε:

$$(P_1 Q_2)^{-1} \cdot A(P_1 Q_2) = Q_2^{-1} \cdot (P_1^{-1} \cdot A \cdot P_1) \cdot Q_2 =$$

$$Q_2^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * & \dots & * \\ 0 & \boxed{B_1} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix} \cdot Q_2 =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{P_2^{-1}} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * & \dots & * \\ 0 & \boxed{B_1} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{P_2} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * & \dots & * \\ 0 & \boxed{P_2^{-1} \cdot B_1 \cdot P_2} & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \boxed{B_2} & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & & & \end{pmatrix}$$

Επειδή ο B_2 είναι άνω τριγωνικός, έπεται ότι και ο A είναι άνω τριγωνικός και ο τελευταίος πίνακας, δηλαδή ο πίνακας $(P_1 Q_2)^{-1} \cdot A (P_1 Q_2)$ είναι μια άνω τριγωνική μορφή του A .

(β) Αν ο $(n-2) \times (n-2)$ πίνακας B_2 δεν είναι άνω τριγωνικός, τότε προχωρούμε στο επόμενο βήμα:

3. Το βήμα αυτό είναι η επανάληψη του βήματος 2. για τον $(n-2) \times (n-2)$ πίνακα B_2 .
4. Συνεχίζουμε την παραπάνω διαδικασία η οποία μετά από πεπερασμένο πλήθος βημάτων προφανώς θα μας οδηγήσει στην άνω τριγωνική μορφή του πίνακα A . ■

Ο παραπάνω αλγόριθμος τριγωνοποίησης δείχνει ότι αν ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{K})$ έχει όλες τις ιδιοτιμές του στο σώμα \mathbb{K} , τότε ο A είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα. Αντίστροφα, αν ο πίνακας A είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα τότε προφανώς όλες οι ιδιοτιμές του ανήκουν στο σώμα \mathbb{K} καθώς είναι ακριβώς τα στοιχεία της διαγωνίου της άνω τριγωνικής μορφής του A . Άρα η προηγηθείσα ανάλυση δείχνει ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{K})$ είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα.
- (2) Ο πίνακας A έχει όλες τις ιδιοτιμές του στο σώμα \mathbb{K} .

Άσκηση 41. Θεωρούμε τον ακόλουθο πίνακα πραγματικών αριθμών:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

- (1) Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος;
- (2) Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1} \cdot A \cdot P$ να είναι άνω τριγωνικός.

Λύση. Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A :

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 & 0 \\ 2 & -2-t & 2 \\ 2 & -3 & 2-t \end{vmatrix} = -t \begin{vmatrix} -2-t & 2 \\ -3 & 2-t \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2-t \end{vmatrix} = -t^3$$

Επομένως η μόνη ιδιοτιμή του πίνακα A είναι η $\lambda_A = 0$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 3. Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(0)$ λύνουμε το παρακάτω ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} y = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$

και άρα

$$\mathcal{V}(0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Επομένως ο πίνακας A δεν διαγωνοποιείται διότι

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(0) = 1 \neq 3 = \text{πολλαπλότητα της ιδιοτιμής } \lambda_A = 0$$

Στη συνέχεια, ακολουθώντας τον αλγόριθμο τριγωνοποίησης όπως αυτός περιγράφεται παραπάνω, θα βρούμε αντιστρέψιμο πίνακα P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1} \cdot A \cdot P$ να είναι άνω τριγωνικός. Ξεκινάμε πρώτα συμπληρώνοντας το διάνυσμα της βάσης του $\mathcal{V}(0)$ σε μια βάση του \mathbb{R}_3 . Το σύνολο

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

αποτελεί μια βάση του \mathbb{R}_3 . Θεωρούμε τον αντιστρέψιμο πίνακα

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος σχηματίστηκε από τις στήλες της βάσης \mathcal{B}_1 . Τότε

$$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad P_1^{-1} \cdot A \cdot P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Αφού ο πίνακας $P_1^{-1} \cdot A \cdot P_1$ δεν είναι άνω τριγωνικός συνεχίζουμε τη διαδικασία του αλγόριθμου τριγωνοποίησης. Θεωρούμε το πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

και τότε

$$P_B(t) = \begin{vmatrix} -2-t & 2 \\ -2 & 2-t \end{vmatrix} = t^2$$

Άρα ο πίνακας B έχει ιδιοτιμή την $\lambda_B = 0$ με πολλαπλότητα 2. Να σημειώσουμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα B είναι και ιδιοτιμές του A , και άρα η μόνη ιδιοτιμή του B είναι πράγματι η $\lambda_B = 0$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 2. Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(0)$ λύνουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies y = x$$

και άρα

$$\mathcal{V}(0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2 \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Συνεπώς ο πίνακας B δεν διαγωνοποιείται διότι

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(0) = 1 \neq 2 = \text{πολλαπλότητα της ιδιοτιμής } \lambda_B = 0$$

και άρα συνεχίζουμε τον αλγόριθμο τριγωνοποίησης, δηλαδή συμπληρώνουμε το διάνυσμα της βάσης του $\mathcal{V}(0)$ σε μια βάση του \mathbb{R}_2 . Το σύνολο

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

αποτελεί μια βάση του \mathbb{R}_2 και άρα έχουμε τον αντιστρέψιμο πίνακα

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε υπολογίζουμε:

$$P_2^{-1} \cdot B \cdot P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

δηλαδή ο πίνακας $P_2^{-1} \cdot B \cdot P_2$ είναι άνω τριγωνικός και άρα ο αλγόριθμος τριγωνοποίησης σταματάει. Τέλος υπολογίζουμε την άνω τριγωνική μορφή του πίνακα A . Θέτουμε

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

και τότε έχουμε:

$$(P_1 \cdot Q_2)^{-1} \cdot A \cdot (P_1 \cdot Q_2) = \dots = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως βρήκαμε έναν αντιστρέψιμο πίνακα $P := P_1 \cdot Q_2$ έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1} \cdot A \cdot P$ να είναι άνω τριγωνικός. ■

Άσκηση 42. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 14 & 11 \\ -3 & -5 & -5 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι άνω τριγωνικός.

Λύση. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A :

$$P_A(t) = -(t-1)^3$$

και άρα η μόνη ιδιοτιμή του A είναι η $\lambda = 1$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 3.

Επομένως ο πίνακας A είναι τριγωνοποιήσιμος. Εφαρμόζουμε το Αλγόριθμο Τριγωνοποίησης για να υπολογίσουμε μια άνω τριγωνική μορφή του A :

1. Για την ιδιοτιμή $\lambda = 1$, υπολογίζουμε τον ιδιοχώρο

$$\mathcal{V}(1) = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ -k/2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid k \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

και άρα έβα ιδιοδιάνυσμα του A το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$ είναι το

$$E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Συμπληρώνουμε το E_1 σε μια βάση \mathcal{B}_1 του \mathbb{R}_3 , για παράδειγμα:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Θεωρούμε τον αντιστρέψιμο πίνακα $P_1 = (E_1 E_2 E_3)$:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε τον αντίστροφο του P_1 :

$$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και ακολούθως τον πίνακα $P_1^{-1} \cdot A \cdot P_1$:

$$P_1^{-1} \cdot A \cdot P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1/2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ο 2×2 πίνακας

$$B_1 := \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

δεν είναι άνω τριγωνικός, επομένως προχωρούμε στο επόμενο βήμα :

2. Οι ιδιοτιμές του B_1 είναι οι ιδιοτιμές του A , και άρα η μόνη ιδιοτιμή του B_1 είναι η $\lambda = 1$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 2.

Για την ιδιοτιμή $\lambda = 1$ του 2×2 πίνακα B_1 , υπολογίζουμε τον ιδιοχώρο

$$\mathcal{V}(1) = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ -2k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2 \mid k \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

και άρα ένα ιδιοδιάνυσμα του B_1 το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$ είναι το

$$E'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Συμπληρώνουμε το E'_2 σε μια βάση \mathcal{B}_2 του \mathbb{R}_2 , για παράδειγμα :

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ E'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, E'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Θεωρούμε τον αντιστρέψιμο πίνακα $P_1 = (E'_2 E'_3)$:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε τον αντίστροφο του P_1 :

$$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

και ακολούθως τον πίνακα $P_1^{-1} \cdot A \cdot P_1$:

$$P_1^{-1} \cdot B_1 \cdot P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} := B_2$$

ο οποίος είναι άνω τριγωνικός. Άρα ο αλγόριθμος τριγωνοποίησης σταματάει και μπορούμε να υπολογίσουμε την άνω τριγωνική μορφή ως εξής:

Θέτουμε

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{P_1} & \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την άνω τριγωνική μορφή του πίνακα A ως εξής:

$$(P_1 Q_2)^{-1} \cdot A \cdot (P_1 Q_2) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■