ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

Ασκησεις - Φυλλαδιο 4

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII2020/LAII2020.html

Παρασκευή 3 Απριλίου 2020

Άσκηση 1. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας μονομορφισμός. Ορίζουμε απεικόνιση*

$$\langle\langle , \rangle\rangle\colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle\rangle = \langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle$$

Να δειχθεί ότι το ζεύγος $(\mathcal{E}, \langle\langle , \rangle\rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος.

Λύση. (1) Συμμετρία: Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$. Τότε χρησιμοποιώντας τη συμμετρία του εσωτερικού γινομένου $\langle , \rangle$, θα έχουμε:

$$\langle\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle\rangle = \langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle = \langle f(\vec{y}), f(\vec{x})\rangle = \langle\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle\rangle$$

(2) Διγραμμικότητα: Έστω $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y} \in \mathcal{E}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε χρησιμοποιώντας τη συμμετρία του εσωτερικού γινομένου $\langle , \rangle$ και τη γραμμικότητα του ενδομορφισμού f, θα έχουμε::

$$\langle\langle \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y} \rangle\rangle = \langle f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2), f(\vec{y})\rangle\rangle = \langle f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2), f(\vec{y})\rangle\rangle = \langle f(\vec{x}_1), f(\vec{y})\rangle + \langle f(\vec{x}_2), f(\vec{y})\rangle\rangle =$$

$$= \langle\langle \vec{x}_1, \vec{y} \rangle\rangle + \langle\langle \vec{x}_2, \vec{y} \rangle\rangle$$

Παρόμοια:

$$\langle\langle \lambda\vec{x}, \vec{y} \rangle\rangle = \langle f(\lambda\vec{x}), f(\vec{y})\rangle = \langle \lambda f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle = \lambda\langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle = \lambda\langle\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle\rangle$$

(3) Θετικά Ορισμένο: Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Τότε χρησιμοποιώντας την ιδιότητα θετικού ορισμένου του εσωτερικού νγινομένου $\langle , \rangle$ και ότι ο ενδομορφισμός f είναι μονομορφισμός, θα έχουμε:

$$\langle\langle \lambda\vec{x}, \vec{x} \rangle\rangle = \langle f(\vec{x}), f(\vec{x})\rangle \geq 0$$

$$\langle\langle \lambda\vec{x}, \vec{x} \rangle\rangle = 0 \implies \langle f(\vec{x}), f(\vec{x})\rangle = 0 \implies f(\vec{x}) = \vec{0} \implies \vec{x} = \vec{0}$$

Άρα η απεικόνιση $\langle\langle \, , \, \rangle\rangle$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathcal{E}$ και επομένως το ζεύγος $(\mathcal{E}, \langle\langle , \rangle\rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος. ■

Άσκηση 2. *Έστω η απεικόνιση $\langle \, , \rangle \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως εξής:*

$$\big\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \big\rangle = 5x_1x_2 - 2(x_1y_2 + y_1x_2) + y_1y_2$$

(1) *Να δειχθεί ότι η παραπάνω απεικόνιση ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^2$.*
(2) *Να βρεθούν τα μήκη των διανυσμάτων $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(-1, 2)$ ως προς το παραπάνω το εσωτερικό γινόμενο.*

Λύση. Έστω $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\in\mathbb{R}^2$ και $\lambda\in\mathbb{R}$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle &= 5x_1x_2-2(x_1y_2+y_1x_2)+y_1y_2\\ &= 5x_2x_1-2(x_2y_1+y_2x_1)+y_2y_1\\ &= \langle(x_2,y_2),(x_1,y_1)\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle(x_1,y_1)+(x_2,y_2),(x_3,y_3)\rangle &= \langle(x_1+x_2,y_1+y_2),(x_3,y_3)\rangle\\ &= 5(x_1+x_2)x_3-2((x_1+x_2)y_3+(y_1+y_2)x_3)+(y_1+y_2)y_3\\ &= 5x_1x_3+5x_2x_3-2x_1y_3-2x_2y_3-2y_1x_3-2y_2x_3+y_1y_3+y_2y_3\\ &= 5x_1x_3-2(x_1y_3+y_1x_3)+y_1y_3+5x_2x_3-2(x_2y_3+y_2x_3)+y_2y_3\\ &= \langle(x_1,y_1),(x_3,y_3)\rangle+\langle(x_2,y_2),(x_3,y_3)\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\big\langle\lambda(x_1,y_1),(x_2,y_2)\big\rangle &= \big\langle(\lambda x_1,\lambda y_1),(x_2,y_2)\big\rangle\\ &= 5\lambda x_1x_2-2(\lambda x_1y_2+\lambda y_1x_2)+\lambda y_1y_2\\ &= \lambda(5x_1x_2-2(x_1y_2+y_1x_2)+y_1y_2)\\ &= \lambda\big\langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\big\rangle\end{aligned}$$

$$\big\langle(x_1,y_1),(x_1,y_1)\big\rangle=5x_1^2-2(x_1y_1+y_1x_1)+y_1^2=5x_1^2-4x_1y_1+y_1^2=x_1^2+(2x_1-y_1)^2\geq 0$$

και $\langle(x_1,y_1),(x_1,y_1)\rangle=0$ αν και μόνο αν $x_1=0$ και $2x_1-y_1=0$, δηλαδή $y_1=0$. Άρα η απεικόνιση $\langle\ ,\rangle$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^2$. Τα μήκη των διανυσμάτων $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,3)$, $(-1,2)$ ως προς το παραπάνω το εσωτερικό γινόμενο είναι

$$\|(1,0)\|=\sqrt{\big\langle(1,0),(1,0)\big\rangle}=\sqrt{5\cdot1\cdot1-2(1\cdot0+0\cdot1)+0}=\sqrt{5}$$

$$\|(0,1)\|=\sqrt{\big\langle(0,1),(0,1)\big\rangle}=\cdots=1$$

$$\|(1,3)\|=\sqrt{\big\langle(1,3),(1,3)\big\rangle}=\cdots=\sqrt{2}$$

$$\|(-1,2)\|=\sqrt{\big\langle(-1,2),(-1,2)\big\rangle}=\cdots=\sqrt{17}$$

■

Άσκηση 3. *Έστω $\mathbb{R}_n[t]$ ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων βαθμού $\leq n$, με πραγματικούς συντελεστές. Έστω ότι $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ είναι ανα δύο διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να δειχθεί ότι η σχέση*

$$\langle P(t),Q(t)\rangle=P(\alpha_0)Q(\alpha_0)+P(\alpha_1)Q(\alpha_1)\cdots+P(\alpha_n)Q(\alpha_n)$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}_n[t]$. Να βρεθεί το μήκος καθενός από τα διανύσματα της κανονικής βάσης $\mathcal{B}=\{1,t,t^2,\cdots,t^n\}$ του $\mathbb{R}_n[t]$ ως προς το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο.

Λύση. Έστω $P(t),Q(t),R(t)\in\mathbb{R}_n[t]$ και $\lambda\in\mathbb{R}$.

(1) Θα έχουμε:

$$\begin{gathered}\big\langle P(t)+Q(t),R(t)\big\rangle=(P(t)+Q(t))(\alpha_0)R(\alpha_0)+(P(t)+Q(t))(\alpha_1)R(\alpha_1)+\cdots+(P(t)+Q(t))\alpha_n)R(\alpha_n)=\\ =(P(\alpha_0)+Q(\alpha_0))R(\alpha_0)+(P(\alpha_1)+Q(\alpha_1))R(\alpha_1)+\cdots+(P(\alpha_n)+Q(\alpha_n))R(\alpha_n)=\\ =P(\alpha_0)R(\alpha_0)+P(\alpha_1)R(\alpha_1)\cdots+P(\alpha_n)R(\alpha_n)\ +\ Q(\alpha_0)R(\alpha_0)+Q(\alpha_1)R(\alpha_1)\cdots+Q(\alpha_n)R(\alpha_n)=\\ =\big\langle P(t),R(t)\big\rangle\ +\ \big\langle Q(t),R(t)\big\rangle\end{gathered}$$

(2) Θα έχουμε:

$$\begin{gathered}\big\langle\lambda P(t),Q(t)\big\rangle=(\lambda P(t))(\alpha_0)Q(\alpha_0)+(\lambda P(t))(\alpha_1)Q(\alpha_1)+\cdots+(\lambda P(t))(\alpha_n)Q(\alpha_n)=\\ =\lambda P(\alpha_0)Q(\alpha_0)+\lambda P(\alpha_1)Q(\alpha_1)+\cdots+\lambda P(\alpha_n)Q(\alpha_n)=\\ =\lambda\big(P(\alpha_0)Q(\alpha_0)+P(\alpha_1)Q(\alpha_1)\cdots+P(\alpha_n)Q(\alpha_n)\big)=\lambda\big\langle P(t),Q(t)\big\rangle\end{gathered}$$

(3) Θα έχουμε:

$$\big\langle P(t), Q(t) \big\rangle = P(\alpha_0)Q(\alpha_0) + P(\alpha_1)Q(\alpha_1) + \cdots + P(\alpha_n)Q(\alpha_n) =$$

$$= Q(\alpha_0)P(\alpha_0) + Q(\alpha_1)P(\alpha_1) + \cdots + Q(\alpha_n)P(\alpha_n) = \big\langle Q(t), P(t) \big\rangle$$

(4) Προφανώς:

$$\big\langle P(t), P(t) \big\rangle = P(\alpha_0)P(\alpha_0) + P(\alpha_1)P(\alpha_1) + \cdots + P(\alpha_n)P(\alpha_n) = P(\alpha_0)^2 + P(\alpha_1)^2 + \cdots + P(\alpha_n)^2 \geq 0$$

και αν $\big\langle P(t), P(t) \big\rangle = 0$, τότε θα έχουμε

$$P(\alpha_0)^2 + P(\alpha_1)^2 + \cdots + P(\alpha_n)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad P(\alpha_0) = P(\alpha_1) = \cdots = P(\alpha_n) = 0$$

Επειδή οι αριθμοί $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ είναι ανά δύο διαφορετικοί, έπεται από την παραπάνω σχέση ότι το πολυώνυμο $P(t)$ έχει $n+1$ το πλήθος διαφορετικές ανά δύο ρίζες. Επειδή $P(t) \in \mathbb{R}_n[t]$, έχουμε $\deg P(t) \leq n$ και γνωρίζουμε ότι ένα μη-μηδενικό πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ έχει το πολύ n το πλήθος ρίζες. Άρα αναγκαστικά το πολυώνυμο $P(t)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο: $P(t) = 0$.

Για τα μήκη των διανυσμάτων της κανονικής βάσης $\mathcal{B} = \big\{1, t, t^2, \cdots, t^n\big\}$ του $\mathbb{R}_n[t]$ ως προς το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο, θα έχουμε:

$$\|1\| = \sqrt{\langle 1, 1 \rangle} = \sqrt{1(\alpha_0)1(\alpha_0) + 1(\alpha_1)1(\alpha_1) \cdots + 1(\alpha_n)1(\alpha_n)} = \sqrt{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + \cdots + 1 \cdot 1} = \sqrt{n+1}$$

$$\|t\| = \sqrt{\langle t, t \rangle} = \sqrt{\alpha_0 \cdot \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \alpha_n} = \sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2}$$

$$\|t^2\| = \sqrt{\langle t^2, t^2 \rangle} = \sqrt{\alpha_0^2 \cdot \alpha_0^2 + \alpha_1^2 \cdot \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 \cdot \alpha_n^2} = \sqrt{\alpha_0^4 + \alpha_1^4 + \cdots + \alpha_n^4}$$

$$\vdots$$

$$\|t^n\| = \sqrt{\langle t^n, t^n \rangle} = \sqrt{\alpha_0^n \cdot \alpha_0^n + \alpha_1^n \cdot \alpha_1^n + \cdots + \alpha_n^n \cdot \alpha_n^n} = \sqrt{\alpha_0^{2n} + \alpha_1^{2n} + \cdots + \alpha_n^{2n}}$$

■

Άσκηση 4. *Θεωρούμε τη βάση $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1 = (1,1),\ \vec{\varepsilon}_2 = (1,-1)\}$ του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε ότι η απεικόνιση $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathbb{R}^2$ έτσι ώστε:*

$$\langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_1 \rangle = \langle \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_2 \rangle = 1, \qquad \langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2 \rangle = 0$$

Να υπολογισθούν οι αριθμοί $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle$, όπου $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Λύση. Έστω $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$. Τότε το διάνυσμα $(x_i, y_i) = m(1,1) + n(1,-1)$ αφού το σύνολο $\mathcal{B}$ αποτελεί μια βάση του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$. Έχουμε:

$$(x_i, y_i) = m(1,1) + n(1,-1) = (m+n, m-n) \Longrightarrow \begin{cases} x_i = m+n \\ y_i = m-n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{x_i + y_i}{2} \\[2ex] n = \dfrac{x_i - y_i}{2} \end{cases}$$

και άρα

$$(x_i, y_i) = \frac{x_i + y_i}{2}\, \vec{\varepsilon}_1 + \frac{x_i - y_i}{2}\, \vec{\varepsilon}_2$$

Τότε:

$$\begin{aligned}
\big\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\big\rangle &= \big\langle \frac{x_1+y_1}{2}\vec{\varepsilon}_1+\frac{x_1-y_1}{2}\vec{\varepsilon}_2, \frac{x_2+y_2}{2}\vec{\varepsilon}_1+\frac{x_2-y_2}{2}\vec{\varepsilon}_2\big\rangle\\
&= \big\langle \frac{x_1+y_1}{2}\vec{\varepsilon}_1, \frac{x_2+y_2}{2}\vec{\varepsilon}_1\big\rangle + \big\langle \frac{x_1+y_1}{2}\vec{\varepsilon}_1, \frac{x_2-y_2}{2}\vec{\varepsilon}_2\big\rangle\\
&+ \big\langle \frac{x_1-y_1}{2}\vec{\varepsilon}_2, \frac{x_2+y_2}{2}\vec{\varepsilon}_1\big\rangle + \big\langle \frac{x_1-y_1}{2}\vec{\varepsilon}_2, \frac{x_2-y_2}{2}\vec{\varepsilon}_2\big\rangle\\
&= \frac{x_1+y_1}{2}\cdot\frac{x_2+y_2}{2}\big\langle\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_1\big\rangle + \frac{x_1+y_1}{2}\cdot\frac{x_2-y_2}{2}\big\langle\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2\big\rangle\\
&+ \frac{x_1-y_1}{2}\cdot\frac{x_2+y_2}{2}\big\langle\vec{\varepsilon}_2,\vec{\varepsilon}_1\big\rangle + \frac{x_1-y_1}{2}\cdot\frac{x_2-y_2}{2}\big\langle\vec{\varepsilon}_2,\vec{\varepsilon}_2\big\rangle\\
&= \frac{x_1+y_1}{2}\cdot\frac{x_2+y_2}{2}\cdot 1 + \frac{x_1+y_1}{2}\cdot\frac{x_2-y_2}{2}\cdot 0\\
&+ \frac{x_1-y_1}{2}\cdot\frac{x_2+y_2}{2}\cdot 0 + \frac{x_1-y_1}{2}\cdot\frac{x_2-y_2}{2}\cdot 1\\
&= \frac{x_1+y_1}{2}\cdot\frac{x_2+y_2}{2} + \frac{x_1-y_1}{2}\cdot\frac{x_2-y_2}{2}\\
&= \frac{2x_1x_2+2y_1y_2}{4}\\
&= \frac{x_1x_2+y_1y_2}{2}
\end{aligned}$$

Επομένως δείξαμε ότι για κάθε $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$:

$$\big\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\big\rangle = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{2}$$

■

Άσκηση 5. *Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}_2[t]$ με εσωτερικό γινόμενο, $\forall P(t),Q(t)\in\mathbb{R}_2[t]$:*

$$\langle P(t),Q(t)\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$$

και τα πολυώνυμα

$$P(t)=1,\qquad Q(t)=t-\frac{1}{2},\qquad W(t)=t^2-t+\frac{1}{6}$$

Να υπολογισθούν τα μήκη

$$\|P(t)\|,\quad \|Q(t)\|,\quad \|W(t)\|$$

Λύση. Έχουμε:

$$\|P(t)\| = \|1\| = \sqrt{\langle 1,1\rangle} = \sqrt{\int_0^1 1dt} = 1$$

$$\|Q(t)\| = \|t-\frac{1}{2}\| = \sqrt{\langle t-\frac{1}{2}, t-\frac{1}{2}\rangle} = \sqrt{\int_0^1 (t-\frac{1}{2})^2\,dt} = \sqrt{\int_0^1 t^2\,dt - \int_0^1 t\,dt + \frac{1}{4}\int_0^1 1\,dt}$$

$$= \cdots = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

$$\|W(t)\| = \|t^2 - t + \frac{1}{6}\| = \sqrt{\langle t^2 - t + \frac{1}{6}, t^2 - t + \frac{1}{6}\rangle} = \sqrt{\int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})^2\, dt} = \cdots = \frac{1}{\sqrt{180}} \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 6. *Να υπολογισθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{x} = (1, 0, 1)$, $\vec{y} = (-1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ ως προς το συνήθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$. Ακολούθως να βρεθούν όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ τα οποία είναι κάθετα στα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$.*

Λύση. Έχουμε:

$$\cos\phi = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle}{||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||} = \frac{\langle (1,0,1), (-1,1,0)\rangle}{||(1,0,1)|| \cdot ||(-1,1,0)||} = \frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

Άρα η γωνία των διανυσμάτων $\vec{x} = (1, 0, 1)$ και $\vec{y} = (-1, 1, 0)$ είναι

$$\phi = \frac{2\pi}{3}$$

Έστω $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Τότε:

$$\begin{cases} \langle (1,0,1), (x,y,z)\rangle = 0 \\ \\ \langle (-1,1,0), (x,y,z)\rangle = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x + z = 0 \\ \\ -x + y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -z \\ \\ y = -z \end{cases}$$

Συνεπώς τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ τα οποία είναι κάθετα στα διανύσματα $\vec{x} = (1, 0, 1)$ και $\vec{y} = (-1, 1, 0)$ είναι: $z(-1, -1, 1)$ με $z \in \mathbb{R}$, και άρα είναι τα διανύσματα του υπόχωρου $\langle(-1, -1, 1)\rangle$ ο οποίος παράγεται από το διάνυσμα $(-1, -1, 1)$. $\blacksquare$

Άσκηση 7. *Έστω ότι $(\mathcal{E}_i, \langle,\rangle_i)$, $1 \le i \le n$, είναι Ευκλείδειοι χώροι. Στον R-διανυσματικό χώρο $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \cdots \times \mathcal{E}_n$, ορίζουμε απεικόνιση:*

$$\langle\, ,\, \rangle \colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n),\, (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n)\, \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{y}_1\, \rangle_1 + \langle (\vec{x}_2, \vec{y}_2\, \rangle_2 + \cdots + \langle (\vec{x}_n, \vec{y}_n\, \rangle_n$$

Να δειχθεί ότι το ζεύγος $(\mathcal{E}, \langle,\rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος.

Λύση. Έστω $\vec{x} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)$, $\vec{y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n)$, $\vec{z} = (\vec{z}_1, \vec{z}_2, \cdots, \vec{z}_n)$ διανύσματα του $\mathcal{E}$, και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Χρησιμοποιούμε ότι, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$, η απεικόνιση $\langle,\rangle_i$ είναι εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathcal{E}_i$.

(1) Θα έχουμε:

$$\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z}\rangle = \langle \vec{x}_1 + \vec{y}_1, \vec{x}_2 + \vec{y}_2, \cdots, \vec{x}_n + \vec{y}_n), \vec{z}_1, \vec{z}_2, \cdots, \vec{z}_n))\rangle =$$
$$= \langle \vec{x}_1 + \vec{y}_1, \vec{z}_1\, \rangle_1 + \langle \vec{x}_2 + \vec{y}_2, \vec{z}_2\, \rangle_2 + \cdots + \langle \vec{x}_n + \vec{y}_n, \vec{z}_n\, \rangle_n =$$
$$= \langle \vec{x}_1, \vec{z}_1\, \rangle_1 + \langle \vec{y}_1, \vec{z}_1\, \rangle_1 + \langle \vec{x}_2, \vec{z}_2\, \rangle_2 + \langle \vec{y}_2, \vec{z}_2\, \rangle_2 + \cdots + \langle \vec{x}_n, \vec{z}_n\, \rangle_n + \langle \vec{y}_n, \vec{z}_n\, \rangle_n =$$
$$= \big(\langle \vec{x}_1, \vec{z}_1\, \rangle_1 + \langle \vec{x}_2, \vec{z}_2\, \rangle_2 + \cdots + \langle \vec{x}_n, \vec{z}_n\, \rangle_n\big) + \big(\langle \vec{y}_1, \vec{z}_1\, \rangle_1 + \langle \vec{y}_2, \vec{z}_2\, \rangle_2 + \cdots + \langle \vec{y}_n, \vec{z}_n\, \rangle_n\big) =$$
$$= \langle (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n),\, (\vec{z}_1, \vec{z}_2, \cdots, \vec{z}_n)\, \rangle + \langle (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n),\, (\vec{z}_1, \vec{z}_2, \cdots, \vec{z}_n)\, \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z}\, \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z}\, \rangle$$

(2) Θα έχουμε:

$$\langle \lambda\vec{x}, \vec{y}\, \rangle = \langle \lambda(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n),\, (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n)\, \rangle = \langle (\lambda\vec{x}_1, \lambda\vec{x}_2, \cdots, \lambda\vec{x}_n),\, (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n)\, \rangle =$$
$$= \langle \lambda\vec{x}_1, \vec{y}_1\, \rangle_1 + \langle \lambda\vec{x}_2, \vec{y}_2\, \rangle_2 + \cdots + \langle \lambda\vec{x}_n, \vec{z}_n\, \rangle_n = \lambda\langle \vec{x}_1, \vec{y}_1\, \rangle_1 + \lambda\langle \vec{x}_2, \vec{y}_2\, \rangle_2 + \cdots + \lambda\langle \vec{x}_n, \vec{z}_n\, \rangle_n =$$
$$= \lambda\big(\langle \vec{x}_1, \vec{y}_1\, \rangle_1 + \langle (\vec{x}_2, \vec{y}_2\, \rangle_2 + \cdots + \langle (\vec{x}_n, \vec{y}_n\, \rangle_n\big) = \lambda\langle \vec{x}, \vec{y}\, \rangle$$

(3) Θα έχουμε:

$$\langle \vec{x}, \vec{y}\, \rangle = \langle (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n),\, (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n)\, \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{y}_1\, \rangle_1 + \langle (\vec{x}_2, \vec{y}_2\, \rangle_2 + \cdots + \langle (\vec{x}_n, \vec{y}_n\, \rangle_n =$$
$$= \langle \vec{y}_1, \vec{x}_1\, \rangle_1 + \langle \vec{y}_2, \vec{x}_2\, \rangle_2 + \cdots + \langle \vec{y}_n, \vec{x}_n\, \rangle_n = \langle (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n),\, (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)\, \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x}\, \rangle$$

(4) Θα έχουμε:

$$\langle \vec{x}, \vec{x}\,\rangle = \langle (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n),\, (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)\,\rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_1\,\rangle_1 + \langle (\vec{x}_2, \vec{x}_2\,\rangle_2 + \cdots + \langle (\vec{x}_n, \vec{x}_n\,\rangle_n =$$
$$= \|\vec{x}_1\|_1^2 + \|\vec{x}_2\|_2^2 + \cdots + \|\vec{x}_n\|_n^2 \;\geq\; 0$$

και

$$\langle \vec{x}, \vec{x}\,\rangle = 0 \quad\Longrightarrow\quad \|\vec{x}_1\|_1^2 + \|\vec{x}_2\|_2^2 + \cdots + \|\vec{x}_n\|_n^2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \|\vec{x}_k\|_k^2 = 0,\;\; \forall k = 1, 2, \cdots, n \quad\Longrightarrow$$

όπου η προτελευταία συνεπαγωγή προέκυψε διότι αν ένα άθροισμα μη-αρνητικών αριθμών είναι ίσο με μηδέν, τότε οι αριθμοί είναι ίσοι με μηδέν. Επομένως θα έχουμε[1]:

$$\vec{x}_k = \vec{0},\;\; \forall k = 1, 2, \cdots, n \quad\Longrightarrow\quad \vec{x} = \vec{0} = (\vec{0}, \vec{0}, \cdots, \vec{0})$$

Άρα

$$\langle \vec{x}, \vec{x}\,\rangle = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \vec{x} = \vec{0}$$

Επομένως η απεικόνιση $\langle , \rangle$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathcal{E}$ και επομένως το ζεύγος $(\mathcal{E},\, \langle , \rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος. ■

Παρατήρηση 1. *Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}, \langle , \rangle)$, όπου*

$$\langle , \rangle \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto \langle x, y\rangle = xy$$

Τότε το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, το οποίο προκύπτει με εφαρμογή της Άσκησης 7 είναι το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$.

Ένας συμμετρικός πίνακας $A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ καλείται **θετικά ορισμένος**, αν:

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_n : \qquad {}^tX \cdot A \cdot X \;\geq\; 0, \qquad \text{και} : \quad {}^tX \cdot A \cdot X = 0 \quad\Longrightarrow\quad X = O$$

όπου:

$${}^tX \cdot A \cdot X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

Άσκηση 8. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ μια βάση του $\mathcal{E}$. Θεωρούμε τον πίνακα:*

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \langle \vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_j\rangle, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Αν $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, να δειχθεί ότι:

$$\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = {}^tX \cdot A \cdot Y$$

όπου:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{και} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

είναι οι συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{x}, \vec{y}$ στη βάση $\mathcal{B}$, και ο πίνακας A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

[1] Υπενθυμίζουμε ότι το μηδενικό διάνυσμα σε κάθε διανυσματικό χώρο συμβολίζεται με το ίδιο σύμβολο $\vec{0}$.

Λύση. Θα έχουμε

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{\varepsilon}_i \qquad \text{και} \qquad \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i\vec{\varepsilon}_i$$

Χρησιμοποιώντας τη διγραμμικότητα και τη συμμετρία του εσωτερικού γινομένου καθώς και ότι $\langle\vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_j\rangle = a_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$, θα έχουμε:

$$\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{\varepsilon}_i, \vec{y} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\langle\vec{\varepsilon}_i, \vec{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \left\langle \vec{\varepsilon}_i, \sum_{i=1}^{n} y_j\vec{\varepsilon}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j\langle\vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_iy_ja_{ij}$$

Από την άλλη πλευρά εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό πινάκων ${}^tX \cdot A \cdot Y$ εύκολα βλέπουμε ότι θα έχουμε:

$${}^tX \cdot A \cdot Y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} x_ix_ja_{ij}$$

Επομένως:

$$\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle = {}^tX \cdot A \cdot Y$$

Λόγω της συμμετρίας του εσωτερικού γινομένου, θα έχουμε, $\forall i, j = 1, 2, \cdots, n$:

$$a_{ij} = \langle\vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_j\rangle = \langle\vec{\varepsilon}_j, \vec{\varepsilon}_i\rangle = a_{ji} \quad \Longrightarrow \quad {}^tA = A$$

δηλαδή ο πίνακας A είναι συμμετρικός.

Τέλος επειδή το εσωτερικό γινόμενο είναι θετικά ορισμένο, θα έχουμε, $\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_n$:

$${}^tX \cdot A \cdot X = \langle\vec{x}, \vec{x}\rangle \geq 0$$

όπου $\vec{x} = x_1\vec{\varepsilon}_1 + x_2\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + x_n\vec{\varepsilon}_n$. Επιπλέον

$${}^tX \cdot A \cdot X = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \langle\vec{x}, \vec{x}\rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{x} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad X = O$$

Επομένως ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος. ■

Άσκηση 9. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος και $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ μια βάση του $\mathcal{E}$. Αν $A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$, τότε ορίζουμε απεικόνιση:*

$$\langle , \rangle : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \langle\vec{x}, \vec{y}\rangle = {}^tX \cdot A \cdot Y$$

όπου:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

είναι οι συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{x}, \vec{y}$ στη βάση $\mathcal{B}$. Να δειχθεί ότι η απεικόνιση $\langle , \rangle$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathcal{E}$ αν και μόνον αν ο πίνακας A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

Λύση. (1) Έστω ότι η απεικόνιση $\langle , \rangle$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathcal{E}$. Παρατηρούμε ότι, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$, οι συνιστώσες του διανύσματος $\vec{\varepsilon}_i$ της βάσης $\mathcal{B}$ είναι το διάνυσμα στήλη $E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Επομένως, $\forall i, j = 1, 2, \cdots, n$, θα έχουμε:

$$\langle \vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_j \rangle = {}^tE_i \cdot A \cdot E_j = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{ij}$$

Τότε, σύμφωνα με την Άσκηση 8 έπεται ότι ο πίνακας A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

(2) Αντίστροφα, έστω ότι ο πίνακας A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Έστω $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{E}$ και $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, και έστω

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

οι συνιστώσες των διανυσμάτων $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ στη βάση $\mathcal{B}$. Τότε οι συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{x} + \vec{y}$ και $\lambda \vec{x}$ είναι:

$$X + Y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda X = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Επομένως θα έχουμε:

(α΄)

$$\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = {}^t(X + Y) \cdot A \cdot Z = ({}^tX + {}^tY) \cdot A \cdot Z = ({}^tX \cdot A + {}^tY \cdot A) \cdot Z = {}^tX \cdot A \cdot Z + {}^tY \cdot A \cdot Z = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$$

(β΄)

$$\langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle = {}^t(\lambda X) \cdot A \cdot Y = (\lambda {}^tX) \cdot A \cdot Y = \lambda ({}^tX) \cdot A \cdot Y) = \lambda \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle$$

(γ΄) Όπως και παραπάνω, θα έχουμε, $\forall i, j = 1, 2, \cdots, n$: $a_{ij} = \langle \vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_j \rangle$ και, λαμβάνοντας υπ' όψη την Άσκηση 8, θα έχουμε:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = {}^tX \cdot A \cdot Y = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j a_{ij} \qquad \text{και} \qquad {}^tY \cdot A \cdot X = \sum_{i,j=1}^{n} y_j x_i a_{ji}$$

Επειδή ο πίνακας A είναι συμμετρικός, έπεται ότι, $\forall i, j = 1, 2, \cdots, n$: $a_{ij} = a_{ji}$ και επομένως:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j a_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} y_j x_i a_{ji} = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$$

(δ΄) Επειδή ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένο, θα έχουμε:

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = {}^tX \cdot A \cdot X \geq 0 \quad \text{και} \quad \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \iff {}^tX \cdot A \cdot X = 0 \iff X = O \iff \vec{x} = \vec{0}$$

Άρα η απεικόνιση $\langle , \rangle$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathcal{E}$. ■

Παρατήρηση 2. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος διάστασης n και σταθεροποιούμε μια βάση $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ του $\mathcal{E}$.*

Οι προηγούμενες δύο Ασκήσεις δείχνουν ότι η απεικόνιση

$$\{\text{η απεικόνιση } \langle\, , \,\rangle \text{ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον } \mathcal{E}\} \longmapsto \{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \mid A : \text{ συμμετρικός και θετικά ορισμένος}\}$$

$$\langle\, , \,\rangle \longmapsto A = (\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle)$$

είναι «1-1» και «επί».

Άσκηση 10. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Να εξετασθεί αν η απεικόνιση

$$\langle , \rangle_* \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_* = {}^t X \cdot A \cdot Y$$

όπου $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, *και:*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$. *Αν η απάντηση είναι θετική, τότε:*

(1) *Να προσδιορισθούν τα μήκη, καθώς και οι μεταξύ τους γωνίες, των διανυσμάτων της κανονικής βάσης του* $\mathbb{R}^3$ *ως προς αυτό το εσωτερικό γινόμενο.*

(2) *Να βρεθούν όλα τα διανύσματα* $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ *έτσι ώστε:*

$$\langle (1,1,1), \, (x_1, x_2, x_3) \rangle_* = 0$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A είναι συμμετρικός. Η απεικόνιση $\langle , \rangle_*$ έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_* = \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle_* = {}^t X \cdot A \cdot Y = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2x_2 y_2 + 2x_3 y_2 + 2x_2 y_3 + 5x_3 y_3 \tag{$\dagger$}$$

Έτσι, σύμφωνα με την Άσκηση 9, για να ορίζει εσωτερικό γινόμενο η απεικόνιση $\langle , \rangle_*$, αρκεί ο πίνακας A να είναι θετικά ορισμένος. Θα έχουμε:

$${}^t X \cdot A \cdot X = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2 + 4x_2 x_3 + 5x_3^2$$

Παρατηρούμε ότι:

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2 = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2) + x_3^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 + x_3^2$$

Άρα:

$${}^t X \cdot A \cdot X = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 + x_3^2 \ \geq \ 0$$

και

$${}^t X \cdot A \cdot X = 0 \iff (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 + x_3^2 \ = \ 0 \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \iff x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

Επομένως:

$${}^t X \cdot A \cdot X = 0 \iff X = O$$

Επομένως ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος και άρα η απεικόνιση $\langle , \rangle_*$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathbb{R}^3$.

(1) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, και $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}^3$. Τότε, χρησιμοποιώντας τη σχέση ($\dagger$), θα έχουμε:

$$\|\vec{e}_1\|_*^2 = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle_* = 1 \implies \|\vec{e}_1\|_* = 1$$

$$\|\vec{e}_2\|_*^2 = \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle_* = 2 \implies \|\vec{e}_1\|_* = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{e}_3\|_*^2 = \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle_* = 5 \implies \|\vec{e}_1\|_* = \sqrt{5}$$

Έστω θ_{12} η γωνία των διανυσμάτων $\vec{e}_1$ και $\vec{e}_2$, θ_{13} η γωνία των διανυσμάτων $\vec{e}_1$ και $\vec{e}_3$, και θ_{23} η γωνία των διανυσμάτων $\vec{e}_3$ και $\vec{e}_3$. Γνωρίζουμε ότι η γωνία θ την οποία σχηματίζουν δύο μη-μηδενικά διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ σε έναν Ευκλείδειο χώρο $(\mathcal{E}, \langle\,\rangle)$ ορίζεται μοναδικά από την ακόλουθη σχέση:

$$\langle \vec{x}, \vec{y}\,\rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos\theta$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τη σχέση (†), θα έχουμε:

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2\,\rangle_* = \|\vec{e}_1\| \cdot \|\vec{e}_2\| \cdot \cos\theta_{12} \quad\Longrightarrow\quad 1 = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\theta_{12} \quad\Longrightarrow\quad \cos\theta_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Longrightarrow\quad \theta_{12} = \frac{\pi}{4}$$

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3\,\rangle_* = \|\vec{e}_1\| \cdot \|\vec{e}_3\| \cdot \cos\theta_{13} \quad\Longrightarrow\quad 0 = 1 \cdot \sqrt{5} \cdot \cos\theta_{13} \quad\Longrightarrow\quad \cos\theta_{13} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \theta_{13} = \frac{\pi}{2}$$

$$\langle \vec{e}_2, \vec{e}_3\,\rangle_* = \|\vec{e}_2\| \cdot \|\vec{e}_3\| \cdot \cos\theta_{23} \quad\Longrightarrow\quad 2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos\theta_{23} \quad\Longrightarrow\quad \cos\theta_{23} = \frac{2}{\sqrt{10}} = 0.632 \quad\Longrightarrow\quad \theta_{23} \approx 50.8^\circ$$

(2) Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Τότε θα έχουμε:

$$\langle (x_1, x_2, x_3),\ (1,1,1)\rangle = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x_1 + x_2 + x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0$$

Επομένως το σύνολο διανυσμάτων $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ τα οποία είναι κάθετα, ως προς το εσωτερικό γινόμενο $\langle\,,\rangle_*$, προς το διάνυσμα $(1,1,1)$, συμπίπτει με τον ακόλουθο υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{V} = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0\big\}$$ ■

Άσκηση 11. *Να εξετασθεί αν απεικόνιση*

$$\langle\ ,\rangle_*\ :\ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle_* = -x_2y_1 + x_3y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 + x_3y_3$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$.

Λύση. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, και $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}^3$ και σχηματίζουμε τον πίνακα:

$$A = (\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j\rangle) = \begin{pmatrix} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1\rangle & \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle & \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3\rangle \\ \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1\rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2\rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3\rangle \\ \langle \vec{e}_3, \vec{e}_1\rangle & \langle \vec{e}_3, \vec{e}_2\rangle & \langle \vec{e}_3, \vec{e}_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε θα έχουμε:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle_* = {}^tX \cdot A \cdot Y = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = -x_2y_1 + x_3y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 + x_3y_3$$

Σύμφωνα με την Άσκηση 9 η απεικόνιση $\langle\ ,\rangle_*$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathbb{R}^3$ αν και μόνον αν ο πίνακας A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A είναι συμμετρικός. Επιπλέον:

$$\begin{aligned} {}^tX \cdot A \cdot X &= 2x_1x_3 - 2x_1x_2 + x_3^2 = x_3^2 + 2x_1x_3 + x_1^2 - x_1^2 - 2x_1x_2 = \\ &= (x_1 + x_3)^2 - (x_1^2 + 2x_1x_2) = (x_1 + x_3)^2 + x_2^2 - (x_1 + x_2)^2 \end{aligned}$$

Για το διάνυσμα $\vec{x} = (1,1,0)$ θα έχουμε:

$$\langle (1,1,0), (1,1,0)\rangle_* = {}^tX \cdot A \cdot X = (1+0)^2 + 1^2 - (1^2 + 1^2)^2 = 1 + 1 - 4 = -2 \,<\, 0$$

Επομένως η απεικόνιση $\langle\ ,\rangle_*$ δεν είναι θετικά ορισμένη και άρα δεν ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathbb{R}^3$. ■

Άσκηση 12. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle\,\rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος.*

(1) *Αν $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, να δειχθεί ότι: $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| \iff \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}\,\rangle = 0$. Ποιά είναι η γεωμετρική ερμηνεία της ισοδυναμίας;*

(2) *Αν $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, να δειχθεί ότι:*

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| \quad \Longleftrightarrow \quad \forall a, b \in \mathbb{R}: \quad \|a\vec{x} + b\vec{y}\| = \|b\vec{x} + a\vec{y}\|$$

(3) *Αν $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, να δειχθεί ότι:*

$$\big|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\big| \ \leq \ \|\vec{x} - \vec{y}\| \ \leq \ \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

Ποιά είναι η γεωμετρική ερμηνεία της ανισότητας;

(4) *Έστω ότι $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ένας ενδομορφισμός, όπου $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} < \infty$, έτσι ώστε $\|f(\vec{x})\| \leq \|\vec{x}\|$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$.*
(α΄) *Να δειχθεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $|\lambda| > 1$, ο ενδομορφισμός $f - \lambda \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$ του $\mathcal{E}$ είναι αντιστρέψιμος.*
(β΄) *Να δειχθεί ότι αν λ είναι μια ιδιοτιμή του f, $|\lambda| \leq 1$.*

Λύση. (1) Θα έχουμε:

$$\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}\, \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x}\, \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y}\, \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x}\, \rangle - \langle \vec{y}, \vec{y}\, \rangle = \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2$$

και άρα, χρησιμοποιώντας ότι, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$: $\|\vec{x}\| \geq 0$, θα έχουμε:

$$\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}\, \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|\vec{x}\|^2 = \|\vec{y}\|^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$$

Θεωρούμε στο επίπεδο ένα παραλληλόγραμμο με πλευρές τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$. Τότε τα διανύσματα $\vec{x} + \vec{y}$ και $\vec{x} - \vec{y}$ είναι οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου. Τότε η αποδειχθείσα ισοδυναμία εκφράζει τη γεωμετρική ιδιότητα ότι οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου είναι κάθετες αν και μόνον αν το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος (δηλαδή όλες οι πλευρές του είναι ίσες).

(2) Αν ισχύει ότι, $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $|a\vec{x} + b\vec{y}\| = \|b\vec{x} + a\vec{y}\|$, τότε επιλέγοντας $a = 1$ και $b = 0$, έπεται ότι $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$.
Αντίτροφα, έστω ότι $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$. Επειδή:

$$\|a\vec{x} + b\vec{y}\|^2 = \langle a\vec{x} + b\vec{y}, a\vec{x} + b\vec{y}\, \rangle = a^2 \langle \vec{x}, \vec{x}\, \rangle + 2ab\langle \vec{x}, \vec{y}\, \rangle + b^2 \langle \vec{y}, \vec{y}\, \rangle = a^2\|\vec{x}\|^2 + 2ab\langle \vec{x}, \vec{y}\, \rangle + b^2\|\vec{y}\|^2$$

και

$$\|b\vec{x} + a\vec{y}\|^2 = \langle b\vec{x} + a\vec{y}, b\vec{x} + a\vec{y}\, \rangle = b^2 \langle \vec{x}, \vec{x}\, \rangle + 2ab\langle \vec{x}, \vec{y}\, \rangle + a^2 \langle \vec{y}, \vec{y}\, \rangle = b^2\|\vec{x}\|^2 + 2ab\langle \vec{x}, \vec{y}\, \rangle + a^2\|\vec{y}\|^2$$

έπεται ότι $\|a\vec{x} + b\vec{y}\|^2 = \|b\vec{x} + a\vec{y}\|^2$ και επομένως: $\|a\vec{x} + b\vec{y}\| = \|b\vec{x} + a\vec{y}\|$.

(3) Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, θα έχουμε:

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{x} - \vec{y} + \vec{y}\| \ \leq \ \|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y}\| \quad \Longrightarrow \quad \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \ \leq \ \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

$$\|\vec{y}\| = \|\vec{y} - \vec{x} + \vec{x}\| \ \leq \ \|\vec{y} - \vec{x}\| + \|\vec{x}\| = \|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{x}\| \quad \Longrightarrow \quad \|\vec{y}\| - \|\vec{x}\| \ \leq \ \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

Από τις παραπάνω ανισότητες προκύπτει ότι:

$$\big|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\big| \ \leq \ \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

Τέλος από την τριγωνική ανισότητα, έπεται ότι:

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{x} + (-\vec{y})\| \ \leq \ \|\vec{x}\| + \| - \vec{y}\| \ \leq \ \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

Άρα:

$$\big|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\big| \ \leq \ \|\vec{x} - \vec{y}\| \ \leq \ \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

Θεωρούμε στο επίπεδο ένα τρίγωνο με πλευρές τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$ και $\vec{x} - \vec{y}$. Τότε οι παραπάνω ανισότητες εκφράζουν τη γεωμετρική ιδιότητα ότι το μήκος μιας πλευρά ενός τριγώνου είναι μικρότερο ή ίσο από το άθροισμα των μηκών των δύο άλλων πλευρών και μεγαλύτερο ή ίσο από την απόλυτη τιμή της διαφοράς τους.

(4) (α΄) Έστω $\vec{x} \in \mathsf{Ker}(f - \lambda \mathsf{Id}_{\mathcal{E}})$. Τότε $(f - \lambda \mathsf{Id}_{\mathcal{E}})(\vec{x}) = \vec{0}$ και άρα $f(\vec{x}) - \lambda\vec{x} = \vec{0}$, δηλαδή: $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.
Από την υπόθεση τότε θα έχουμε:

$$f(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \quad \Longrightarrow \quad \|f(\vec{x})\| \leq \|\vec{x}\| \quad \Longrightarrow \quad \|\lambda\vec{x}\| \leq \|\vec{x}\| \quad \Longrightarrow \quad |\lambda|\|\vec{x}\| \leq \|\vec{x}\| \quad \Longrightarrow \quad (1 - |\lambda|)\|\vec{x}\| \geq 0$$

Αν $\vec{x} \neq \vec{0}$, τότε $\|\vec{x}\| \neq 0$ και άρα $\|\vec{x}\| > 0$. Επειδή $|\lambda| > 1$, έπεται ότι $1 - |\lambda| < 0$ και άρα $(1 - |\lambda|)\|\vec{x}\| < 0$ και αυτό είναι άτοπο από την παραπάνω σχέση. Άρα $\vec{x} = \vec{0}$ και επομένως $\mathsf{Ker}(f - \lambda \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}) = \big\{\vec{0}\big\}$, δηλαδή ο ενδομορφισμός $f - \lambda \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$ του $\mathcal{E}$ είναι μονομορφισμός. Επειδή $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} < \infty$, έπεται ότι ο ενδομορφισμός $f - \lambda \mathsf{Id}_{\mathcal{E}}$ του $\mathcal{E}$ είναι ισομορφισμός.

(β') Έστω ότι λ είναι ιδιοτιμή του f με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\vec{x}$. Τότε $\vec{x} \neq \vec{0}$ και $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, δηλαδή $(f - \lambda \mathsf{Id}_{\mathcal{E}})(\vec{x}) = \vec{0}$. Αυτό σημαίνει ότι $\mathsf{Ker}(f - \lambda \mathsf{Id}_{\mathcal{E}})) \neq \{\vec{0}\}$, δηλαδή ο ενδομορφισμός $f - \lambda \mathsf{Id}_{\mathcal{E}})$ του $\mathcal{E}$ δεν είναι ισομορφισμός. Τότε επειδή $\|\vec{x}\| \neq 0$ και, όπως παραπάνω, έχουμε $(1-|\lambda|)\|\vec{x}\| \geq 0$, έπεται ότι $1 - |\lambda| > 0$, δηλαδή $|\lambda| < 1$. ■

Ένας **μετρικός χώρος** είναι ένα ζεύγος (E, d) αποτελούμενο από ένα μη-κενό σύνολο X και από μια απεικόνιση

$$\mathsf{d}\colon E \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto \mathsf{d}(x, y)$$

έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες:

(1) $\forall x, y \in E\colon\ \mathsf{d}(x, y) \geq 0.$ (Μη-αρνητικότητα)
(2) $\mathsf{d}(x, y) = 0 \iff x = y.$
(3) $\forall x, y \in E\colon\ \mathsf{d}(x, y) = \mathsf{d}(y, x).$ (Συμμετρία)
(4) $\forall x, y, z \in E\colon\ \mathsf{d}(x, y) \leq \mathsf{d}(x, z) + \mathsf{d}(z, y).$ (Τριγωνική ανισότητα)

Η απεικόνιση d καλείται **μετρική**.

Άσκηση 13. *Έστω ότι $(\mathcal{E}, \langle,\rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος. Ορίζουμε απεικόνιση*

$$\mathsf{d}\colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto \mathsf{d}(x, y) = \|\vec{x} - \vec{y}\| \qquad (\textit{απόσταση των } \vec{x},\ \vec{y})$$

Να δειχθεί ότι η απεικόνιση d *είναι μια μετρική και άρα το ζεύγος $(\mathcal{E},\ \mathsf{d})$ είναι ένας μετρικός χώρος.*

Λύση. Προφανώς, $\mathsf{d}(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| \geq 0$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, και αν $\vec{x} = \vec{y}$, τότε: $\mathsf{d}(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = 0$. Αντίστροφα, αν $\mathsf{d}(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = 0$, τότε $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}$ και επομένως $\vec{x} = \vec{y}$.

Επίσης άμεσα έχουμε, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$: $\mathsf{d}(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \| - (\vec{y} - \vec{x})\| = \|\vec{y} - \vec{x}\| = \mathsf{d}(\vec{y}, \vec{x})$.

Τέλος χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, θα έχουμε, $\forall x, y, z \in E$:

$$\mathsf{d}(x, y) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{x} - \vec{z} + \vec{z} - \vec{y}\| \ \leq\ \|\vec{x} - \vec{z}\| + \|\vec{z} - \vec{y}\| = \mathsf{d}(\vec{x}, \vec{z}) + \mathsf{d}(\vec{z}, \vec{y})$$

Επομένως η απεικόνιση d είναι μια μετρική επί του Ευκλείδειου χώρου $\mathcal{E}$. ■

Άσκηση 14. *Έστω ότι $a_1, a_2, \cdots, a_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να δειχθεί ότι:*

$$n^2 \ \leq\ \Big(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\Big)\ \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$$

Λύση. Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}^n,\ \langle,\rangle)$ εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόεμενο. Επειδή οι αριθμοί $a_1, a_2, \cdots, a_n$ είναι θετικοί, μπορούμε να θεωρήσουμε τα διανύσματα

$$\vec{x} = \big(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \cdots, \sqrt{a_n}\big) \qquad \text{και} \qquad \vec{y} = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$$

Από την ανισότητα των Cauchy-Schwarz, έπεται ότι:

$$\big|\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle\big| \ \leq\ \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$$

Όμως

$$\big|\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle\big| = \left|\left\langle \big(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \cdots, \sqrt{a_n}\big),\ \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)\right\rangle\right| = \big|1 + 1 + \cdots + 1\big| = n$$

$$\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| = \sqrt{(\sqrt{a_1})^2 + (\sqrt{a_2})^2 + \cdots + (\sqrt{a_n})^2} \cdot \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{a_1}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{a_2}})^2 + \cdots + (\frac{1}{\sqrt{a_n}})^2} =$$

$$= \sqrt{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \cdot \sqrt{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε ότι:

$$n \leq \sqrt{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \cdot \sqrt{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

και επομένως:

$$n^2 \leq \left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 15. *Έστω η απεικόνιση* $\langle\ ,\rangle' : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *η οποία ορίζεται ως εξής:*

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle' = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3$$

(1) *Δείξτε ότι η παραπάνω απεικόνιση ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον* $\mathbb{R}^3$.
(2) *Να βρεθούν όλα τα διανύσματα του* $\mathbb{R}^3$ *τα οποία είναι κάθετα, ως προς το εσωτερικό γινόμενο* $\langle\ ,\rangle'$, *με κάθε διάνυσμα του υπόχωρου*

$$\mathcal{V} = \big\{(x, y, z) \mid x - y + z = 0\big\}$$

Λύση. (1) Έστω $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε:

(α):

$$\begin{aligned}
\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle' &= x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3 \\
&= y_1 x_1 + 2y_2 x_2 + 3y_3 x_3 \\
&= \langle (y_1, y_2, y_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle'
\end{aligned}$$

(β):

$$\begin{aligned}
\langle (x_1, x_2, x_3) + (z_1, z_2, z_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle' &= \langle (x_1 + z_1, x_2 + z_2, x_3 + z_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle' \\
&= (x_1 + z_1) y_1 + 2(x_2 + z_2) y_2 + 3(x_3 + z_3) y_3 \\
&= x_1 y_1 + z_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 2z_2 y_2 + 3x_3 y_3 + 3z_3 y_3 \\
&= x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3 + z_1 y_1 + 2z_2 y_2 + 3z_3 y_3 \\
&= \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle' + \langle (z_1, z_2, z_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle'
\end{aligned}$$

(γ):

$$\begin{aligned}
\langle \lambda(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle' &= \langle (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle' \\
&= \lambda x_1 y_1 + 2\lambda x_2 y_2 + 3\lambda x_3 y_3 \\
&= \lambda(x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3) \\
&= \lambda \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle'
\end{aligned}$$

(δ):

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle' = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 \geq 0$$

και άρα

$$\Big\langle (x_1, x_2, x_3),\ (x_1, x_2, x_3) \Big\rangle' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

Επομένως η απεικόνιση $\langle\ ,\rangle'$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$.

(2) Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \{(x,y,z) \mid x-y+z=0\} \\
&= \{(x,y,z) \mid y = x+z\} \\
&= \{(x, x+z, z) \mid x,z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x(1,1,0) + z(0,1,1) \mid x,z \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle (1,1,0), (0,1,1) \rangle
\end{aligned}$$

και επειδή τα διανύσματα $(1,1,0),(0,1,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα έπεται ότι το σύνολο $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ αποτελεί μια βάση του $\mathcal{V}$. Αφού θέλουμε να βρούμε όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ τα οποία είναι κάθετα, ως προς το εσωτερικό γινόμενο $\langle\ ,\rangle'$, με κάθε διάνυσμα του υπόχωρου $\mathcal{V}$, αρκεί να βρούμε τα διανύσματα που είναι κάθετα με τα διανύσματα της βάσης του $\mathcal{V}$. Έστω $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Τότε:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle (1,1,0),(x,y,z)\rangle' = 0 \\ \\ \langle (0,1,1),(x,y,z)\rangle' = 0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} x+2y=0 \\ \\ 2y+3z=0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} x=-2y \\ \\ z=-\frac{2}{3}y \end{array} \right.$$

Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W} &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (1,1,0),(x,y,z)\rangle' = 0 \ \text{ και } \ \langle (0,1,1),(x,y,z)\rangle' = 0\right\} \\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=-2y \ \text{ και } \ z = -\frac{2}{3}y\right\} \\
&= \left\{\left(-2y, y, -\frac{2}{3}y\right) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{y\left(-2, 1, -\frac{2}{3}\right) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\langle \left(-2, 1, -\frac{2}{3}\right) \right\rangle
\end{aligned}$$

■

Υπενθυμίζουμε ότι ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{C} = \left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\right\}$ του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle,\rangle)$ καλείται:

(1) **ορθογώνιο**, αν: $1 \le i \ne j \le n \implies \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j\rangle = 0$.
(2) **ορθοκανονικό**, αν είναι ορθογώνιο και, $\forall i = 1,2,\cdots,n$: $\|\vec{e}_i\| = 1$.
(3) **ορθοκανονική βάση**, αν είναι βάση και ορθοκανονικό σύνολο.

Άσκηση 16. *Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\left(\mathbb{R}_2[t], \langle\,\rangle\right)$ εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο*

$$\left\langle P(t), Q(t) \right\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

(1) *Να βρεθούν τα μήκη και οι γωνίες των διανυσμάτων t, $1+t$.*
(2) *Να δειχθεί ότι το σύνολο διανυσμάτων*

$$P(t) = 1, \qquad Q(t) = t - \frac{1}{2}, \qquad R(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$$

είναι μια ορθογώνια βάση του $\mathbb{R}_2[t]$.
(3) *Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_2[t]$.*

Λύση. (1) Αν θ είναι η γωνία των διανυσμάτων t και $1+t$, τότε θα έχουμε:

$$\cos\theta = \frac{\langle t, 1+t\rangle}{\|t\| \cdot \|1+t\|}$$

Υπολογίζουμε:

$$\big\langle t, 1+t \big\rangle = \int_0^1 t\cdot(1+t)\,dt = \int_0^1 (t+t^2)\,dt = \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 t^2\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{9}{6}$$

$$\|t\| = \sqrt{\langle t,t\rangle} = \sqrt{\int_0^1 t^2\,dt} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\|1+t\| = \sqrt{\langle 1+t, 1+t\rangle} = \sqrt{\int_0^1 (1+t)^2\,dt} = \sqrt{\int_0^1 (1+2t+t^2)\,dt} = \sqrt{\int_0^1 1\,dt + \int_0^1 2t\,dt + \int_0^1 t^2\,dt} =$$

$$= \sqrt{1+1+\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

(2) Το σύνολο διανυσμάτων $P(t) = 1$, $Q(t) = t - \frac{1}{2}$, και $R(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$ είναι βάση του $\mathbb{R}_2[t]$ διότι $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[t] = 3$ και τα διανύσματα $P(t)$, $Q(t)$ και $R(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, επειδή: $\deg 1 = 0$, $\deg(t-\frac{1}{2}) = 1$, και $\deg(t^2 - t + \frac{1}{6}) = 2$.

Υπολογίζουμε:

- $$\langle P(t), Q(t)\rangle = \langle 1, t - \frac{1}{2}\rangle = \int_0^1 1\cdot(t-\frac{1}{2})\,dt = \int_0^1 t - \frac{1}{2}\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}t\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

- $$\langle P(t), R(t)\rangle = \left\langle 1, t^2 - t + \frac{1}{6}\right\rangle = \int_0^1 1\cdot\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)\,dt = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)\,dt =$$

$$= \int_0^1 t^2\,dt - \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 \frac{1}{6}\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{t^2}{2}t\Big|_0^1 + \frac{1}{6}t\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 0$$

- $$\langle Q(t), R(t)\rangle = \left\langle t - \frac{1}{2}, t^2 - t + \frac{1}{6}\right\rangle = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{2}{3}t - \frac{1}{12}\right)\,dt = \frac{t^4}{4}\Big|_0^1 - \frac{3}{2}\frac{t^3}{3} + \frac{2}{3}\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{1}{12}t\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = 0$$

Άρα τα διανύσματα της βάσης $\big\{P(t), Q(t), R(t)\big\}$ είναι ανά δύο ορθογώνια.

(3) Επειδή η βάση $\big\{P(t), Q(t), R(t)\big\}$ είναι ορθογώνια, για να είναι ορθοκανονική θα πρέπει κάθε διάνυσμα της βάσης να είναι μοναδιαίο, και επομένως αρκεί να διαιρέσουμε κάθε ένα από τα διανύσματα $P(t)$, $Q(t)$, και $R(t)$ με το μήκος του. Τα μήκη των διανυσμάτων $P(t)$, $Q(t)$, και $R(t)$ υπολογίστηκαν στην Άσκηση 5:

$$\|P(t)\| = 1, \qquad \|Q(t)\| = \frac{1}{\sqrt{12}}, \qquad \|R(t)\| = \frac{1}{\sqrt{180}}$$

Επομένως τα διανύσματα

$$\frac{P(t)}{\|P(t)\|} = 1, \qquad \frac{Q(t)}{\|Q(t)\|} = \sqrt{12}\left(t - \frac{1}{2}\right), \qquad \frac{R(t)}{\|R(t)\|} = \sqrt{180}\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)$$

αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_2[t]$. ■

Παρατήρηση 3. *Σε κάποιες από τις επόμενες ασκήσεις χρησιμοποιούμε το εξής αποτέλεσμα από τη Θεωρία. Έστω $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\big\}$ μια ορθοκανονική βάση του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$. Δηλαδή το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$ και*

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j\,\rangle = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases} \tag{$*$}$$

Αν $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$ είναι η μοναδική γραφή του $\vec{x}$ ως γραμμικός συνδυασμός της βάσης $\mathcal{B}$, τότε χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $(*)$ θα έχουμε, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$:

$$\langle \vec{x}, \vec{e}_i\rangle = \langle x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n, \vec{e}_i\rangle = \langle x_1\vec{e}_1, \vec{e}_i\rangle + \langle x_2\vec{e}_2, \vec{e}_i\rangle + \cdots + \langle x_n\vec{e}_n, \vec{e}_i\rangle =$$

$$= x_1\langle\vec{e}_1,\vec{e}_i\rangle + x_2\langle\vec{e}_2,\vec{e}_i\rangle + \cdots + x_n\langle\vec{e}_n,\vec{e}_i\rangle = x_i$$

Άρα $x_i = \langle\vec{x},\vec{e}_i\rangle$, $1 \leq i \leq n$, και τότε:

$$\vec{x} = \langle\vec{x},\vec{e}_1\rangle\vec{e}_1 + \langle\vec{x},\vec{e}_2\rangle\vec{e}_2 + \cdots + \langle\vec{x},\vec{e}_n\rangle\vec{e}_n$$

Έστω $\vec{y} \in \mathcal{E}$, και τότε θα έχουμε: $\vec{y} = \langle\vec{y},\vec{e}_1\rangle\vec{e}_1 + \langle\vec{y},\vec{e}_2\rangle\vec{e}_2 + \cdots + \langle\vec{y},\vec{e}_n\rangle\vec{e}_n$. Επομένως χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $(*)$ προκύπτει ότι:

$$\langle\vec{x},\vec{y}\,\rangle = \langle\vec{x},\vec{e}_1\rangle\langle\vec{y},\vec{e}_1\rangle + \langle\vec{x},\vec{e}_2\rangle\langle\vec{y},\vec{e}_2\rangle + \cdots + \langle\vec{x},\vec{e}_n\rangle\langle\vec{y},\vec{e}_n\rangle \tag{$\dagger$}$$

Ιδιαίτερα:

$$\|\vec{x}\| = \langle\vec{x},\vec{x}\,\rangle = \langle\vec{x},\vec{e}_1\rangle^2 + \langle\vec{x},\vec{e}_2\rangle^2 + \cdots + \langle\vec{x},\vec{e}_n\rangle^2 \tag{$\dagger\dagger$}$$

Άσκηση 17. *Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του Ευκλείδειου χώρου $(\mathcal{E},\langle,\rangle)$, και $\vec{x} \in \mathcal{E}$ ένα μη-μηδενικό διάνυσμα. Αν θ_i είναι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{x}$ και $\vec{e}_i$, $1 \leq i \leq n$, να δειχθεί ότι:*

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cdots + \cos^2\theta_n = 1$$

Λύση. Για κάθε $i = 1,2,\cdots,n$, θα έχουμε:

$$\big|\langle\vec{x},\vec{e}_i\rangle\big| = \|\vec{x}\|\,\|\vec{e}_i\|\cos\theta_i = \|\vec{x}\|\cos\theta_i \quad\Longrightarrow\quad \langle\vec{x},\vec{e}_i\rangle^2 = \|\vec{x}\|^2\cos^2\theta_i$$

Επομένως:

$$\langle\vec{x},\vec{e}_1\rangle^2 + \langle\vec{x},\vec{e}_2\rangle^2 + \cdots + \langle\vec{x},\vec{e}_n\rangle^2 = \|\vec{x}\|^2\cos^2\theta_1 + \|\vec{x}\|^2\cos^2\theta_2 + \cdots + \|\vec{x}\|^2\cos^2\theta_n \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad \langle\vec{x},\vec{e}_1\rangle^2 + \langle\vec{x},\vec{e}_2\rangle^2 + \cdots + \langle\vec{x},\vec{e}_n\rangle^2 = \|\vec{x}\|^2\big(\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cdots + \cos^2\theta_n\big)$$

Από τη σχέση $(\dagger\dagger)$ στην Παρατήρηση 3, έπεται ότι

$$\|\vec{x}\|^2 = \|\vec{x}\|^2\big(\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cdots + \cos^2\theta_n\big)$$

Επειδή $\vec{x} \neq \vec{0}$, έπεται ότι $\|\vec{x}\| \neq 0$ και επομένως:

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cdots + \cos^2\theta_n = 1 \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 18. *Έστω $(\mathcal{E},\langle,\rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\mathcal{C} = \{\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_m\}$ ένα ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{E}$. Να δείξετε ότι, $\forall\,\vec{y} \in \mathcal{E}$:*

$$\langle\vec{y},\vec{\varepsilon}_1\rangle^2 + \cdots + \langle\vec{y},\vec{\varepsilon}_m\rangle^2 \;\leq\; \|\vec{y}\|^2$$

και:

$$\langle\vec{y},\vec{\varepsilon}_1\rangle^2 + \cdots + \langle\vec{y},\vec{\varepsilon}_m\rangle^2 \;=\; \|\vec{y}\|^2 \quad\Longleftrightarrow\quad m = \dim_{\mathbb{R}}\mathcal{E}$$

Λύση. Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
0 \;\le\; & \Big\langle \vec{y} - \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle \vec{\varepsilon}_i, \vec{y} - \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle \vec{\varepsilon}_i \Big\rangle \;= \\
= \;& \big\langle \vec{y}, \vec{y} \big\rangle - \big\langle \vec{y}, \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle \vec{\varepsilon}_i \big\rangle \\
- \;& \big\langle \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle \vec{\varepsilon}_i, \vec{y} \big\rangle + \big\langle \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle \vec{\varepsilon}_i, \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle \vec{\varepsilon}_i \big\rangle \\
= \;& \big\langle \vec{y}, \vec{y} \big\rangle - \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle \big\langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i \big\rangle - \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle \big\langle \vec{\varepsilon}_i, \vec{y} \big\rangle \\
+ \;& \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle \big\langle \vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_i \big\rangle \\
= \;& \|\vec{y}\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle^2 + \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle^2 \\
= \;& \|\vec{y}\|^2 - \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle^2
\end{aligned}
$$

Επομένως έχουμε: $\sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle^2 \le \|\vec{y}\|^2$.

Αν $m = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\, \mathcal{E}$, τότε προφανώς το σύνολο $\mathcal{C}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$ και τότε από τη σχέση ($\dagger\dagger$) στην Παρατήρηση 3 έπεται ότι: $\sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle^2 = \|\vec{y}\|^2$. Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε διάνυσμα $\vec{y}$ του $\mathcal{E}$ ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{m} \langle \vec{y}, \vec{\varepsilon}_i\rangle^2 = \|\vec{y}\|^2$. Αν $m \neq \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\, \mathcal{E}$, τότε υπάρχει[2] ένα διάνυσμα $\vec{\varepsilon}_{m+1} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε το σύνολο $\mathcal{C} \cup \big\{\vec{\varepsilon}_{m+1}\big\}$ να είναι ορθοκανονικό. Τότε όμως θα έχουμε

$$
0 = \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{\varepsilon}_{m+1}, \vec{\varepsilon}_i\rangle^2 = \|\vec{\varepsilon}_{m+1}\|^2 = 1
$$

και αυτό είναι άτοπο. Άρα $m = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\, \mathcal{E}$. ∎

Άσκηση 19. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι:*

$$
\big\langle \vec{x}, \vec{y} \big\rangle = 0 \quad \iff \quad \|\vec{x}\| \;\le\; \|\vec{x} + \lambda \vec{y}\|, \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}
$$

Λύση. • Έστω $\big\langle \vec{x}, \vec{y} \big\rangle = 0$. Τότε:

$$
\begin{aligned}
\|\vec{x} + \lambda \vec{y}\|^2 &= \|\vec{x}\|^2 + 2\lambda \cdot \big\langle \vec{x}, \vec{y} \big\rangle + \|\lambda \vec{y}\|^2 \\
&= \|\vec{x}\|^2 + \lambda^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \\
&\ge \|\vec{x}\|^2
\end{aligned}
$$

διότι $\lambda^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \ge 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Συνεπώς:

$$
\|\vec{x} + \lambda \vec{y}\| \ge \|\vec{x}\|
$$

- Αντίστροφα έστω ότι $\|\vec{x}\| \;\le\; \|\vec{x} + \lambda \vec{y}\|, \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$
\|\vec{x} + \lambda \vec{y}\|^2 \ge \|\vec{x}\|^2 \quad \Longrightarrow \quad \|\vec{x}\|^2 + 2\lambda \cdot \big\langle \vec{x}, \vec{y} \big\rangle + \lambda^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \ge \|\vec{x}\|^2
$$

$$
\Longrightarrow \quad \lambda^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 + 2\lambda \cdot \big\langle \vec{x}, \vec{y} \big\rangle \;\ge\; 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}
$$

[2] Ο ισχυρισμός προκύπτει με εφαρμογή της διαδικασίας Gram-Schmidt.

Αν $\|\vec{y}\| = 0$, τότε $\vec{y} = \vec{0}$, και προφανώς: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$.

Υποθέτουμε ότι: $\|\vec{y}\| \neq 0$. Θέτουμε

$$\varphi(\lambda) = \|\vec{y}\|^2 \lambda^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \lambda, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

και άρα

$$\varphi(\lambda) \ \geq \ 0, \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \tag{$*$}$$

Υποθέτουμε ότι $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \neq 0$. Οι ρίζες του τριωνύμου $\varphi(\lambda)$ ως προς λ είναι:

$$\lambda_1 = 0 \qquad \text{και} \qquad \lambda_2 = -\frac{2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{y}\|^2}$$

οι οποίες είναι διακεκριμμένες: $\lambda_1 = 0 \neq \lambda_2$ διότι $\langle \vec{x}, \vec{y}\, \rangle \neq 0$. Επειδή η διακρίνουσα του $\varphi(\lambda)$ είναι $\Delta = 4\langle \vec{x}, \vec{y}\, \rangle^2 > 0$, το τριώνυμο $\varphi(\lambda)$ λαμβάνει τιμές αντίθετες του πρόσημου του $\|\vec{y}\|^2 > 0$ στο διάστημα μεταξύ των ριζών του. Άρα:

$$\varphi(\lambda) < 0, \qquad \forall \lambda \in \Big(0,\ -\frac{2\langle \vec{x}, \vec{y}\, \rangle}{\|\vec{y}\|}\Big), \qquad \text{αν} \quad \langle \vec{x}, \vec{y}\, \rangle \ < \ 0$$

και

$$\varphi(\lambda) < 0, \qquad \forall \lambda \in \Big(-\frac{2\langle \vec{x}, \vec{y}\, \rangle}{\|\vec{y}\|},\ 0\Big), \qquad \text{αν} \quad \langle \vec{x}, \vec{y}\, \rangle \ > \ 0$$

Άρα επιλέγοντας λ σε ένα από τα παραπάνω διαστήματα, βλέπουμε ότι:

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{R}: \quad \varphi(\lambda) < 0 \tag{$**$}$$

Από τις σχέσεις $(*)$ και $(**)$ βλέπουμε ότι η υπόθεση $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \neq 0$, μας οδηγεί σε άτοπο. Άρα

$$\langle\, \vec{x}, \vec{y}\, \rangle \ = \ 0 \qquad \blacksquare$$

Έστω $(\mathcal{E},\ \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n \in \mathcal{E}$. Ο **πίνακας Gram** των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ ορίζεται ως εξής:

$$G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) = \begin{pmatrix} \langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_n \rangle \\ \langle \vec{x}_2, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{x}_n, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_n, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_n, \vec{x}_n \rangle \end{pmatrix}$$

και η **ορίζουσα Gram** των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ ορίζεται ως η ορίζουσα του πίνακα Gram:

$$\big|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)\big| = \begin{vmatrix} \langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_1, \vec{x}_n \rangle \\ \langle \vec{x}_2, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_2, \vec{x}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{x}_n, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{x}_n, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{x}_n, \vec{x}_n \rangle \end{vmatrix}$$

Άσκηση 20. *Έστω $(\mathcal{E},\ \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n \in \mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι:*

$$\big|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)\big| \ \neq \ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{το σύνολο διανυσμάτων } \big\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\big\} \text{ είναι γραμμικά ανεξάρτητο}$$

Λύση. (1) Υποθέτουμε ότι $\big|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)\big| \neq 0$. Έστω

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n = \vec{0}$$

Θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο της παραπάνω σχέσης διαδοχικά με τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$. Τότε θα έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{cases} \langle \vec{x}_1,\ \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n \rangle = 0 \\ \langle \vec{x}_2,\ \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n \rangle = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \langle \vec{x}_n,\ \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n \rangle = 0 \end{cases}$$

ή ισοδύναμα

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} \lambda_1\langle \vec{x}_1,\, \vec{x}_1\rangle + \lambda_2\langle \vec{x}_1,\, \vec{x}_2\rangle + \cdots + \lambda_n\langle \vec{x}_1,\, \vec{x}_n\rangle = 0 \\ \lambda_1\langle \vec{x}_2,\, \vec{x}_1\rangle + \lambda_2\langle \vec{x}_2,\, \vec{x}_2\rangle + \cdots + \lambda_n\langle \vec{x}_2,\, \vec{x}_n\rangle = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \lambda_1\langle \vec{x}_n,\, \vec{x}_1\rangle + \lambda_2\langle \vec{x}_n,\, \vec{x}_2\rangle + \cdots + \lambda_n\langle \vec{x}_n,\, \vec{x}_n\rangle = 0 \end{cases}$$

Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος (Σ) ως προς $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ είναι προφανώς ο πίνακας Gram $G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)$ των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$. Επειδή $\big|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)\big| \neq 0$, έπεται ότι το ομογενές σύστημα (Σ), ως προς $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, έχει μοναδική λύση, τη μηδενική, δηλαδή $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Επομένως το σύνολο διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

(2) Αντίστροφα, αν το σύνολο διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε έπεται ότι $\big|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)\big| \neq 0$. Πράγματι, αν $\big|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)\big| = 0$, τότε η βαθμίδα του πίνακα $G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)$ είναι $< n$ ή ισοδύναμα οι στήλες

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} \langle \vec{x}_1,\, \vec{x}_1\rangle \\ \langle \vec{x}_2,\, \vec{x}_1\rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{x}_n,\, \vec{x}_1\rangle \end{pmatrix}, \qquad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} \langle \vec{x}_1,\, \vec{x}_2\rangle \\ \langle \vec{x}_2,\, \vec{x}_2\rangle \\ \cdots \\ \langle \vec{x}_n,\, \vec{x}_2\rangle \end{pmatrix}, \ \cdots, \qquad \Sigma_n = \begin{pmatrix} \langle \vec{x}_1,\, \vec{x}_n\rangle \\ \langle \vec{x}_2,\, \vec{x}_n\rangle \\ \cdots \\ \langle \vec{x}_n,\, \vec{x}_n\rangle \end{pmatrix}$$

του πίνακα $G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)$ είναι γραμμικά εξαρτημένες. Επομένως υπάρχουν $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \neq (0, 0, 0 \cdots, 0)$ έτσι ώστε:

$$\lambda_1\Sigma_1 + \lambda_2\Sigma_2 + \cdots + \lambda_n\Sigma_n = O$$

και επομένως:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1\langle \vec{x}_1,\, \vec{x}_1\rangle + \lambda_2\langle \vec{x}_1,\, \vec{x}_2\rangle + \cdots + \lambda_n\langle \vec{x}_1,\, \vec{x}_n\rangle \\ \lambda_1\langle \vec{x}_2,\, \vec{x}_1\rangle + \lambda_2\langle \vec{x}_2,\, \vec{x}_2\rangle + \cdots + \lambda_n\langle \vec{x}_2,\, \vec{x}_n\rangle \\ \vdots \\ \lambda_1\langle \vec{x}_n,\, \vec{x}_1\rangle + \lambda_2\langle \vec{x}_n,\, \vec{x}_2\rangle + \cdots + \lambda_n\langle \vec{x}_n,\, \vec{x}_n\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \langle \vec{x}_1,\, \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n\rangle \\ \langle \vec{x}_2,\, \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n\rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{x}_n,\, \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \langle \vec{x}_1,\, \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n\rangle = 0 \\ \langle \vec{x}_2,\, \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n\rangle = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \langle \vec{x}_n,\, \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n\rangle = 0 \end{cases}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη σχέση με λ_1, τη δεύτερη με λ_2, $\cdots$, την τελευταία με λ_n, και χρησιμοποιώντας τη διγραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου, προκύπτει ότι:

$$\begin{cases} \langle \lambda_1\vec{x}_1,\, \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n\rangle = 0 \\ \langle \lambda_2\vec{x}_2,\, \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n\rangle = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \langle \lambda_n\vec{x}_n,\, \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n\rangle = 0 \end{cases}$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω σχέσεις και χρησιμοποιώντας τη διγραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου, πρικύπτει ότι

$$\Big\langle \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n,\ \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n \Big\rangle = 0$$

δηλαδή:

$$\Big\| \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n \Big\|^2 = 0$$

Από την ιδιότητα θετικά ορσιμένου του εσωτερικού γινομένου, έπεται τότε ότι:

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n = \vec{0}$$

Επειδή το σύνολο διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, θα έχουμε: $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ και αυτό είναι άτοπο. Στο άτοπο οδηγηθήκαμε υποθέτοντας ότι η ορίζουσα Gram $\big|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)\big|$ είναι ίση με μηδέν. Άρα $\big|G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)\big| \neq 0$. ■

Άσκηση 21. *Έστω ότι $a_1, a_2, \cdots, a_n$, $b_1, b_2, \cdots, b_n$, και $c_1, c_2, \cdots, c_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν $c_1, c_2, \cdots, c_n > 0$, να δειχθεί ότι:*

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} c_i a_i b_i\Big| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i b_i^2}$$

Λύση. Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{x} = (\sqrt{c_1}a_1, \cdots, \sqrt{c_n}a_n) \quad \text{και} \quad \vec{y} = (\sqrt{c_1}b_1, \cdots, \sqrt{c_n}b_n)$$

Τότε από την ανισότητα των Cauchy-Schwarz έχουμε:

$$|\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \implies \Big|\sum_{i=1}^{n} c_i a_i b_i\Big| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i b_i^2} \qquad \square$$

Διαφορετικά: Επειδή $c_1, c_2, \cdots, c_n > 0$, η απεικόνιση[3]

$$\langle\!\langle (x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n) \rangle\!\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k c_k y_k$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$. Από την ανισότητα των Cauchy-Schwarz για τα διανύσματα

$$\vec{x} = (a_1, \cdots, a_n) \quad \text{και} \quad \vec{y} = (b_1, \cdots, b_n)$$

ως προς το εσωτερικό γινόμενο $\langle\!\langle -, - \rangle\!\rangle$, θα έχουμε:

$$|\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \implies \Big|\sum_{i=1}^{n} c_i a_i b_i\Big| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i b_i^2}$$

■

Άσκηση 22. *Έστω ότι $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος. Να δείξετε ότι, $\forall \vec{z}, \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$:*

$$\big\|\vec{z} - \vec{x}\big\|^2 + \big\|\vec{z} - \vec{y}\big\|^2 = \frac{1}{2}\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 + 2\Big\|\vec{z} - \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y})\Big\|^2 \qquad \text{(Ταυτότητα του Απολλώνιου)}$$

Τι εκφράζει γεωμετρικά η ταυτότητα του Αποληλλώνιου;

[3] Η απεικόνιση $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle$ είναι ενα εσωτερικό γινόμενο διότι, επιλέγοντας στην Άσκηση 9 την κανονική βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}^n$, ο αντίστοιχος πίνακας $A = \big(\langle\!\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle\!\rangle\big)$ είναι ο διαγώνιος πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

είναι προφανώς συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

Λύση. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Big\|\vec{x}-\vec{y}\Big\|^2+2\left\|\vec{z}-\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{y})\right\|^2 &= \frac{1}{2}\Big\|\vec{x}-\vec{y}\Big\|^2+2\Big\|\vec{z}\Big\|^2-2\big\langle\vec{z},\vec{x}+\vec{y}\big\rangle+\frac{1}{2}\Big\|\vec{x}+\vec{y}\Big\|^2\\
&= \frac{1}{2}\Big\|\vec{x}\Big\|^2-\big\langle\vec{x},\vec{y}\big\rangle+\frac{1}{2}\Big\|\vec{y}\Big\|^2+2\big\|\vec{z}\big\|^2-2\big\langle\vec{z},\vec{x}\big\rangle-2\big\langle\vec{z},\vec{y}\big\rangle\\
&+ \frac{1}{2}\Big\|\vec{x}\Big\|^2+\big\langle\vec{x},\vec{y}\big\rangle+\frac{1}{2}\Big\|\vec{y}\Big\|^2\\
&= \big(\big\|\vec{z}\big\|^2-2\big\langle\vec{z},\vec{x}\big\rangle+\big\|\vec{x}\big\|^2\big)+\big(\big\|\vec{z}\big\|^2-2\big\langle\vec{z},\vec{y}\big\rangle+\big\|\vec{y}\big\|^2\big)\\
&= \big\|\vec{z}-\vec{x}\big\|^2+\big\|\vec{z}-\vec{y}\big\|^2
\end{aligned}$$

και άρα δείξαμε την ισότητα του Απολλώνιου.

Θεωρούμε στο επίπεδο ένα τρίγωνο με πλευρές τα διανύσματα $\vec{z}-\vec{x}$ και $\vec{z}-\vec{y}$, και $\vec{x}-\vec{y}$. Τότε το διάνυσμα $\vec{z}-\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{y})$ είναι η διάμεσος από την κορυφή της γωνίας που σχηματίζουν το διανύσματα $\vec{z}-\vec{x}$ και $\vec{z}-\vec{y}$. Τότε η αποδειχθείσα ταυτότητα εκφράζει τη γεωμετρική ιδιότητα ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο οποιωνδήποτε πλευρών του, είναι ίσο με το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς συν το διπλάσιο του τετραγώνου της αντίστοιχης διαμέσου της. Η ταυτότητα του Απολλώνιου είναι γνωστή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία και ως το Πρώτο Θεώρημα Διαμέσων. ■

Άσκηση 23. *Έστω $(\mathcal{E},\ \langle,\rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ τρία διανύσματα του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι:*

$$\|\vec{x}-\vec{y}\|\cdot\|\vec{z}\| \ \leq\ \|\vec{y}-\vec{z}\|\cdot\|\vec{x}\|+\|\vec{z}-\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| \qquad \text{(Ανισότητα του Πτολεμαίου)}$$

Λύση. Αν ένα εκ των διανυσμάτων $\vec{x}$, $\vec{y}$, και $\vec{z}$ είναι το μηδενικό, τότε η ανισότητα ισχύει άμεσα. Για παράδειγμα, αν $\vec{x}=\vec{0}$, τότε $\|\vec{x}-\vec{y}\|\cdot\|\vec{z}\|=\|-\vec{y}\|\cdot\|\vec{z}\|=\|\vec{y}\|\cdot\|\vec{z}\|$ και $\|\vec{y}-\vec{z}\|\cdot\|\vec{x}\|+\|\vec{z}-\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|=\|\vec{y}-\vec{z}\|\cdot\|\vec{0}\|+\|\vec{z}-\vec{0}\|\cdot\|\vec{y}\|=\|\vec{y}-\vec{z}\|\cdot 0+\|\vec{z}\|\cdot\|\vec{y}\|=\|\vec{z}\|\cdot\|\vec{y}\|$. Άρα αν $\vec{x}=\vec{0}$, τότε η ανισότητα ισχύει και μάλιστα είναι ισότητα. Παρόμοια προκύπτει η ζητούμενη ανισότητα αν $\vec{y}=\vec{0}$ ή $\vec{z}=\vec{0}$.

Υποθέτουμε ότι τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, και $\vec{z}$ είναι μη-μηδενικά. Θεωρούμε τα διανύσματα:

$$\vec{x}\,'=\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2},\qquad \vec{y}\,'=\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|^2},\qquad \vec{z}\,'=\frac{\vec{z}}{\|\vec{z}\|^2}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\|\vec{x}\,'\|^2=\langle\vec{x}\,',\vec{x}\,'\rangle=\left\langle\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2},\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}\right\rangle=\frac{1}{\|\vec{x}\|^4}\langle\vec{x},\vec{x}\rangle=\frac{\|\vec{x}\|^2}{\|\vec{x}\|^4}=\frac{1}{\|\vec{x}\|^2}$$

Παρόμοια:

$$\|\vec{y}\,'\|^2=\frac{1}{\|\vec{y}\|^2}\qquad \text{και}\qquad \|\vec{z}\,'\|^2=\frac{1}{\|\vec{z}\|^2}$$

Τότε

$$\|\vec{x}\,'-\vec{y}\,'\|^2=\langle\vec{x}\,'-\vec{y}\,',\,\vec{x}\,'-\vec{y}\,'\rangle=\langle\vec{x}\,',\,\vec{x}\,'\rangle-2\langle\vec{x}\,',\,\vec{y}\,'\rangle+\langle\vec{y}\,',\,\vec{y}\,'\rangle=\|\vec{x}\,'\|^2-2\left\langle\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2},\,\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|^2}\right\rangle+\|\vec{y}\,'\|^2=$$

$$=\frac{1}{\|\vec{x}\|^2}-2\frac{1}{\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2}\langle\vec{x},\vec{y}\rangle+\frac{1}{\|\vec{y}\|^2}=\frac{\|\vec{y}\|^2-2\langle\vec{x},\vec{y}\rangle+\|\vec{x}\|^2}{\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2}=\frac{\langle\vec{x}-\vec{y},\,\vec{x}-\vec{y}\rangle}{\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2}=\frac{\|\vec{x}-\vec{y}\|^2}{\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\|\vec{x}\,'-\vec{y}\,'\|^2=\frac{\|\vec{x}-\vec{y}\|^2}{\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2}$$

και παρόμοια:

$$\|\vec{x}\,' - \vec{z}\,'\|^2 = \frac{\|\vec{x}-\vec{z}\|^2}{\|\vec{x}\|^2\|\vec{z}\|^2} \qquad \text{και} \qquad \|\vec{z}\,' - \vec{y}\,'\|^2 = \frac{\|\vec{z}-\vec{y}\|^2}{\|\vec{z}\|^2\|\vec{y}\|^2}$$

Άρα:

$$\|\vec{x}\,' - \vec{y}\,'\| = \frac{\|\vec{x}-\vec{y}\|}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}, \qquad \|\vec{x}\,' - \vec{z}\,'\| = \frac{\|\vec{x}-\vec{z}\|}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{z}\|}, \qquad \|\vec{z}\,' - \vec{y}\,'\| = \frac{\|\vec{z}-\vec{y}\|}{\|\vec{z}\|\cdot\|\vec{y}\|}$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα για τα διανύσματα $\vec{x}\,'$, $\vec{y}\,'$, και $\vec{z}\,'$, θα έχουμε:

$$\|\vec{x}\,' - \vec{y}\,'\| = \|\vec{x}\,' - \vec{z}\,' + \vec{z}\,' - \vec{y}\,'\| \;\le\; \|\vec{x}\,' - \vec{z}\,'\| + \|\vec{z}\,' - \vec{y}\,'\| \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\|\vec{x}-\vec{y}\|}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|} \;\le\; \frac{\|\vec{x}-\vec{z}\|}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{z}\|} \;+\; \frac{\|\vec{z}-\vec{y}\|}{\|\vec{z}\|\cdot\|\vec{y}\|} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cdot\|\vec{z}\|}\|\vec{x}-\vec{y}\|\cdot\|\vec{z}\| \;\le\; \frac{1}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cdot\|\vec{z}\|}\|\vec{x}-\vec{z}\|\cdot\|\vec{y}\| \;+\; \frac{1}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cdot\|\vec{z}\|}\|\vec{z}-\vec{y}\|\cdot\|\vec{x}\| \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \|\vec{x}-\vec{y}\|\cdot\|\vec{z}\| \;\le\; \|\vec{x}-\vec{z}\|\cdot\|\vec{y}\| \;+\; \|\vec{z}-\vec{y}\|\cdot\|\vec{x}\| \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \|\vec{x}-\vec{y}\|\cdot\|\vec{z}\| \;\le\; \|\vec{y}-\vec{z}\|\cdot\|\vec{x}\| + \|\vec{z}-\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$$

■

Άσκηση 24. *Έστω ότι $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος. Αν $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, να δειχθεί ότι:*

(1)

$$2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 \qquad (\textit{Νόμος του Παραλληλογράμμου})$$

Τι εκφράζει γεωμετρικά ο Νόμος του παραλληλογράμμου;

(2)

$$\langle \vec{x}, \vec{y}\,\rangle = \frac{\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2}{4}$$

Τι εκφράζει αλγεβρικά η παραπάνω ταυτότητα;

Λύση. (1) Θα έχουμε:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}\,\rangle + \langle \vec{x}-\vec{y}, \vec{x}-\vec{y}\,\rangle = \big(\langle \vec{x}, \vec{x}\,\rangle + 2\langle \vec{x}, \vec{y}\,\rangle + \langle \vec{x}, \vec{x}\,\rangle\big) + \big(\langle \vec{x}, \vec{x}\,\rangle - 2\langle \vec{x}, \vec{y}\,\rangle + \langle \vec{x}, \vec{x}\,\rangle\big) =$$

$$= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2$$

Θεωρούμε στο επίπεδο ένα παραλληλόγραμμο με πλευρές τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$. Τότε τα διανύσματα $\vec{x}-\vec{y}$ και $\vec{x}+\vec{y}$ είναι οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου. Τότε η αποδειχθείσα ταυτότητα εκφράζει τη γεωμετρική ιδιότητα ότι το άθροισμα των τετραγώνων των μηκών των διαγωνίων του είναι ίσο με το άθροισμα των διπλασίων των μηκών των πλευρών του.

(2) Θα έχουμε:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}\,\rangle - \langle \vec{x}-\vec{y}, \vec{x}-\vec{y}\,\rangle = \big(\langle \vec{x}, \vec{x}\,\rangle + 2\langle \vec{x}, \vec{y}\,\rangle + \langle \vec{x}, \vec{x}\,\rangle\big) - \big(\langle \vec{x}, \vec{x}\,\rangle - 2\langle \vec{x}, \vec{y}\,\rangle + \langle \vec{x}, \vec{x}\,\rangle\big) =$$

$$= 2\langle \vec{x}, \vec{y}\,\rangle + 2\langle \vec{x}, \vec{y}\,\rangle = 4\langle \vec{x}, \vec{y}\,\rangle \quad \Longrightarrow \quad \langle \vec{x}, \vec{y}\,\rangle = \frac{\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2}{4}$$

Η παραπάνω ταυτότητα εκφράζει την αλγεβρική ιδιότητα ότι σε έναν Ευκλείδειο χώρο το εσωτερικό γινόμενο εκφράζεται συναρτήσει της στάθμης. ■

Αν $\mathcal{E}$ είναι ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος, τότε μια απεικόνιση

$$\|\cdot\| \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{x} \longmapsto \|\vec{x}\|$$

καλείται **στάθμη** επί του $\mathcal{E}$, αν και μόνο αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ και $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

(1) $\|\vec{x}\| \ge 0$, και $\|\vec{x}\| = 0$ αν και μόνον αν $\vec{x} = \vec{0}$.
(2) $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|$.
(3) $\|\vec{x}+\vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Το ζεύγος $(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$ καλείται **σταθμητός χώρος**, αν $\mathcal{E}$ είναι ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος και $\|\cdot\| \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι μια στάθμη επί του $\mathcal{E}$.

Για παράδειγμα, αν $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος, τότε γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση

$$\|\cdot\| \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{x} \longmapsto \|\vec{x}\| = +\sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x}\,\rangle}$$

είναι μια στάθμη επί του $\mathcal{E}$. Η στάθμη αυτή καλείται η **στάθμη η οποία επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο** $\langle\, , \rangle$. Επομένως κάθε Ευκλείδειος χώρος είναι σταθμητός χώρος.

Οι επόμενες δύο Ασκήσεις δείχνουν ότι υπάρχουν στάθμες επί ενός $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου οι οποίες δεν επάγονται από ένα εσωτερικό γινόμενο.

Άσκηση 25. *Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$, θεωρούμε την απεικόνιση*

$$\|\cdot\|_\infty \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto \|\vec{x}\|_\infty = \max\big\{|x_1|,\, |x_2|,\, \cdots,\, |x_n|\big\}$$

Να δειχθεί ότι η απεικόνιση $\|\cdot\|_\infty$ είναι μια στάθμη επί του $\mathbb{R}^n$ η οποία δεν επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο.

Λύση. (1) Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Προφανώς $\|\vec{x}\|_\infty \geq 0$, και $\|\vec{x}\|_\infty = 0$ αν και μόνον αν $\max\big\{|x_1|,\, |x_2|,\, \cdots,\, |x_n|\big\} = 0$ αν και μόνον αν $|x_1| = |x_2| = \cdots = |x_n| = 0$ δηλαδή $x_i = 0,\ 1 \leq i \leq n$, αν και μόνον αν $\vec{x} = \vec{0}$.

Επιπρόσθετα θα έχουμε $\|\lambda\vec{x}\|_\infty = \max\big\{|\lambda x_1|,\, |\lambda x_2|,\, \cdots,\, |\lambda x_n|\big\}$. Αν $|x_k| = \max\big\{|x_1|,\, |x_2|,\, \cdots,\, |x_n|\big\}$, όπου $1 \leq k \leq n$, τότε προφανώς $|\lambda| \cdot |x_k| = |\lambda x_k| = \max\big\{|\lambda x_1|,\, |\lambda x_2|,\, \cdots,\, |\lambda x_n|\big\}$ και επομένως $|\lambda|\|\vec{x}\|_\infty = \|\lambda\vec{x}\|_\infty$.

Τέλος $\|\vec{x} + \vec{y}\|_\infty = \max\big\{|x_1 + y_1|,\, |x_2 + y_2|,\, \cdots,\, |x_n + y_n|\big\}$. Έστω:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|_\infty = |x_k + y_k| = \max\big\{|x_1 + y_1|,\, |x_2 + y_2|,\, \cdots,\, |x_n + y_n|\big\}$$

$$\|\vec{x}\|_\infty = |x_r| = \max\big\{|x_1|,\, |x_2|,\, \cdots,\, |x_n|\big\}, \quad \|\vec{y}\|_\infty = |y_s| = \max\big\{|y_1|,\, |y_2|,\, \cdots,\, |y_n|\big\}$$

όπου $1 \leq k, r, s \leq n$. Τότε $|x_k| \leq |x_r|$ και $|y_k| \leq |y_s|$. Επειδή $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k| \leq |x_r| + |y_s|$, έπεται ότι:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|_\infty = |x_k + y_k| \ \leq\ |x_r| + |y_s| = \|\vec{x}\|_\infty + \|\vec{y}\|_\infty$$

Επομένως η απεικόνιση $\vec{x} \longmapsto \|\vec{x}\|_\infty$ είναι μια στάθμη επί του $\mathbb{R}^n$.

(2) Έστω ότι η στάθμη $\|\cdot\|_\infty$ επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\,\rangle'$ επί του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή, $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}^n$:

$$\|\cdot\|_\infty = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle'}$$

Τότε όπως είδαμε στην Άσκηση 24 θα ισχύει ο Νόμος του Παραλληλογράμμου, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$2\|\vec{x}\|_\infty^2 + 2\|\vec{y}\|_\infty^2 = \|\vec{x} + \vec{y}\|_\infty^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|_\infty^2$$

Θαωρούμε τα διανύσματα:

$$\vec{x} = (1, 1, 0, \cdots, 0) \qquad \text{και} \qquad \vec{y} = (1, -1, 0, \cdots, 0)$$

Τότε: $\vec{x} + \vec{y} = (2, 0, 0, \cdots, 0)$ και $\vec{x} - \vec{y} = (0, 2, 0 \cdots, 0)$. Επομένως:

$$\|\vec{x}\|_\infty = 1 = \|\vec{y}\|_\infty \qquad \text{και} \qquad \|\vec{x} + \vec{y}\|_\infty = 2 = \|\vec{x} - \vec{y}\|_\infty$$

Επομένως

$$2\|\vec{x}\|_\infty^2 + 2\|\vec{y}\|_\infty^2 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 = 4 \neq 8 = 2^2 + 2^2 = \|\vec{x} + \vec{y}\|_\infty^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|_\infty^2$$

Αυτό είναι αντίφαση, στην οποία οδηγηθήκαμε υποθέτοντας ότι η στάθμη $\|\cdot\|_\infty$ επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$. Επομένως η στάθμη $\|\cdot\|_\infty$ του $\mathbb{R}^n$ δεν επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$. ∎

Άσκηση 26. *Για κάθε πραγματικό αριθμό $p > 1$, θεωρούμε την απεικόνιση*

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto \|\vec{x}\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(1) *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση $\|\cdot\|_p$ είναι μια στάθμη επί του $\mathbb{R}^n$.*
(2) *Να δειχθεί ότι η στάθμη $\|\cdot\|_p$ επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$ αν και μόνον αν $p = 2$.*

Λύση. (1) Οι δύο πρώτες ιδιότητες της στάθμης ικανοποιούνται άμεσα από την απεικόνιση $\|\cdot\|_p$. Η απόδειξη της τρίτης ιδιότητας, δηλαδή της τριγωνικής ανισότητας, δεν είναι τετριμμένη, γι' αυτό και η απόδειξή της παραλείπεται[4].

(2) Αν $p = 2$, τότε γνωρίζουμε ότι η στάθμη $\|\cdot\|_2$ είναι η στάθμη η οποία επάγεται από το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle\,\rangle$ του $\mathbb{R}^n$:

$$\|\vec{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle}$$

Αντίστροφα, έστω ότι η στάθμη $\|\cdot\|_p$ επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle,\rangle'$ επί του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή, $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\|\cdot\|_p = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle'}$$

Τότε όπως είδαμε στην Άσκηση 24 θα ισχύει ο Νόμος του Παραλληλογράμμου, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$2\|\vec{x}\|_p^2 + 2\|\vec{y}\|_p^2 = \|\vec{x} + \vec{y}\|_p^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|_p^2$$

Θαωρούμε τα διανύσματα:

$$\vec{x} = (1, 1, 0, \cdots, 0) \quad \text{και} \quad \vec{y} = (1, -1, 0, \cdots, 0)$$

Τότε: $\vec{x} + \vec{y} = (2, 0, 0, \cdots, 0)$ και $\vec{x} - \vec{y} = (0, 2, 0 \cdots, 0)$. Επομένως:

$$\|\vec{x}\|_p = 2^{\frac{1}{p}} = \|\vec{y}\|_p \quad \text{και} \quad \|\vec{x} + \vec{y}\|_p = 2 = \|\vec{x} - \vec{y}\|_p$$

Επομένως

$$2\|\vec{x}\|_p^2 + 2\|\vec{y}\|_p^2 = 2 \cdot 2^{\frac{2}{p}} + 2 \cdot 2^{\frac{2}{p}} = 4 \cdot 2^{\frac{2}{p}} = 8 = 2^2 + 2^2 = \|\vec{x} + \vec{y}\|_p^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|_p^2$$

δηλαδή

$$4 \cdot 2^{\frac{2}{p}} = 8 \implies 2^{\frac{2}{p}} = 2 \implies \frac{2}{p} = 1 \implies p = 2$$

■

[4] Η απόδειξη χωρίζεται σε τρία βήματα (όπου κάθε βήμα είναι η απόδειξη μιας ανισότητας και κάθε ανισότητα χρησιμοποιείται στην απόδεξη της επόμενης):

(α΄) Ανισότητα Young: Αν $p \in (1, \infty)$, και αν $q \in \mathbb{R}$ είναι τέτοιος ώστε

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

τότε:

$$\forall a, b \in [0, \infty): \quad ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{και} \quad ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \iff a^p = b^q$$

(β΄) Ανισότητα Hölder: $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n(,\ \vec{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \le \|\vec{x}\|_p \cdot \|\vec{y}\|_p$$

(γ΄) Ανισότητα Minkowski: $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n(,\ \vec{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|_p \le \|\vec{x}\|_p + \|\vec{y}\|_p$$

Παρατήρηση 4. *Είδαμε στην 'Ασκηση 24 ότι κάθε Ευκλείδειος χώρος είναι είναι σταθμητός χώρος με στάθμη η οποία επάγεται από το εσωρετικό γινόμενο και η οποία ικανοποιεί τον Νόμο του Παραλληλογράμμου.*

Το επόμενο σημαντικό Θεώρημα χαρακτηρίζει τους σταθμητούς χώρους οι οποίοι είναι Ευκλείδειοι, δηλαδή η στάθμη τους επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο. Για την Απόδειξη παραπέμπουμε στη σελίδα 61 των σημειώσεων:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/Theoretical_Topics.pdf

Θεώρημα. [Jordan - Von Neumann (1935)] *'Εστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος και $\|\cdot\| : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ μια στάθμη επί του $\mathcal{E}$ η οποία ικανοποιεί τον Νόμο του Παραλληλογράμμου. Τότε η απεικόνιση*

$$\langle\,,\rangle : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2}{4} \tag{$\dagger$}$$

ορίζει ένα μοναδικό εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \|\vec{x}\|^2$$

Επομένως αν $\mathcal{E}$ είναι ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) *Το ζεύγος $(\mathcal{E}, \langle,\rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος*
(2) *Το ζεύγος $(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$ είναι σταθμητός χώρος και η στάθμη του $\|\cdot\|$ ικανοποιεί τον Νόμο του Παραλληλογράμμου.*