ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

Ασκησεις - Φυλλαδιο 8

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII2020/LAII2020.html

Παρασκευή 29 Μαΐου 2020

Άσκηση 1. *Θεωρούμε τον πίνακα πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & b \end{pmatrix}$$

(1) *Να προσδιορισθούν οι αριθμοί a, b, έτσι ώστε ο πίνακας A να έχει ως ιδιοτιμή το 0 με πολλαπλότητα 2.*
(2) *Για τις τιμές των a, b που θα βρείτε, να υπολογίσετε ορθογώνιο πίνακα P έτσι ώστε ο πίνακας ${}^tP \cdot A \cdot P$ να είναι διαγώνιος.*
(3) *Να υπολογίσετε τον πίνακα A^m, $\forall m \geq 1$.*

Λύση. (1) Ο πίνακας A είναι συμμετρικός και άρα διαγωνοποιείται.
Προφανώς το $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνον αν το ομογενές σύστημα

$$\begin{pmatrix} a & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\Sigma)$$

έχει μη-μηδενικές λύσεις. Επιπλέον επειδή ο ιδιοχώρος $\mathcal{V}_A(0)$ ο οποίος αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 0$ συμπίπτει με το σύνολο λύσεων $\Lambda(\Sigma)$ του (Σ), θα έχουμε ότι: ο πίνακας A ως ιδιοτιμή το 0 με πολλαπλότητα 2 αν και μόνον αν

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}_A(0) = 2 \iff \dim_{\mathbb{R}} \Lambda(\Sigma) = 2 \iff 3 - \mathbf{r}(A) = 2 \iff \mathbf{r}(A) = 1$$

Γνωρίζουμε όμως ότι η βαθμίδα ενός 3×3 πίνακα είναι ίση με 1 αν και μόνον αν υπάρχει ένα μη-μηδενικό στοιχείο του πίνακα και όλες οι 2×2 ελάσσονες ορίζουσες που το περιβάλλουν είναι ίσες με μηδέν. Επομένως $\mathbf{r}(A) = 1$ αν και μόνον αν οι ακόλουθες ελάσσονες ορίζουσες δεύτερης τάξης του πίνακα A είναι μηδέν:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} a & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 8a - 16 = 0 \implies a = 2 \\ \qquad\qquad \text{και} \\ \begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 8 & b \end{vmatrix} = 8b - 64 = 0 \implies b = 8 \end{cases}$$

Συνεπώς δείξαμε ότι:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}_A(0) = 2 \iff a = 2 \text{ και } b = 8$$

(2) Για τις τιμές $a = 2$ και $b = 8$, ο πίνακας A παίρνει την μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A. Έχουμε:

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 4 & 4 \\ 4 & 8-t & 8 \\ 4 & 8 & 8-t \end{vmatrix} \xlongequal{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - \Sigma_3} \begin{vmatrix} 2-t & 0 & 4 \\ 4 & -t & 8 \\ 4 & t & 8-t \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} 2-t & 0 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \\ 4 & 1 & 8-t \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_3} t \begin{vmatrix} 2-t & 0 & 4 \\ 8 & 0 & 16-t \\ 4 & 1 & 8-t \end{vmatrix} = (-t) \begin{vmatrix} 2-t & 4 \\ 8 & 16-t \end{vmatrix} = (-t)\big((2-t)(16-t) - 32\big)$$

$$= (-t)(t^2 - 18t) = -t^2(t-18)$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 0$ πολλαπλότητας δύο (όπως ακριβώς περιμέναμε) και $\lambda_2 = 18$ πολλαπλότητας ένα.

- Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}_A(0)$ λύνουμε το παρακάτω ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x = -2y - 2z$$

και άρα

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_A(0) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x = -2y - 2z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -2y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Το σύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ αποτελεί προφανώς μια βάση του ιδιόχωρου $\mathcal{V}_A(0)$ η οποία δεν είναι ορθογώνια διότι

$$\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 4 \neq 0$$

Για να προσδιορίσουμε μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}_A(0)$ εφαρμόζουμε τη διαδικασία Gram-Schmidt.

Διαδικασία Gram-Schmidt:

Θέτουμε $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Τότε $Y_1 = X_1 = (-2, 1, 0)$ και

$$Y_2 = X_2 - \frac{\langle X_2, Y_1\rangle}{\langle Y_1, Y_1\rangle}\cdot Y_1 \quad = \quad \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}\cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{4}{5}\cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\-\frac{4}{5}\\1\end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε τα μέτρα των διανυσμάτων Y_1 και Y_2:

$$\|Y_1\| = \left\|\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle} = \sqrt{5}$$

$$\|Y_2\| = \left\|\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\-\frac{4}{5}\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\-\frac{4}{5}\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\-\frac{4}{5}\\1\end{pmatrix}\right\rangle} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Επομένως μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}_A(0)$ είναι η

$$\left\{F_1 = \frac{Y_1}{\|Y_1\|}, F_2 = \frac{Y_2}{\|Y_2\|}\right\} = \left\{ \begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{2}{3\sqrt{5}}\\-\frac{4}{3\sqrt{5}}\\\frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix} \right\}$$

- Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}_A(18)$ έχουμε το σύστημα:

$$\begin{pmatrix}-16 & 4 & 4\\4 & -10 & 8\\4 & 8 & -10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \implies \begin{cases} -4x+y+z=0\\ 2x-5y+4z=0\\ 2x+4y-5z=0\end{cases} \implies \begin{cases} -4x+y+z=0\\ 2x-5y+4z=0\end{cases}$$

Αν λύσουμε τη πρώτη εξίσωση ως προς y και αντικαταστήσουμε στη δεύτερη βρίσκουμε $2x = z$ και τότε έπεται ότι $y = z$. Άρα

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_A(18) &= \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x = \frac{z}{2} \text{ και } y = z\right\}\\ &= \left\{ \begin{pmatrix}\frac{z}{2}\\z\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid z \in \mathbb{R}\right\}\\ &= \left\{ z\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid z \in \mathbb{R}\right\}\\ &= \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

Επομένως μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}_A(18)$ είναι το σύνολο

$$\{F_3\} = \left\{ \frac{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\|} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix} \right\}$$

Τότε έχουμε τον ορθογώνιο πίνακα

$$P = \begin{pmatrix}F_1 \ F_2 \ F_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

για τον οποίο ισχύει ότι:

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&18\end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A = P \cdot \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&18\end{pmatrix} \cdot {}^tP$$

(3) Για κάθε $m \geq 1$ έχουμε:

$$A = P \cdot \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&18\end{pmatrix} \cdot {}^tP \quad \Longrightarrow \quad A^m = P \cdot \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&18\end{pmatrix}^m \cdot {}^tP = \cdots = 18^{m-1} \cdot \begin{pmatrix}2&4&4\\4&8&8\\4&8&8\end{pmatrix} = 18^{m-1}A \quad \blacksquare$$

Άσκηση 2. *Να προσδιορισθεί ο αριθμός a έτσι ώστε ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ a & 4 & -4 \\ -a & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

να είναι μη-αρνητικός. Ακολούθως να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες ο πίνακας A είναι μη-αρνητικός και έχει μια ιδιοτιμή με πολλαπλότητα ίση με 2, και για τις τιμές αυτές να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε ${}^tP \cdot A \cdot P$ να είναι διαγώνιος.

Λύση. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A είναι συμμετρικός. Ο πίνακας A είναι μη-αρνητικός αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι ≥ 0.

Έχουμε:

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & a & a \\ a & 4-t & -4 \\ -a & -4 & 4-t \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{vmatrix} 1-t & a & -a \\ a & 4-t & -4 \\ 0 & -t & -t \end{vmatrix} = (-t) \begin{vmatrix} 1-t & a & -a \\ a & 4-t & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - \Sigma_3} (-t) \begin{vmatrix} 1-t & 2a & -a \\ a & 8-t & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-t) \begin{vmatrix} 1-t & 2a \\ a & 8-t \end{vmatrix} = (-t)(t^2 - 9t + 8 - 2a^2)$$

$$= (-t)\left(t - \left(\frac{9}{2} + \frac{\sqrt{49+8a^2}}{2}\right)\right)\left(t - \left(\frac{9}{2} - \frac{\sqrt{49+8a^2}}{2}\right)\right)$$

Επομένως έχουμε τις ιδιοτιμές:

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = \frac{9}{2} + \frac{\sqrt{49+8a^2}}{2} > 0, \qquad \lambda_3 = \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{49+8a^2}}{2}$$

και πρέπει $\lambda_3 \geq 0$, δηλαδή

$$9 \geq \sqrt{49+8a^2} \quad \Longrightarrow \quad 81 \geq 49 + 8a^2 \quad \Longrightarrow \quad 8a^2 \leq 32 \quad \Longrightarrow \quad a^2 \leq 4 \Longrightarrow (a+2)(a-2) \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad -2 \leq a \leq 2$$

Άρα ο πίνακας A είναι μη-αρνητικός αν και μόνο αν: $\quad -2 \leq a \leq 2$.

Ο πίνακας A είναι μη-αρνητικός και, επειδή $\lambda_2 > 0$, έχει διπλή ιδιοτιμή αν είτε $\lambda_3 = \lambda_1 = 0$ είτε $\lambda_2 = \lambda_3$. Όμως $\lambda_3 = 0$ αν και μόνον αν $\sqrt{49 + 8a^2} = 9$ αν και μόνον αν $8a^2 = 32$ αν και μόνον αν $a = \pm 2$. Επίσης $\lambda_2 \neq \lambda_3$ διότι διαφορετικά θα έχουμε $\sqrt{49 + 8a^2} = 0$, δηλαδή $0 = 49 + 8a^2 \geq 49$ το οποίο είναι άτοπο. Άρα ο πίνακας A είναι θετικός και έχει διπλή ιδιοτιμή το $\lambda = 0$ αν και μόνον αν $a = \pm 2$, και τότε ο A έχει το $\lambda = 0$ ως ιδιοτιμή με πολλαπλότητα ίση με 2 και το $\lambda = 9$ ως ιδιοτιμή με πολλαπλότητα ίση με 1.

(1) Αν $a = 2$, τότε:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Με τη συνήθη διαδικασία βλέπουμε εύκολα ότι το σύνολο:

$$\left\{ F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ F_2 = \frac{\sqrt{5}}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}_A(0)$, και το σύνολο

$$\left\{ F_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}_A(9)$.

Τότε ο πίνακας

$$P = \begin{pmatrix} F_1 \ F_2 \ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{4}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

είναι ορθογώνιος και ισχύει ότι:

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot {}^tP$$

Μια τετραγωνική ρίζα του A είναι τότε ο πίνακας

$$\sqrt{A} = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot {}^tP = \cdots = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(2) Αν $a = -2$, τότε:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Με τη συνήθη διαδικασία βλέπουμε εύκολα ότι το σύνολο:

$$\left\{ F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ F_2 = \frac{\sqrt{5}}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}_A(0)$, και το σύνολο

$$\left\{ F_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}_A(9)$.

Τότε ο πίνακας

$$Q = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

είναι ορθογώνιος και ισχύει ότι:

$${}^tQ \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad A = Q \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot {}^tQ$$

Μια τετραγωνική ρίζα του A είναι τότε ο πίνακας

$$\sqrt{A} = Q \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot {}^tQ = \cdots = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ ■

Άσκηση 3. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & 0 & -\frac{7}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{7}{2} & 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί πίνακας $B \in \mathsf{M}_3(\mathbb{R})$, έτσι ώστε:

$$B^3 = A$$

Λύση. Έχουμε:

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} \frac{9}{2} - t & 0 & -\frac{7}{2} \\ 0 & -1-t & 0 \\ -\frac{7}{2} & 0 & \frac{9}{2} - t \end{vmatrix} = (-1-t)\begin{vmatrix} \frac{9}{2} - t & -\frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{9}{2} - t \end{vmatrix} = (-1-t)\left(\left(\frac{9}{2} - t\right)^2 - \frac{49}{4}\right)$$

$$= (-1-t)\left(\frac{9}{2} - t + \frac{7}{2}\right)\left(\frac{9}{2} - t - \frac{7}{2}\right) = (-1-t)(8-t)(1-t) = -(t+1)(t-8)(t-1)$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 8, \qquad \lambda_3 = -1$$

πολλαπλότητας ένα. Στη συνέχεια υπολογίζουμε εύκολα ορθοκανονικές βάσεις για τους αντίστοιχους ιδιοχώρους. Βρίσκουμε:

$$\mathcal{V}_A(1) = \left\{ x \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{V}_A(-1) = \left\{ x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{V}_A(8) = \left\{ x \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\left(\left(\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right) \right)$$

Θέτοντας

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

αποκτούμε έναν ορθογώνιο πίνακα P έτσι ώστε

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \implies A = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot {}^tP$$

Θέτουμε

$$B = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot {}^tP = \cdots = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Τότε

$$B^3 = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^3 \cdot {}^tP = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot {}^tP = A \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 4. *Έστω A ένας $n \times n$ συμμετρικός πίνακας πραγματικών αριθμών. Αν οι ιδιοτιμές του A είναι οι αριθμοί 1 και -1, να δειχθεί ότι:*

$$A^2 = I_n$$

Ισχύει το αντίστροφο; Πότε ο πίνακας A είναι θετικός;

Λύση. Επειδή ο πίνακας A είναι συμμετρικός, από το Φασματικό Θεώρημα, υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε

$${}^tP \cdot A \cdot P = \Delta$$

όπου Δ είναι ένας διαγώνιος πίνακα, και τα διαγώνια στοιχεία του είναι οι αριθμοί 1 και -1. Προφανώς τότε θα έχουμε $\Delta^2 = I_n$ και τότε:

$$({}^tP \cdot A \cdot P)^2 = (\Delta)^2 \quad \implies \quad {}^tP \cdot A^2 \cdot P = I_n \quad \implies \quad A^2 = P \cdot I_n \cdot {}^tP = P \cdot {}^tP = I_n$$

Αντίστροφα, έστω A ένας συμμετρικός πίνακας για τον οποίο ισχύει ότι $A^2 = I_n$. Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(t) = t^2 - 1$. Τότε προφανώς $P(A) = A^2 - I_n = O$, και επομένως το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ διαιρεί το πολυώνυμο $P(t) = t^2 - 1) = (t-1)(t+1)$. Άρα το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ είναι ένα εκ των:

$$t-1, \quad t+1, \quad (t-1)(t+1)$$

Αν $Q_A(t) = t - 1$, τότε $A = I_n$ και όλες οι ιδιοτιμές του A είναι ίσες με 1. Αν $Q_A(t) = t + 1$, τότε $A = -I_n$ και όλες οι ιδιοτιμές του A είναι ίσες με -1. Τέλος, αν $Q_A(t) = (t-1)(t+1)$, τότε, επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχουν τις ίδιες ρίζες, έπεται ότι οι ιδιοτιμές του A είναι ίσες με 1 ή -1.

Ο πίνακας A είναι θετικός αν και μόνον αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές. Επειδή οι ιδιοτιμές του A είναι ± 1, αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν ή μόνη ιδιοτιμή του A είναι η $\lambda = 1$. Από τα παραπάνω έπεται ότι ο A είναι θετικός αν και μόνον αν $Q_A(t) = t - 1$ και αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν $A = I_n$. Με άλλα λόγια δείξαμε ότι:

$$A = I_n \quad \iff \quad {}^tA = A > 0 \quad \text{και} \quad A^2 = I_n \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 5. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) *Να δείξετε ότι ο πίνακας A είναι μη-αρνητικός.*
(2) *Να βρείτε μια τετραγωνική ρίζα του A.*

Λύση. Εύκολα βλέπουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι:

$$P_A(t) = -t^2(t-3)$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι: $\lambda_1 = 0$ με πολλαπλότητα ίση με 2, και $\lambda = 3$ με πολλαπλότητα ίση με 1. Επομένως ο συμμετρικός πίνακας A είναι μη-αρνητικός.

Υπολογίζουμε εύκολα μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}_A(0)$ είναι το σύνολο

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

και μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}_A(3)$ είναι το σύνολο

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Άρα θέτοντας

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

αποκτούμε ένα ορθογώνιο πίνακα έτσι ώστε:

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Τότε μια τετραγωνική ρίζα του A είναι ο πίνακας

$$\sqrt{A} = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot {}^tP = \cdots = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} A$$

■

Άσκηση 6. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) *Να δείξετε ότι ο πίνακας A είναι θετικός.*
(2) *Να βρείτε συμμετρικό και αντιστρέψιμο πίνακα B έτσι ώστε: $A = B^2$.*

Λύση. Έχουμε:

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 0 & -1 \\ 0 & 2-t & 0 \\ -1 & 0 & 3-t \end{vmatrix} = (2-t) \begin{vmatrix} 3-t & -1 \\ -1 & 3-t \end{vmatrix} = \cdots = -(t-2)^2(t-4)$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι: $\lambda_1 = 2 > 0$ πολλαπλότητας δυο και $\lambda_2 = 4 > 0$ πολλαπλότητας ένα. Επομένως ο πίνακας A είναι θετικός.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε εύκολα ορθοκανονικές βάσεις για τους αντίστοιχους ιδιοχώρους. Θα έχουμε:

$$\mathcal{V}_A(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Το σύνολο διανυσμάτων

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

αποτελεί μια βάση του ιδιόχωρου $\mathcal{V}_A(2)$ η οποία όπως παρατηρούμε είναι ορθογώνια. Άρα μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}_A(2)$ είναι το σύνολο

$$\left\{ F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}_A(4)$ θα έχουμε:

$$\mathcal{V}(4) = \left\{ \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

και άρα μια ορθοκανονική βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}_A(4)$ είναι η εξής:

$$\left\{ F_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Θέτοντας

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

αποκτούμε έναν ορθογώνιο πίνακα για τον οποίο ισχύει οτι:

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A = P \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot {}^tP$$

Θεωρούμε τον πίνακα

$$B = P \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot {}^tP = \cdots = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος είναι συμμετρικός και αντιστρέψιμος διότι

$$|B| = |P| \cdot \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot |{}^tP| = 4 \neq 0$$

Τότε

$$B^2 = P \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 \cdot {}^tP = P \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot {}^tP = A$$

και άρα βρήκαμε ένα συμμετρικό και αντιστρέψιμο πίνακα $B \in \mathsf{M}_3(\mathbb{R})$, έτσι ώστε: $B^2 = A$. ∎

Άσκηση 7. *Έστω A ένας 4×4 συμμετρικός πίνακας πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι:*

(1) *Ο αριθμός* 1 *είναι ιδιοτιμή του* A *με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα*

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2) *Ο αριθμός* 2 *είναι ιδιοτιμή του* A, *και* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(2) = 3$.

Να βρεθεί ο πίνακας A.

Λύση. Επειδή ο πίνακας A είναι συμμετρικός, από το Φασματικό Θεώρημα έπεται οτι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος. Προφανώς ο ιδοοχώρος $\mathcal{V}_A(1)$ έχει διάσταση ίση με 1 και μια βάση του είναι το διάνυσμα

$$G_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

και μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}_A(1)$ είναι το διάνυσμα

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Επειδή ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος και ο αριθμός 2 είναι ιδιοτιμή του A, και $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(2) = 3$, έπεται ότι η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda = 2$ είναι ίση με 3. Έστω $\{F_2, F_3, F_4\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}_A(2)$. Επειδή οι ιδιοτιμές 1 και 2 είναι διαφορετικές έπεται ότι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι ορθογώνια, και επομένως:

$$\langle F_1, F_2 \rangle = \langle F_1, F_3 \rangle = \langle F_1, F_4 \rangle = 0$$

Άρα το σύνολο $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_4$, και ιδιαίτερα έχουμε ότι:

$$\mathcal{V}_A(1)^{\perp} = \mathcal{V}_A(2)$$

Έστω $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathcal{V}_A(2)$. Τότε $X \in \mathcal{V}_A(1)^{\perp}$, δηλαδή θα έχουμε:

$$\langle F_1, X \rangle = 0 \implies \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \implies \frac{1}{\sqrt{6}}(-x + 2y - w) = 0 \implies w = -x + 2y$$

Άρα

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -x + 2y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και επομένως

$$\mathcal{V}_A(2) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_4 \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Προφανώς το σύνολο στηλών

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

αποτελεί μια βάση του $\mathcal{V}_A(2)$ η οποία δεν είναι ορθοκανονική διότι αν και

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = 0 = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

έχουμε:

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}\right\rangle = -2$$

Εφαρμόζοντας τη διαδικασία Gram-Schmidt προκύπτει ότι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}_A(2)$ είναι το σύνολο

$$\left\{ F_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, F_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}, F_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

Επομένως θα έχουμε ότι το σύνολο $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_4$. Τότε ο πίνακας

$$P = \big(F_1\, F_2\, F_3\, F_4\big) = \begin{pmatrix} -1\sqrt{6} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 0 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

είναι ένας ορθογώνιος πίνακας έτσι ώστε:

$${}^{t}P \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Τότε θα έχουμε:

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot {}^{t}P =$$

$$= \begin{pmatrix} -1\sqrt{6} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7/6 & -1/3 & 0 & -5/6 \\ -1/3 & 16/15 & 0 & 7/15 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -5/6 & 7/15 & 0 & 83/30 \end{pmatrix}$$

Επομένως ο συμμετρικός πίνακας A είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 7/6 & -1/3 & 0 & -5/6 \\ -1/3 & 16/15 & 0 & 7/15 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -5/6 & 7/15 & 0 & 83/30 \end{pmatrix}$$

■

Άσκηση 8. *Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή*

$$\mathsf{q} \,:\, \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathsf{q}(x,y,z) = \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}y^2 + 5z^2 - xy - 2xz + 2yz$$

στους κύριους άξονές της, οι οποίοι και να βρεθούν.

Λύση. Ο πίνακας της τετραγωνικής μορφής q είναι

$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A. Έχουμε:

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} \frac{7}{2}-t & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2}-t & 1 \\ -1 & 1 & 5-t \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_2} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-t & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2}-t & 1 \\ -1 & 1 & 5-t \end{vmatrix} = (3-t)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2}-t & 1 \\ -1 & 1 & 5-t \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - \Sigma_1} (3-t)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 4-t & 1 \\ -1 & 2 & 5-t \end{vmatrix} = (3-t)\begin{vmatrix} 4-t & 1 \\ 2 & 5-t \end{vmatrix} = (3-t)\big((4-t)(5-t)-2\big)$$

$$= (3-t)(t^2-9t+18) = -(t-3)^2(t-6)$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 3$ πολλαπλότητας δυο και $\lambda_2 = 6$ πολλαπλότητας ένα.

Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}_A(3)$ λύνουμε το παρακάτω ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \implies x = y + 2z$$

και άρα

$$\mathcal{V}_A(3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \;\middle|\; x = y + 2z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y+2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \;\middle|\; y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \;\middle|\; y, z \in \mathbb{R} \right\} \implies \mathcal{V}_A(3) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Το παραπάνω σύνολο διανυσμάτων αποτελεί μια βάση του ιδιόχωρου $\mathcal{V}_A(3)$ η οποία όμως δεν είναι ορθογώνια. Για να βρούμε μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}_A(3)$ εφαρμόζουμε τη διαδικασία Gram-Schmidt:

<u>Διαδικασία Gram-Schmidt</u>:

Θέτουμε $X_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ και $X_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$. Τότε $Y_1 = X_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ και

$$\begin{aligned}
Y_2 = X_2 - \frac{\langle X_2, Y_1\rangle}{\langle Y_1, Y_1\rangle}\cdot Y_1 &= \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{\langle\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle}\cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{y}_1$ και $\vec{y}_2$:

$$\|Y_1\| = \left\| \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{y}_2\| = \left\| \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{3}$$

Τότε μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}_A(3)$ είναι

$$\left\{ F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \ F_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}_A(6)$ έχουμε το ομεγενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} -5x - y - 2z = 0 \\ -x - 5y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{array} \right.$$

Προσθέτοντας τις δύο πρώτες εξισώσεις βρίσκουμε $x = -y$ και αντικαθιστώντας στη τρίτη έχουμε ότι $z = 2y$. Επομένως έχουμε:

$$\mathcal{V}_A(6) = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \;\middle|\; x = -y \ \text{ και } \ z = 2y \right\} = \left\{ y \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \right)$$

και άρα μια ορθοκανονική βάση του ιδιόχωρου $\mathcal{V}_(6)$ είναι

$$\left\{ F_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} \right\}$$

Συνεπώς οι κύριοι άξονες της τετραγωνικής μορφής q είναι

$$\left\{ F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \ F_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\ \ F_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} \right\}$$

και η τετραγωνική μορφή q στους κύριους άξονες γράφεται ως εξής:

$$\mathsf{q}(x', y', z') = 3(x')^2 + 3(y')^2 + 6(z')^2 \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 9. *Να προσδιορισθεί το είδος των καμπύλων οι οποίες ορίζονται από τις εξισώσεις:*

$$(C_1): \quad xy = 1$$

$$(C_2): \quad 5x^2 - 4xy + 8y^2 = 1$$

Λύση. Ο πίνακας της τετραγωνικής μορφής $\mathsf{q}(x, y) = xy$ είναι

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4}$$

Συνεπώς έχουμε τις απλές ιδιοτιμές $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ και $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Τότε στους κύριους άξονες $\{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2\}$ η τετραγωνική μορφή q γράφεται ως εξής:

$$\mathsf{q}(x', y') = \frac{1}{2}(x')^2 - \frac{1}{2}(y')^2$$

και άρα η καμπύλη $(C_1): \ xy = 1$ παριστάνει υπερβολή αφού

$$(C_1): \quad \frac{1}{2}(x')^2 - \frac{1}{2}(y')^2 = 1 \implies (x')^2 - (y')^2 = 2: \ \text{υπερβολή}$$

Για τη καμπύλη (C_2) έχουμε ότι πίνακας της τετραγωνικής μορφής $\mathsf{q}(x, y) = 5x^2 - 4xy + 8y^2$ είναι

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

και υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(8-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 13\lambda + 36 = (\lambda - 9)(\lambda - 4)$$

Επομένως έχουμε τις απλές ιδιοτιμές $\lambda_1 = 9$ και $\lambda_2 = 4$. Τότε στους κύριους άξονες $\{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2\}$ η τετραγωνική μορφή q γράφεται ως εξής:

$$\mathsf{q}(x', y') = 9(x')^2 + 4(y')^2$$

και άρα η καμπύλη $(C_2): \ 5x^2 - 4xy + 8y^2 = 1$ παριστάνει έλλειψη διότι

$$(C_2): \quad 9(x')^2 + 4(y')^2 = 1 \implies \frac{(x')^2}{(\frac{1}{3})^2} + \frac{(y')^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1: \ \text{έλλειψη}$$

$$\blacksquare$$

Άσκηση 10. *Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή*

$$\mathsf{q}\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathsf{q}(x, y, z) = 13x^2 + 24y^2 + 29z^2 + 28xy + 8xz + 36yz$$

(1) *Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή* q *στους κύριους άξονές της, οι οποίοι και να βρεθούν.*
(2) *Να βρεθεί το είδος της δευτεροβάθμιας επιφάνειας*

$$\mathcal{S} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid q(x, y, z) = 1\big\}$$

(3) *Να δειχθεί ότι ο πίνακας A της τετραγωνική μορφής* q *είναι θετικός και να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του A.*

Λύση. Θεωρούμε τον πίνακα της τετραγωνικής μορφής q στην συνήθη (ορθοκανονική) βάση του $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 4 \\ 14 & 24 & 18 \\ 4 & 18 & 29 \end{pmatrix}$$

(1) Εύκολα υπολογίζουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι το

$$P_A(t) = |A - tI_3| = -(t-49)(t-1)(t-16)$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι εξής:

$$\lambda_1 = 49, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 16$$

και ιδιαίτερα έπεται ότι ο πίνακας A είναι θετικός.

Με τη συνήθη διαδικασία, έχουμε την ακόλουθη περιγραφή των αντίστοιχων ιδιοχώρων

$$\mathcal{V}_A(49) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{V}_A(1) = \left\{ x \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{V}_A(16) = \left\{ x \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

Επομένως τα διανύσματα

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad G_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

είναι βάσεις των ιδιοχώρων $\mathcal{V}_A(49)$, $\mathcal{V}_A(1)$, και $\mathcal{V}_A(16)$ αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι τα παρεαπάνω διανύσματα είναι ανά δύο ορθογώνια[1], και επομένως, θέτοντας

$$\left\{ F_1 = \frac{G_1}{\|G_1\|} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \frac{G_2}{\|G_2\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \frac{G_3}{\|G_3\|} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

αποκτούμε μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_3$, και τα διανύσματα F_1, F_2, F_3 είναι οι κύριοι άξονες της τετραγωνικής μορφής q.

Η τετραγωνική μορφή q στους κύριους άξονες γράφεται ως εξής:

$$q(x', y', z') = 49(x')^2 + (y')^2 + 16(z')^2$$

(2) Από το μέρος (2) θα έχουμε:

$$\mathcal{S} = \left\{ (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 \mid q(x', y', z') = 1 \right\} = \left\{ (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 \mid 49(x')^2 + (y')^2 + 16(z')^2 = 1 \right\} =$$

$$= \left\{ (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{(x')^2}{(\frac{1}{7})^2} + \frac{(y')^2}{1^2} + \frac{(z')^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1 \right\}$$

και επομένως η δευτεροβάθμια επιφάνεια $\mathcal{S}$ είναι ένα ελλειψοειδές.

[1] Αυτό το περιμένουμε διότι τα παραπάνω διανύσματα είναι ιδιοδιανύσματα του A τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές του A.

(3) Θεωρούμε τον ορθογώνιο πίνακα

$$P = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

ο οποίος έχει την ιδιότητα

$$^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Τότε η τετραγωνική ρίζα του πίνακα A είναι ο πίνακας

$$\sqrt{A} = P \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot {}^tP = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 11. *Να προσδιορισθεί το είδος της τετραγωνικής επιφάνειας η οποία ορίζεται από την εξίσωση:*

$$(\mathcal{S}): \quad 9x^2 - 4xy + 6y^2 + 3z^2 + 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y + 12z + 16 = 0$$

Λύση. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\mathsf{q} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathsf{q}(x,y,z) = 9x^2 - 4xy + 6y^2 + 3z^2$$

Τότε η απεικόνιση q είναι μια τετραγωνική μορφή της οποίας ο πίνακας είναι

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A. Έχουμε:

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 9-t & -2 & 0 \\ -2 & 6-t & 0 \\ 0 & 0 & 3-t \end{vmatrix} = (3-t) \cdot \begin{vmatrix} 9-t & -2 \\ -2 & 6-t \end{vmatrix} = \cdots = -(t-10)\cdot(t-5)\cdot(t-3)$$

και άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι εξής:

$$\lambda_1 = 10, \qquad \lambda_2 = 5, \qquad \lambda_3 = 3$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε ορθοκανονικές βάσεις των αντίστοιχων ιδιοχώρων. Εύκολα βρίσκουμε τα εξής:

$$\mathcal{V}_A(10) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \implies \text{ΟΚΒ του } \mathcal{V}_A(10): \left\{ F_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{V}_A(5) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \implies \text{ΟΚΒ του } \mathcal{V}_A(5): \left\{ F_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{V}_A(3) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \implies \text{ΟΚΒ του } \mathcal{V}_A(3): \left\{ F_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Τότε το σύνολο $\{F_1, F_2, F_3\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_3$ η οποία αποτελείται από τους κύριους άξονες της τετραγωνικής μορφής q.

Θέτοντας

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

αποκτούμε έναν ορθογώνιο πίνακα για τον οποίο ισχύει ότι

$${}^{t}P \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Σημειώνουμε ότι $|P| = 1$ και άρα από το Θεώρημα του Euler, ο ορθογώνιος πίνακας P γεωμετρικά παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) γύρω από άξονα (ϵ) κατά γωνία θ.

Έστω $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3$. Επειδή το σύνολο $\big\{F_1, F_2, F_3\big\}$ είναι μια (ορθοκανονική) βάση του $\mathbb{R}_3$, θα έχουμε μοναδική γραφή γράφεται ως:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x'F_1 + y'F_2 + z'F_3$$

και γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-2x' + y'}{\sqrt{5}}, \quad y = \frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}, \quad z = z'$$

Τότε η εξίσωση της αρχικής επιφάνειας γράφεται ως εξής:

$$10(x')^2 + 5(y')^2 + 3(z')^2 + 2(-2x' + y') + 4(x' + 2y') + 12z' + 16 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad 10(x')^2 + 5(y')^2 + 3(z')^2 + 10y' + 12z' + 16 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad 10(x')^2 + 5\big((y')^2 + 2y' + 1\big) + 3\big((z')^2 + 4z' + 4\big) + 16 - 17 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad 10(x')^2 + 5\big((y')^2 + 2y' + 1\big) + 3\big((z')^2 + 4z' + 4\big) = 1 \qquad (\mathcal{S}')$$

Η επιφάνεια $(\mathcal{S}')$ προέκυψε από την αρχική επιφάνεια $\mathcal{S}$ μετά από στροφή των αξόνων η οποία προσδιορίζεται από τον ορθογώνιο πίνακα P.

Τέλος θέτοντας

$$x'' = x', \quad y'' = y' + 1, \quad z'' = z' + 2$$

δηλαδή εφαρμόζοντας την παράλληλη μεταφορά

$$(x', y', z') \;\longmapsto\; (x'', y'', z'') = (x', y', z') + (0, 1, 2)$$

η επιφάνεια $(\mathcal{S}')$ γράφεται

$$10(x'')^2 + 5(y'')^2 + 3(z'')^2 = 1$$

δηλαδή

$$\frac{(x'')^2}{(\frac{1}{\sqrt{10}})^2} + \frac{(y'')^2}{(\frac{1}{\sqrt{5}})^2} + \frac{(z'')^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = 1 \qquad (\mathcal{S}'')$$

η οποία παριστάνει ελλειψοειδές στο νέο σύστημα συντεταγμένων το οποίο προέκυψε μετά από στροφή και παράλληλη μεταφορά. Επομένως και η αρχική επιφάνεια $(\mathcal{S})$ είναι ένα ελλειψοειδές. ■

Άσκηση 12. *Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή*

$$\mathsf{q} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathsf{q}(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy$$

(1) *Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή* q *στους κύριους άξονές της, οι οποίοι και να βρεθούν.*
(2) *Να προσδιορισθεί το είδος της τετραγωνικής επιφάνειας η οποία ορίζεται από την εξίσωση:*

$$(\mathcal{S}): \quad 3x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy = 8$$

(3) *Να δείξετε ότι ο πίνακας* A *της τετραγωνικής μορφής* q *είναι θετικός και στη συνέχεια να βρεθεί συμμετρικός και αντιστρέψιμος πίνακας* B *έτσι ώστε:* $B^2 = A$.

Λύση. (1) Ο πίνακας της τετραγωνικής μορφής q είναι

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A. Έχουμε:

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & -1 & 0 \\ -1 & 3-t & 0 \\ 0 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)\big((3-t)^2 - 1\big) = (2-t)^2(4-t)$$

και άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 2$ με πολλαπλότητα ίση με δυο και $\lambda_2 = 4$ η οποία είναι απλή.

Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}_A(2)$ λύνουμε το παρακάτω ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies x = y$$

και άρα

$$\mathcal{V}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \;\middle|\; x = y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \;\middle|\; x, z \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \;\middle|\; x, z \in \mathbb{R} \right\} \implies \mathcal{V}(2) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Το σύνολο διανυσμάτων

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

αποτελεί μια βάση τπου $\mathcal{V}_A(2)$ η οποία παρατηρούμε ότι είναι ορθογώνια. Επομένως το σύνολο διανυσμάτων

$$\left\{ F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

αποτελεί μια ορθοκανονική βάση τοπυ $\mathcal{V}_A(2)$.

Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}_A(4)$ έχουμε το παρακάτω ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies y = -x \;\text{ και }\; z = 0$$

και άρα

$$\mathcal{V}_A(4) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \;\middle|\; y = -x \text{ και } z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Συνεπώς μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}_A(4)$ αποτελεί το σύνολο

$$\left\{ F_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Το σύνολο $\{F_1, F_2, F_3\}$ αποτελεί τότε μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_3$ η οποία αποτελείται από τους κύριους άξονες της τετραγωνικής μορφής q. Δηλαδή οι κύριοι άξονες της q είναι

$$\left\{ F_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

και η τετραγωνική μορφή q στους κύριους άξονες γράφεται ως εξής:

$$\mathsf{q}(x', y', z') = 2(x')^2 + 2(y')^2 + 4(z')^2$$

(2) Από το μέρος (2) έχουμε ότι

$$(\mathcal{S}') : \qquad 2(x')^2 + 2(y')^2 + 4(z')^2 = 8 \quad \Longrightarrow \quad \frac{(x')^2}{(2)^2} + \frac{(y')^2}{(2)^2} + \frac{(z')^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

και άρα το είδος της τετραγωνικής επιφάνειας η οποία ορίζεται από την εξίσωση:

$$(\mathcal{S}) : \qquad 3x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy = 8$$

είναι ελλειψοειδές.

(3) Από το ερώτημα (1) έχουμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 2 > 0$, $\lambda_2 = 4 > 0$ και άρα ο πίνακας A είναι θετικός. Πάλι από το ερώτημα (1) γνωρίζουμε ότι υπάρχει ορθογώνιος πίνακας

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

έτσι ώστε

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow A = P \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot {}^tP$$

Θεωρούμε το πίνακα

$$B = P \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot {}^tP = \cdots = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Τότε

$$B^2 = P \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 \cdot {}^tP = P \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot {}^tP = A$$

και επομένως:

$$\sqrt{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 13. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και έστω*

$$f, g \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

δύο αυτοπροσαρτημένοι ενδομορφισμοί του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1)
$$f \circ g = g \circ f$$

(2) *Υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f και του g.*

Λύση. • $(1) \Longrightarrow (2)$ Έστω ότι $f \circ g = g \circ f$. Επειδή οι f και g είναι αυτοπροσαρτημένοι, οι f και g έχουν όλες τις ιδιοτιμές τους στο $\mathbb{R}$. Έστω λ μια ιδιοτιμή του f και έστω $\mathcal{V}_f(\lambda)$ ο αντίστοιχος ιδιοχώρος. Αν $\vec{x} \in \mathcal{V}_f(\lambda)$, τότε $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ και τότε:

$$f(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \implies g(f(\vec{x})) = g(\lambda\vec{x}) \implies (g\circ f)(\vec{x})) = \lambda g(\vec{x}) \implies (f\circ g)(\vec{x})) = \lambda g(\vec{x}) \implies f(g(\vec{x})) = \lambda g(\vec{x})$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι $g(\mathcal{V}_f(\lambda)) \subseteq \mathcal{V}_f(\lambda)$, και αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να ορίσουμε τον επαγόμενο ενδομορφισμό

$$g' = g|_{\mathcal{V}_f(\lambda)} \colon \mathcal{V}_f(\lambda) \longrightarrow \mathcal{V}_f(\lambda), \quad g'(\vec{x}) = g(\vec{x})$$

Προφανώς ο ενδομορφισμός g' του $\mathcal{V}_f(\lambda)$ είναι αυτοπροσαρτημένος διότι ο ενδομορφισμός g είναι αυτοπροσαρτημένος. Από το Φασματικό Θεώρημα, υπάρχει μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}_f(\lambda)$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του g'. Προφανώς τότε τα ιδιοδιανύσματα του g' είναι και ιδιοδιανύσματα του g. Από την άλλη πλευρά τα ιδιοδιανύσματα αυτά είναι και ιδιοδιανύσματα του f διότι είναι μη-μηδενικά (επειδή αποτελούν βάση του $\mathcal{V}_f(\lambda)$) και ανήκουν στον ιδιοχώρο $\mathcal{V}_f(\lambda)$. Επομένως, για κάθε ιδιοτιμή λ του f υπάρχει μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}_f(\lambda)$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f και του g.

Επειδή ο f, ως αυτοπροσαρτημένος, είναι διαγωνοποιήσιμος, έπεται ότι μπορούμε να γράψουμε:

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_f(\lambda_1) \oplus \mathcal{V}_f(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_f(\lambda_k) \quad \text{και} \quad i \neq j \implies \mathcal{V}_f(\lambda_i) \perp \mathcal{V}_f(\lambda_j)$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του f. Έστω $\mathcal{B}_i$ μια ορθοκανονική βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}_f(\lambda_i)$, $1 \leq i \leq k$. Τότε επειδή το παραπάνω άθροισμα είναι ορθογώνιο ευθύ άθροισμα, έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$$

είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f και του g.

• $(2) \Longrightarrow (1)$ Έστω

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$$

μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f και του g. Για κάθε $i = 1, 2, \cdots, n$, έστω ότι

$$f(\vec{e}_i) = \lambda_i\vec{e}_i \quad \text{και} \quad g(\vec{e}_i) = \mu_i\vec{e}_i$$

Τότε, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$:

$$(f \circ g)(\vec{e}_i) = f(g(\vec{e}_i)) = f(\mu_i\vec{e}_i) = \mu_i f(\vec{e}_i) = \mu_i\lambda_i\vec{e}_i = \lambda_i\mu_i\vec{e}_i = \lambda_i g(\vec{e}_i) = g(\lambda_i\vec{e}_i) = g(f(\vec{e}_i) = (g \circ f)(\vec{e}_i)$$

Τότε για κάθε $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n \in \mathcal{E}$, θα έχουμε:

$$(f \circ g)(\vec{x}) = f(g(\vec{x})) = f\left(g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\mu_i\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i\mu_i f(\vec{e}_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mu_i\lambda_i\right)\vec{e}_i =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i\mu_i\right)\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i g(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i g(\lambda_i\vec{e}_i) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i\vec{e}_i\right) = g(f(\vec{x}) = (g \circ f)(\vec{x})$$

Επομένως: $f \circ g = g \circ f$. ■

Άσκηση 14. *Έστω A και B δύο συμμετρικοί $n \times n$ πίνακες πραγματικών αριθμών. Να δειχθεί ότι:*

$$A \cdot B = B \cdot A \iff \text{υπάρχει ορθογώνιος πίνακας } P \text{ έτσι ώστε : } {}^tP \cdot A \cdot P = \Delta \quad \text{και} \quad {}^tP \cdot B \cdot P = \Gamma$$

όπου οι πίνακες Δ και Γ είναι διαγώνιοι.

Λύση. Θεωρούμε τους ενδομορφισμούς

$$f_A \colon \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n, \quad f_A(X) = A \cdot X$$
$$f_B \colon \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n, \quad f_B(X) = B \cdot X$$

Οι ενδομορφισμοί f_A f_B είναι αυτοπροσαρτημένοι, διότι οι πίνακές τους στη συνήθη βάση του $\mathbb{R}_n$, η οποία είναι ορθοκανονική, είναι οι συμμετρικοί πίνακες A και B. Επειδή προφανώς:

$$f_A \circ f_B = f_B \circ f_A \quad \Longleftrightarrow \quad A \cdot B = B \cdot A$$

από την Άσκηση 13 έπεται ότι $A \cdot B = B \cdot A$ αν και μόνον αν υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\mathcal{B} = \{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$ του $\mathbb{R}_n$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f_A και του f_B, δηλαδή από ιδιοδιανύσματα του A και του B. Έτσι αν $A \cdot B = B \cdot A$, τότε θέτοντας

$$P = \begin{pmatrix} F_1 \; F_2 \; \cdots \; F_n \end{pmatrix}$$

αποκτούμε έναν ορθογώνιο πίνακα P έτσι ώστε:

$${}^tP \cdot A \cdot P = \Delta \quad \text{και} \quad {}^tP \cdot B \cdot P = \Gamma$$

όπου οι πίνακες Δ και Γ είναι διαγώνιοι. Αντίστροφα, αν υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε οι παραπάνω σχέσεις να ικανοποιούνται, τότε θα έχουμε

$$A = P \cdot \Delta \cdot {}^tP \quad \text{και} \quad B = P \cdot \Gamma \cdot {}^tP$$

και τότε, επειδή $P \cdot {}^tP = I_n = {}^tP \cdot P$ και επειδή[2] $\Gamma \cdot \Delta = \Delta \cdot \Gamma$, θα έχουμε:

$$A \cdot B = P \cdot \Delta \cdot {}^tP \cdot P \cdot \Gamma \cdot {}^tP = P \cdot \Delta \cdot \Gamma \cdot {}^tP = P \cdot \Gamma \cdot \Delta \cdot {}^tP = P \cdot \Gamma \cdot {}^tP \cdot P \cdot \Delta \cdot {}^tP = B \cdot A \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 15 (Πολική Ανάλυση Ενδομορφισμού). *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και έστω*

$$f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι υπάρχει μια ισομετρία $h \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ του $\mathcal{E}$ και ένας μη-αρνητικός (αυτοπροσαρτημένος) ενδομορφισμός $g \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε:

$$f = h \circ g, \qquad \text{δηλαδή} \quad h^* \circ h = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} \quad \text{και} \quad g^* = g \geq 0$$

Επιπλέον ο f είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν ο g είναι θετικός: $\mathsf{Det}(f) \neq 0 \iff g > 0$.

Λύση. Θεωρούμε τον ενδομορφισμό

$$f^* \circ f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

ο οποίος είναι αυτοπροσαρτημένος, διότι:

$$(f^* \circ f)^* = f^* \circ (f^*)^* = f^* \circ f$$

και μη-αρνητικός, διότι:

$$\langle (f^* \circ f)(\vec{x}), \vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, f^* \circ f)(\vec{x}) \rangle = \langle \vec{x}, f^*(f(\vec{x})) \rangle = \langle f(\vec{x}), f(\vec{x}) \rangle = \| f(\vec{x}) \|^2 \geq 0$$

Επειδή ο ενδομορφισμός $f^* \circ f$ είναι αυτοπροσαρτημένος και μη-αρνητικός, υπάρχει μια τετραγωνική ρίζα $\sqrt{f^* \circ f}$ του $f^* \circ f$, δηλαδή ο ενδομορφισμός

$$\sqrt{f^* \circ f} \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \quad \text{είναι αυτοπροσαρτημένος, μη-αρνητικός και} \quad \left(\sqrt{f^* \circ f} \right)^2 = f^* \circ f$$

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Τότε:

$$\| \sqrt{f^* \circ f}(\vec{x}) \|^2 = \langle \sqrt{f^* \circ f}(\vec{x}), \sqrt{f^* \circ f}(\vec{x}) \rangle = \left\langle \sqrt{f^* \circ f}^{\,*} \big(\sqrt{f^* \circ f}(\vec{x}) \big), \vec{x} \right\rangle = \left\langle \big(\sqrt{f^* \circ f} \circ \sqrt{f^* \circ f} \big)(\vec{x}), \vec{x} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \left(\sqrt{f^* \circ f} \right)^2 (\vec{x}), \vec{x} \right\rangle = \langle (f^* \circ f)(\vec{x}), \vec{x} \rangle = \langle (f^*(f(\vec{x})), \vec{x} \rangle = \langle f(\vec{x}), f(\vec{x}) \rangle = \| f(\vec{x}) \|^2$$

Άρα, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$\left\| \sqrt{f^* \circ f}\, (\vec{x}) \right\| = \left\| f(\vec{x}) \right\|$$

[2] Διαγώνιοι πίνακες μετατίθενται.

Αν $\vec{x} \in \mathcal{E}$, θα έχουμε:

$$\vec{x} \in \mathsf{Ker}(f) \iff f(\vec{x}) = \vec{0} \iff \big\|f(\vec{x})\big\| = 0 \iff \big\|\sqrt{f^* \circ f}\,(\vec{x})\big\| = 0 \iff \sqrt{f^* \circ f}\,(\vec{x}) = \vec{0}$$
$$\iff \vec{x} \in \mathsf{Ker}\left(\sqrt{f^* \circ f}\right)$$

Άρα θα έχουμε:

$$\mathsf{Ker}(f) = \mathsf{Ker}\left(\sqrt{f^* \circ f}\,\right)$$

Ορίζουμε απεικόνιση

$$h_1\colon \mathsf{Im}\left(\sqrt{f^* \circ f}\,\right) \longrightarrow \mathsf{Im}(f), \quad h_1\big(\big(\sqrt{f^* \circ f}\,\big)\big)(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

Η παραπάνω απεικόνιση είναι καλά ορισμένη διότι αν $\big(\sqrt{f^* \circ f}\,\big)(\vec{x}) = \big(\sqrt{f^* \circ f}\,\big)(\vec{y})$, τότε $\big(\sqrt{f^* \circ f}\,\big)(\vec{x}-\vec{y}) = \vec{0}$, δηλαδή $\vec{x}-\vec{y} \in \mathsf{Ker}\left(\sqrt{f^* \circ f}\,\right) = \mathsf{Ker}(f)$, και επομένως $f(\vec{x}-\vec{y}) = \vec{0}$. Άρα $\big(\sqrt{f^* \circ f}\,\big)(\vec{x}) = f(\vec{x}) = f(\vec{y}) = \big(\sqrt{f^* \circ f}\,\big)(\vec{x})(\vec{y})$. Άρα η απεικόνιση h_1 είναι καλά ορισμένη και εύκολα βλέπουμε ότι είναι γραμμική. Αν $f(\vec{x}) \in \mathsf{Im}(f)$, τότε $h_1\big(\big(\sqrt{f^* \circ f}\,\big)\big)(\vec{x}) = f(\vec{x})$ και επομένως η απεικόνιση h_1 είναι επιμορφισμός. Επιπλέον, $\forall \vec{y} = \big(\sqrt{f^* \circ f}\,\big)(\vec{x})$, θα έχουμε:

$$\|h_1(\vec{y}\| = \big\|h_1\big(\big(\sqrt{f^* \circ f}\,\big)(\vec{x})\big)\big\| = \|f(\vec{x})\| = \big\|\sqrt{f^* \circ f}\,(\vec{x})\big\|$$

και επομένως ο ενδομορφισμός h_1 είναι μια ισομετρία. Θα επεκτείνουμε την ισομετρία h_1 σε μια ισομετρία

$$h\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

ως εξής. Έστω $\mathcal{B}_1 = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k\big\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathsf{Im}\left(\sqrt{f^* \circ f}\,\right)$ την οποία επεκτείνουμε σε μια ορθοκανονική βάση $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \cdots, \vec{e}_n\big\}$ του $\mathcal{E}$. Επειδή η γραμμική απεικόνιση h_1 είναι ισομετρία, έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{C}_1 = \big\{\vec{\epsilon}_1 = h_1(\vec{e}_1), \vec{\epsilon}_2 = h_1(\vec{e}_2), \cdots, \vec{\epsilon}_k = h_1(\vec{e}_k)\big\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathsf{Im}(f)$ την οποία συμπληρώνουμε σε μια ορθοκανονική βάση $\mathcal{C} = \big\{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_k, \vec{\epsilon}_{k+1}, \cdots, \vec{\epsilon}_n\big\}$ του $\mathcal{E}$. Ορίζουμε τότε $h\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ να είναι ο μοναδικός ενδομορφισμός h έτσι ώστε $h(\vec{e}_i) = \vec{\epsilon}_i$, $1 \leq i \leq n$. Επειδή ο h στέλνει ορθοκανονική βάση σε ορθοκανονική βάση, έπεται ότι ο h είναι ισομετρία.

Θεωρούμε τη σύνθεση ενδομορφισμών

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\quad\sqrt{f^* \circ f}\quad} \mathcal{E} \xrightarrow{\qquad h \qquad} \mathcal{E}$$

Τότε, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$\Big(h \circ \big(\sqrt{f^* \circ f}\,\big)\Big)(\vec{x}) = h\big(\sqrt{f^* \circ f}\,\big)(\vec{x})\big) = h_1\big(\big(\sqrt{f^* \circ f}\,\big)\big)(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

Επομένως

$$f = h \circ \left(\sqrt{f^* \circ f}\,\right)$$

όπου ο ενδομορφισμός h είναι ισομετρία και ο ενδομορφισμός $g = \sqrt{f^* \circ f}$ είναι αυτοπροσαρτημένος και μη-αρνητικός.

Αν ο ενδομορφισμός f είναι ισομορφισμός, τότε και ο ενδομορφισμός $f^* \circ f$ είναι θετικός διότι αν

$$\langle (f^* \circ f)(\vec{x}), \vec{x}\,\rangle = 0 \implies \|f(\vec{x})\|^2 = 0 \implies f(\vec{x}) = \vec{0} \implies \vec{x} = \vec{0}$$

Άρα $f^* \circ f > 0$. Επειδή γνωρίζουμε ότι η τετραγωνική ρίζα θετικού ενδομορφισμού είναι θετικός ενδομορφισμός, έπεται ότι ο ενδομορφισμός $\sqrt{f^* \circ f}$ είναι θετικός.

Αντίστροφα, αν ο ενδομορφισμός ο ενδομορφισμός $\sqrt{f^* \circ f}$ είναι θετικός, τότε ιδιαίτερα είναι ισομορφισμός. Επειδή ο ενδομορφισμός h είναι ισομετρία, και άρα ισομορφισμός, και επειδή $f = h \circ \left(\sqrt{f^* \circ f}\,\right)$, έπεται ότι ο ενδομορφισμός f είναι ισομορφισμός. ■

Παρατήρηση 1. *Αν $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$, τότε εργαζόμεμνοι με τον ενδομορφισμό $f \circ f^*\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, προκύπτει ότι υπάρχει ισομετρία v του $\mathcal{E}$ και μη-αρνητικός ενδομορφισμός v του E έτσι ώστε:*

$$f = \mathsf{v} \circ \mathsf{u}, \qquad \textit{δηλαδή} \quad \mathsf{v}^* \circ \mathsf{v} = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} \quad \textit{και} \quad \mathsf{u}^* = \mathsf{u} \geq 0$$

Επιπλέον: ο f είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν ο u είναι θετικός: $\mathsf{Det}(f) \neq 0 \iff \mathsf{u} > 0$. ■

Άσκηση 16. *Για κάθε πίνακα $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$, υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P και μη-αρνητικός συμμετρικός πίνακας U έτσι ώστε:*

$$A = P \cdot U$$

Επιπλέον ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ο πινακας U είναι συμμετρικός και θετικός.

Λύση. Θεωρούμε τον ενδομορφισμό

$$f_A \colon \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n, \quad f_A(X) = A \cdot X$$

Τότε από την Άσκηση 15, έπεται ότι υπάρχει ισομετρία h του $\mathbb{R}_n$ και μη-αρνητικός αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός g του $\mathbb{R}_n$ έτσι ώστε:

$$f_A = h \circ g$$

Ο πίνακας του ενδομορφισμού f_A στην κανονική βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}_n$, η οποία είναι ορθοκανονική, είναι ο A, ο πίνακας της ισομετρίας h στην ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ είναι ένας ορθογώνιος πίνακας P, και ο πίνακας του μη-αρνητικού αυτοπροσαρτημένου ενδομορφισμού g στην ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ είναι ένας μη-αρνητικός συμμετρικός πίνακας U. Επομένως θα έχουμε:

$$A = P \cdot U, \quad \text{όπου :} \quad {}^tP \cdot P = I_n \quad \text{και} \quad {}^tU = U \geq 0$$ ■

Παρατήρηση 2. *Για κάθε πίνακα $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$, υπάρχει ορθογώνιος πίνακας Q και μη-αρνητικός συμμετρικός πίνακας V έτσι ώστε:*

$$A = V \cdot Q$$

Επιπλέον ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ο πινακας V είναι συμμετρικός και θετικός. ■

Άσκηση 17 (Νόμος Αδρανείας του Sylvester)**.** *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} = n$*, και*

$$\mathsf{q} \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$$

μια τετραγωνική μορφή επί του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι υπάρχει βάση $\mathcal{C} = \{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_n\}$ του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε

$$\mathsf{q}(x_1\vec{\epsilon}_1 + x_2\vec{\epsilon}_2 + \cdots + x_n\vec{\epsilon}_n) = x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_r^2$$

και οι θετικοί ακέραιοι s και r, άρα και το ζεύγος (s, r), εξαρτώνται μόνο από την τετραγωνική μορφή q.

Λύση. Από τον ορισμό της τετραγωνικής μορφής q, υπάρχει ορθοκανονική βάση $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ του $\mathcal{E}$, και συμμετρικός $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών $A = (a_{ij})$, έτσι ώστε:

Για κάθε $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n \in \mathcal{E}$:

$$\mathsf{q}(\vec{x}) = {}^tX \cdot A \cdot X, \quad \text{όπου} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Έστω $\mathcal{D} = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ οι κύριοι άξονες της q, δηλαδή το σύνολο $\mathcal{D}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$ και, αν $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα A, τότε, $\forall \vec{x} = x_1\vec{\varepsilon}_1 + x_2\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + x_n\vec{\varepsilon}_n \in \mathcal{E}$:

$$\mathsf{q}(\vec{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

Υπενθυμίζουμε ότι επειδή ο πίνακας A είναι συμμετρικός από το Φασματικό Θεώρημα, υπάρχει ορθογλώνιος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας ${}^tP \cdot A \cdot P$ να είναι ένας διαγώνιος πίνακας Δ και στη διαγώνιο είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A. Τότε οι συνιστώσες των κυρίων αξόνων στην ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ δίνονται από τις στήλες του ορθογλωνιου πίνακα P.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, διαφορετικά αναδιατάσσουμε τα διανύσματα της βάσης $\mathcal{B}$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ είναι θετικές, οι ιδιοτιμές $\lambda_{s+1}, \lambda_{s+2}, \cdots, \lambda_r$ είναι αρνητικές, και οι υπολοιπες ιδιοτιμές $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \cdots, \lambda_n$ είναι ίσες με μηδέν. Προφανώς ο αριθμός r συμπίπτει με τη βαθμίδα του πίνακα A, διότι $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(\Delta) = r$. Θεωρούμε το σύνολο διανυσμάτων:

$$\vec{\epsilon}_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\,\vec{\varepsilon}_1, \quad \vec{\epsilon}_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\,\vec{\varepsilon}_2, \quad \cdots, \quad \vec{\epsilon}_s = \frac{1}{\sqrt{\lambda_s}}\,\vec{\varepsilon}_s$$

$$\vec{\epsilon}_{s+1} = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{s+1}}}\,\vec{\varepsilon}_{s+1}, \quad \vec{\epsilon}_{s+2} = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{s+2}}}\,\vec{\varepsilon}_{s+2}, \quad \cdots, \quad \vec{\epsilon}_r = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_r}}\,\vec{\varepsilon}_r$$

$$\vec{\epsilon}_{r+1} = \vec{\varepsilon}_{r+1}, \quad \vec{\epsilon}_{r+2} = \vec{\varepsilon}_{r+2}, \quad \cdots, \quad \vec{\epsilon}_n = \vec{\varepsilon}_n$$

Τότε προφανώς το σύνολο διανυσμάτων

$$\mathcal{C} = \big\{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_n\big\}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{E}$ και ο πίνακας της τετραγωνικής μορφής q στη βάση $\mathcal{C}$ είναι διαγώνιος, και τα πρώτα s διαγώνια στοιχεία είναι ίσα με 1, τα επόμενα $r - s$ διαγώνια στοιχεία είναι ίσα με -1, και τα υπόλοιπα $n - r$ στοιχεία τηες διαγωνίου είναι ίσα με 0. Άρα το πλήθος των μη-μηδενικών στοιχείων του διαγώνιου πίνακα είναι ίσο με r. Άρα $\mathbf{r}(A) = r$.

Τότε, για κάθε διάνυσμα $\vec{x} = x_1\vec{\epsilon}_1 + x_2\vec{\epsilon}_2 + \cdots + x_n\vec{\epsilon}_n \in \mathcal{E}$:

$$\mathsf{q}(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - x_{s+2}^2 - \cdots - x_r^2$$

Έστω

$$\mathcal{C}' = \big\{\vec{\epsilon}'_1, \vec{\epsilon}'_2, \cdots, \vec{\epsilon}'_n\big\}$$

μια άλλη βάση στην οποία ο πίνακας της q είναι, $\forall \vec{x} = x_1\vec{\epsilon}_1 + x_2\vec{\epsilon}_2 + \cdots + x_n\vec{\epsilon}_n \in \mathcal{E}$:

$$\mathsf{q}(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{s'}^2 - x_{s'+1}^2 - x_{s'+2}^2 - \cdots - x_{r'}^2$$

Τότε ο πίνακας της q στη βάση $\mathcal{B}$ είναι διαγώνιος και τα πρώτα s' διαγώνια στοιχεία είναι ίσα με 1, τα επόμενα $r' - s'$ διαγώνια στοιχεία είναι ίσα με -1, και τα υπόλοιπα $n - r$ στοιχεία τηες διαγωνίου είναι ίσα με 0. Άρα το πλήθος των μη-μηδενικών στοιχείων του διαγώνιου πίνακα είναι ίσο με r'. Άρα $\mathbf{r}(A) = r'$. Επομένως $r' = \mathbf{r}(A) = r$. Έστω

$$\mathcal{U} = \mathcal{L}\big(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_s\big)$$

ο υπόχωρος του $\mathcal{E}$ ο οποίος παραγεται από τα διανύσματα $\big\{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \cdots, \vec{\epsilon}_s\big\}$, και

$$\mathcal{V} = \mathcal{L}\big(\vec{\epsilon}'_{s'+1}, \vec{\epsilon}'_{s'+2}, \cdots, \vec{\epsilon}'_n\big)$$

ο υπόχωρος του $\mathcal{E}$ ο οποίος παραγεται από τα διανύσματα $\big\{\vec{\epsilon}'_{s'+1}, \vec{\epsilon}'_{s'+2}, \cdots, \vec{\epsilon}'_n\big\}$.

Προφανώς θα έχουμε:

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{U}: \quad \mathsf{q}(\vec{x}) \geq 0 \qquad \text{και} \qquad \forall \vec{x} \in \mathcal{V}: \quad \mathsf{q}(\vec{x}) \leq 0$$

Επειδή $\forall \vec{x} \in \mathcal{U}$ έχουμε $\mathsf{q}(\vec{x}) = 0$ αν και μόνον αν $\vec{x} = \vec{0}$ και $\forall \vec{x} \in \mathcal{V}$ έχουμε $\mathsf{q}(\vec{x}) = 0$ αν και μόνον αν $\vec{x} = \vec{0}$, έπεται ότι Επομένως:

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}: \quad \mathsf{q}(\vec{x}) = 0 \quad \text{και άρα}: \quad \vec{x} = \vec{0}$$

Άρα το άθροισμα υπόχωρων $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ είναι ευθύ, δηλαδή $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, και επομένως

$$s + n - s' = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{U} + \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathcal{V} = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}(\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) \;\leq\; n \qquad \Longrightarrow \qquad s \;\leq\; s'$$

Παρόμοια δείχνουμε, εναλλάσσοντας τους ρόλους των βάσεων $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ ότι $s' \leq s$. Επομένως:

$$s = s' \qquad \blacksquare$$

Το ζεύγος θετικών ακεραίων το ζεύγος (s, r) στην παράπανω Άσκηση καλείται ο **δείκτης** της τετραγωνικής μορφής q. Με άλλα λόγια, ο δείκτης (s, r) της τετραγωνικής μορφής q είναι το ζεύγος

$$(s, r) = \big(\text{πλήθος θετικών ιδιοτιμών της}\,\mathsf{q}, \ \text{βαθμίδα της}\,\mathsf{q}\big)$$

Άσκηση 18. *Να βρεθεί ο δείκτης της τετραγωνικής μορφής*

$$\mathsf{q}\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathsf{q}(x, y, z) = xy + xz + yz$$

Λύση. Ο πίνακας της q είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε εύκολα ότι

$$P_A(t) = -(t-1)\left(t + \frac{1}{2}\right)^2$$

και άρα οι ιδιοτιμές του A είναι οι εξής

$$\lambda = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} \ (\text{διπλή})$$

Ιδιαίτερα έπεται ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος διότι δεν έχει το 0 ως ιδιοτιμή. Αυτό σημαίνει ότι $\mathbf{r}(A) = r = 3$. Επειδή ο A έχει ακριβώς μια θετική ιδιοτιμή, έπεται ότι $s = 1$ και επομένως ο δείκτης της q είναι ίσος με

$$\text{δείκτης της } \mathsf{q} = (1, 3)$$

Η τετραγωνική μορφή στους κύριους άξονές της γράφεται

$$\mathsf{q}(x', y', z') = (x')^2 - \frac{1}{2}(y')^2 - \frac{1}{2}(z')^2$$

και στη βάση $\mathcal{C}'$ της Άσκησης 17 τετραγωνική μορφλη γράφεται

$$\mathsf{q}(x'', y'', z'') = (x'')^2 - (y'')^2 - (z'')^2$$

■