ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

$\boxed{\text{ΤΜΗΜΑ } \mathbf{B'}}$ (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:
http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII2020/LAII2020.html

Παρασκευή 28 Φεβρουαρίου 2020

Άσκηση 1. *Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης στο* $\mathbb{R}[t]$ *του πολυωνύμου* $A(t) = t^8 - 7t^5 + \frac{3}{5}t + \frac{1}{2}$ *με το πολυώνυμο* $B(t) = 15t^3 + 6t^2 + 7t + \frac{1}{2}$.

Άσκηση 2. *Να γραφούν τα ακόλουθα πολυώνυμα ως γινόμενα αναγώγων πολυωνύμων στα* $\mathbb{Q}[t]$, $\mathbb{R}[t]$, *και* $\mathbb{C}[t]$:

$$P(t) = t^4 - 2t^2 + 3t - 2, \qquad Q(t) = t^3 + 4t^2 - 4t - 1$$

Άσκηση 3. *Θεωρούμε ένα πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές*

$$P(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

όπου $a_n \neq 0$ *και έστω* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ *οι ρίζες του* $P(t)$ *στο* $\mathbb{C}$, *οπότε μπορούμε να γράψουμε:*

$$P(t) = a_n(t - \lambda_1)(t - \lambda_2)\cdots(t - \lambda_n)$$

Γράφουμε το παραπάνω γινόμενο ως εξής:

$$P(t) = a_n\Big(t^n - s_1 t^{n-1} + s_2 t^{n-2} - \cdots + (-1)^n s_n\Big)$$

Να δειχθεί ότι:

$$s_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$$

$$s_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j$$

$$s_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \lambda_i \lambda_j \lambda_k$$

$$\vdots$$

$$s_n = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

και επιπλέον:

$$s_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}, \quad 1 \leq k \leq n$$

• • •

Άσκηση 4. *Θεωρούμε τα διανύσματα* $\vec{\varepsilon}_1 = (1,1,1)$, $\vec{\varepsilon}_2 = (1,0,1)$ *του* $\mathbb{R}^3$. *Αν* $\mathcal{V} = \langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2 \rangle$, *να βρεθεί υπόχωρος* $\mathcal{W}$ *του* $\mathbb{R}^3$ *έτσι ώστε*

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$$

Άσκηση 5. *Θεωρούμε τα ακόλουθα υποσύνολα του* $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ *:*

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} t & 2t \\ -t & t \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} t & s \\ t-3s & -s \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} t & s \\ 0 & r \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid t - 2s + r = 0 \in \mathbb{R} \right\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι τα υποσύνολα* $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ *κια* $\mathcal{W}$ *είναι υπόχωροι του* $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ *και να βρεθεί η διάσταση τους.*
(2) *Να εξετασθεί αν το άθροισμα* $\mathcal{U} + \mathcal{V} + \mathcal{W}$ *είναι ευθύ.*
(3) *Να δειχθεί ότι*

$$\mathsf{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{U} \oplus (\mathcal{V} + \mathcal{W})$$

Άσκηση 6. *Έστω ο* $\mathbb{K}$*-διανυσματικός χώρος* $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ *και η γραμμική απεικόνιση*

$$g\colon \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathsf{M}_n(\mathbb{K}), \quad g(A) = \frac{{}^tA + A}{2}$$

Να δειχθεί ότι υπάρχει βάση $\mathcal{C}$ *του* $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ *έτσι ώστε:*

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

όπου το πλήθος των εμφανίσεων της μονάδας 1 *στον παραπάνω πίνακα είναι ίσο με* $\frac{n^2+n}{2}$.

Άσκηση 7. *Έστω* $\mathcal{U}$ *και* $\mathcal{V}$ *δύο υπόχωροι ενός* $\mathbb{K}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathcal{E}$ *πεπερασμένης διάστασης. Υποθέτουμε ότι:*

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} + \mathcal{W}) = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) + 1$$

Να δεχιθεί ότι:

$$\textit{είτε} \quad \mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{U} \;\; \textit{και} \;\; \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{V} \quad \textit{είτε} \quad \mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{V} \;\; \textit{και} \;\; \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{U}$$

Άσκηση 8. *Γνωρίζοντας ότι ο* $\mathbb{K}$*-διανυσματιός χώρτος* $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ *είναι το ευθύ άθροισμα:*

$$\mathsf{M}_n(\mathbb{K}) = \mathsf{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathsf{A}_n(\mathbb{K})$$

όπου $\mathsf{S}_n(\mathbb{K})$ *είναι ο υπόχωρος των συμμετρικών πινάκων και* $\mathsf{A}_n(\mathbb{K})$ *είναι υπόχωρος των αντισυμμετρικών πινάκων, να γραφεί (μοναδικά) ο* $n \times n$ *πίνακας*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ως άθροισμα ενός συμμετρικού πίνακα και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

Άσκηση 9. *Στον διανυσματικό χώρο* $\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *θεωρούμε τα ακόλουθα υποσύνολα :*

$$\mathcal{V} = \big\{A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \mid a_{ij} = 0,\ \forall i,j = 1,\cdots,n,\ j \leq i\big\}$$
$$\mathcal{W} = \big\{A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \mid a_{ij} = 0,\ \forall i,j = 1,\cdots,n,\ i \leq j\big\}$$
$$\mathcal{Z} = \big\{A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \mid a_{ij} = 0,\ \forall i,j = 1,\cdots,n,\ i \neq j\big\}$$

Να δείξετε ότι τα υποσύνολα $\mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{Z}$ *είναι υπόχωροι του* $\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *και ακολούθως να δείξετε ότι:*

$$\mathsf{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{Z} \oplus \mathcal{W}$$

Άσκηση 10. *Θεωρούμε τους ακόλουθους υπόχωρους του* $\mathbb{R}^n$*:*

$$\mathcal{V} = \big\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\big\}$$
$$\mathcal{W} = \big\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \cdots = x_n\big\}$$

Να δείξετε ότι $\mathbb{R}^n = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$.

Άσκηση 11. *Θεωρούμε τους ακόλουθους υποχώρους του* $\mathbb{R}^3$*:*

$$\mathcal{W}_1 = \big\{(a, b, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\big\}$$
$$\mathcal{W}_2 = \big\{(0, 0, c) \in \mathbb{R}^3 \mid c \in \mathbb{R}\big\}$$
$$\mathcal{W}_3 = \big\{(d, 0, d) \in \mathbb{R}^3 \mid d \in \mathbb{R}\big\}$$

να εξετασθεί αν ισχύει ότι: $\mathbb{R}^3 = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$.

Αν $\mathbb{R}^3 \neq \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$, *να βρεθούν υπόχωροι* $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$ *του* $\mathbb{R}^3$ *έτσι ώστε:*

$$\mathbb{R}^3 = (\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) \oplus \mathcal{U}_1 = (\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_3) \oplus \mathcal{U}_2 = (\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3) \oplus \mathcal{U}_3$$

Άσκηση 12. *Θεωρούμε τις ακόλουθες γραμμικές απεικονίσεις* $f_i \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $1 \leq i \leq 4$*:*

$$f_1(x, y, z) = (x + y,\ y + z,\ z + x)$$
$$f_2(x, y, z) = (x - y,\ y - z,\ 0)$$
$$f_3(x, y, z) = (-y,\ x,\ z)$$
$$f_4(x, y, z) = (x,\ y,\ y)$$

Να δείξετε ότι:

$$\mathbb{R}^3 = \mathsf{Im}(f_i) \oplus \mathsf{Ker}(f_i)$$

Άσκηση 13. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω από το σώμα* $\mathbb{K}$ *με* $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{E} < \infty$, *και* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *μια γραμμική απεικόνιση.*

(1) *Αν* $\dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Ker}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Ker}(f^2)$, *τότε:* $\mathcal{E} = \mathsf{Ker}(f) \oplus \mathsf{Im}(f)$.
(2) *Αν* $\dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Im}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Im}(f^2)$, *τότε:* $\mathcal{E} = \mathsf{Ker}(f) \oplus \mathsf{Im}(f)$.

Άσκηση 14. *Έστω ότι* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ *και* $g : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ *είναι γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος* $\mathbb{K}$. *Συμβολίζουμε με* $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Im}(f)$ *και* $\mathbf{r}(g) = \dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Im}(g)$ *τη βαθμίδα των* f *και* g *αντίστοιχα.*

(1) *Να δείξετε ότι* $\mathbf{r}(g \circ f) = \mathbf{r}(f)$ *αν και μόνο αν* $\mathsf{Im}(f) \cap \mathsf{Ker}(g) = \{\vec{0}\}$.
(2) *Να δείξετε ότι* $\mathbf{r}(g \circ f) = \mathbf{r}(g)$ *αν και μόνο αν* $\mathsf{Im}(f) + \mathsf{Ker}(g) = \mathcal{F}$.
(3) *Να δείξετε ότι* $\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(g \circ f) = \mathbf{r}(g)$ *αν και μόνο αν* $\mathcal{F} = \mathsf{Im}(f) \oplus \mathsf{Ker}(g)$.

Άσκηση 15. *Έστω $f_i \colon \mathcal{E}_i \longrightarrow \mathcal{F}_i$, $1 \leq i \leq n$, είναι γραμμικές απεικονίσεις, τότε ορίζοντας*

$$f \colon \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \times \cdots \times \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \cdots \times \mathcal{F}_n, \quad f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) = \big((f_1(\vec{x}_1), f_2(\vec{x}_2), \cdots, f_n(\vec{x}_n)\big)$$

(1) *Να δειχθεί ότι η f είναι μια γραμμική απεικόνιση*[1].
(2) *Να δειχθεί ότι η f είναι μονομορφισμός, επιμορφισμός ή ισομορφισμός αντίστοιχα, αν και μόνον αν κάθε f_i, $1 \leq i \leq n$, είναι μονομορφισμός, επιμορφισμός ή ισομορφισμός αντίστοιχα.*
(3) *Να προσδιορισθεί ο πυρήνας $\mathsf{Ker}(f)$ και η εικόνα $\mathsf{Im}(f)$ συναρτήσει των πυρήνων $\mathsf{Ker}(f_i)$ και των εικόνων $\mathsf{Im}(f_i)$ των f_i, $1 \leq i \leq n$.*
(4) *Αν $\mathcal{B}_i$ και $\mathcal{C}_i$ είναι βάσεις των $\mathbb{K}$-διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}_i$ και $\mathcal{F}_i$ αντίστοιχα, $1 \leq i \leq n$, να δειχθεί ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \cdots \times \mathcal{B}_n$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \times \cdots \times \mathcal{E}_n$ και το σύνολο $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times \cdots \times \mathcal{C}_n$ είναι μια βάση του $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \cdots \times \mathcal{F}_n$.*
(5) *Να προσδιορισθεί ο πίνακας $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)$ της f συναρτήσει των πινάκων $M^{\mathcal{C}_i}_{\mathcal{B}_i}(f_i)$, $1 \leq i \leq n$.*

Άσκηση 16. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Συμβολίζουμε με $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (k-φορές) την σύνθεση της f με τον εαυτό της k-φορές, όπου $k \geq 1$.*

(1) *Να δείξετε ότι υπάρχει μια (αύξουσα) ακολουθία υποχώρων του $\mathcal{E}$:*

$$\{\vec{0}\} \subseteq \mathsf{Ker}(f) \subseteq \mathsf{Ker}(f^2) \subseteq \cdots \subseteq \mathsf{Ker}(f^k) \subseteq \mathsf{Ker}(f^{k+1}) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{E}$$

για την οποία υπάρχει $\kappa \geq 0$ έτσι ώστε: $\mathsf{Ker}(f^\kappa) = \mathsf{Ker}(f^{\kappa+1}) = \mathsf{Ker}(f^{\kappa+2}) = \cdots$.

(2) *Να δείξετε ότι υπάρχει μια (φθίνουσα) ακολουθία υποχώρων του $\mathcal{E}$:*

$$\{\vec{0}\} \subseteq \cdots \subseteq \mathsf{Im}(f^{\lambda+1}) \subseteq \mathsf{Im}(f^\lambda) \subseteq \cdots \subseteq \mathsf{Im}(f^2) \subseteq \mathsf{Im}(f) \subseteq \mathcal{E}$$

για την οποία υπάρχει $\lambda \geq 0$ έτσι ώστε: $\mathsf{Im}(f^\lambda) = \mathsf{Im}(f^{\lambda+1}) = \mathsf{Im}(f^{\lambda+2}) = \cdots$.

Άσκηση 17. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Συμβολίζουμε με $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (k-φορές) την σύνθεση της f με τον εαυτό της k-φορές, όπου $k \geq 1$.*

Να δειχθεί ότι υπάρχει $m \geq 1$ έτσι ώστε:

$$\mathcal{E} = \mathsf{Ker}(f^m) \oplus \mathsf{Im}(f^m)$$

Υπόδειξη: Θέτουμε $m = \max\{\kappa, \lambda\}$, όπου τα κ και λ είναι όπως στο (1) και (2) της Άσκησης 16 αντίστοιχα.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ένας ενδομορφισμός του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$, τότε ένας υπόχωρος $\mathcal{V}$ του $\mathcal{E}$ καλείται f-**αναλλοίωτος**, αν: $f(\vec{x}) \in \mathcal{V}$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{V}$. Αν ο υπόχωρος $\mathcal{V}$ είναι f-αναλλοίωτος, τότε ορίζοντας

$$f_{\mathcal{V}} \colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}, \quad f_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

αποκτούμε έναν ενδομορφισμό του $\mathcal{V}$, ο οποίος καλείται ο επαγόμενος από τον f ενδομορφισμός του $\mathcal{V}$.

Άσκηση 18. *Έστω $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$, όπου $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{E} < \infty$.*

Έστω ότι $\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, για κάποιους υπόχωρους $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$, και υποθέτουμε ότι οι υπόχωροι $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ είναι f-αναλλοίωτοι. Να δειχθεί ότι υπάρχει βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε ο πίνακας του f στην $\mathcal{B}$ να είναι της μορφής:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & \mathsf{O} \\ \mathsf{O}' & B \end{pmatrix}$$

όπου:

(1) *O, O' είναι οι μηδενικοί πίνακες κατάλληλων μεγεθών.*
(2) *$A = M^{\mathcal{B}_{\mathcal{U}}}_{\mathcal{B}_{\mathcal{U}}}(f_{\mathcal{U}})$ είναι ο πίνακας του επαγόμενου ενδομορφισμού $f_{\mathcal{U}}$ σε κατάλληλη βάση $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ του $\mathcal{U}$.*
(3) *$B = M^{\mathcal{B}_{\mathcal{V}}}_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}}}(f_{\mathcal{V}})$ είναι ο πίνακας του επαγόμενου ενδομορφισμού $f_{\mathcal{V}}$ σε κατάλληλη βάση $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$ του $\mathcal{V}$.*

[1] Η γραμμική απεικόνιση f καλείται η απεικόνιση **ευθύ γινόμενο** των $f_1, f_2, \cdots, f_n$, και συμβολίζεται με $f = f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n$.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας ενδομορφισμός $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ καλείται **μηδενοδύναμος**, αν υπάρχει θετικός ακέραιος k έτσι ώστε $f^k = 0$. Παρόμοια ένας τετραγωνικός πίνακας A καλείται **μηδενοδύναμος**, αν υπάρχει θετικός ακέραιος k έτσι ώστε $A^k = 0$.

Άσκηση 19. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{E} = n$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Συμβολίζουμε με $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (k-φορές) την σύνθεση της f με τον εαυτό της k-φορές, όπου $k \geq 1$. Έστω*

$$\mathcal{E} = \mathsf{Ker}(f^m) \oplus \mathsf{Im}(f^m)$$

για κάποιο $m \geq 1$, όπως στην Άσκηση 17.

(1) *Να δειχθεί ότι οι υπόχωροι*

$$\mathcal{U} = \mathsf{Ker}(f^m) \quad \text{και} \quad \mathcal{V} = \mathsf{Im}(f^m)$$

είναι f-αναλλοίωτοι, και άρα ορίζονται οι επαγόμενοι από τον f ενδομορφισμοί:

$$f_{\mathcal{V}}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U} \quad \text{και} \quad f_{\mathcal{V}}\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$$

(2) *Να δειχθεί ότι ο $f_{\mathcal{U}}$ είναι μηδενοδύναμος.*
(3) *Να δειχθεί ότι ο $f_{\mathcal{V}}$ είναι ισομορφισμός.*
(4) *Να δειχθεί ότι υπάρχει βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε ο πίνακας του f στην $\mathcal{B}$ να είναι της μορφής:*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & \mathsf{O} \\ \mathsf{O}' & C \end{pmatrix}$$

όπου:
(α') O *είναι ο μηδενικός $k \times (n-k)$ πίνακας και O' είναι ο μηδενικός $(n-k) \times k$ πίνακας.*
(β') *A είναι ένας μηδενοδύναμος $k \times k$ πίνακας.*
(γ') *C είναι ένας αντιστρέψιμος $(n-k) \times (n-k)$ πίνακας.*
(δ') *$k = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U}$ και $n - k = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V}$.*

Άσκηση 20. *Να δειχθεί ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας A είναι όμοιος με έναν πίνακα της μορφής:*

$$\begin{pmatrix} A & \mathsf{O} \\ \mathsf{O}' & C \end{pmatrix}$$

όπου A είναι ένας μηδενοδύναμος πίνακας, C είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας, και O, O' είναι οι μηδενικοί πίνακες κατάλληλων μεγεθών.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας ενδομορφισμός $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ καλείται **προβολή**, αν: $f^2 = f$.

Άσκηση 21. *Έστω $f, g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ δύο ενδομορφισμοί του $\mathcal{E}$ οι οποίοι είναι προβολές. Να δειχθεί ότι ο ενδομορφισμός*

$$f + g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{y})$$

είναι προβολή αν και μόνον αν ισχύει ότι:

$$f \circ g = 0 = g \circ f \tag{$*$}$$

Αν ισχύει η συνθήκη $(*)$, τότε:

$$\mathsf{Im}(f+g) = \mathsf{Im}(f) + \mathsf{Im}(g) \quad \text{και} \quad \mathsf{Ker}(f+g) = \mathsf{Ker}(f) \cap \mathsf{Ker}(g)$$

Άσκηση 22. *Έστω $f, g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ δύο ενδομορφισμοί του $\mathcal{E}$ οι οποίοι είναι προβολές. Να δειχθεί ότι ο ενδομορφισμός*

$$f - g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (f-g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) - g(\vec{y})$$

είναι προβολή αν και μόνον αν ισχύει ότι:

$$f \circ g = g \circ f = g \tag{$**$}$$

Αν ισχύει η συνθήκη $(**)$, *τότε:*

$$\mathsf{Im}(f-g) = \mathsf{Im}(f) \cap \mathsf{Ker}(g) \quad \text{και} \quad \mathsf{Ker}(f-g) = \mathsf{Ker}(f) + \mathsf{Im}(g)$$

Άσκηση 23. *Έστω* $f, g \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *δύο ενδομορφισμοί του* $\mathcal{E}$ *οι οποίοι είναι προβολές. Να δειχθεί ότι ο ενδομορφισμός*

$$f \circ g \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (f \circ g)(\vec{x}) = f(g(\vec{x}))$$

είναι προβολή αν και μόνον αν ισχύει ότι:

$$f \circ g = g \circ f \tag{$***$}$$

Αν ισχύει η συνθήκη $(***)$, *τότε:*

$$\mathsf{Im}(f \circ g) = \mathsf{Im}(f) \cap \mathsf{Im}(g) \quad \text{και} \quad \mathsf{Ker}(f \circ g) = \mathsf{Ker}(f) + \mathsf{Ker}(g)$$