ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

Προτεινομενες Ασκησεις - Φυλλαδιο 2

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:
http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII2020/LAII2020.html

Παρασκευή 20 Μαρτίου 2020

Άσκηση 1. *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και βάσεις για τους αντίστοιχους ιδιοχώρους της γραμμικής απεικόνισης*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = (y, x+z, y)$$

Άσκηση 2. *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοχώροι των πινάκων πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) *Είναι οι πίνακες A και B διαγωνοποιήσιμοι; Αν ναι, να διαγωνοποιηθούν.*
(2) *Είναι οι πίνακες A και B όμοιοι; Αν ναι, να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε: $P^{-1}AP = B$.*

Άσκηση 3. *Θεωρούμε τον πίνακα πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

για τον οποίο υποθέτουμε ότι $a + b = c + d$.

(1) *Να δειχθεί ότι οι αριθμοί $a + b$ και $a - c$ είναι ιδιοδιανύσματα του A.*
(2) *Πότε ο A είναι διαγωνοποιήσιμος;*
(3) *Αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος, να διαγωνοποιηθεί.*

Άσκηση 4. *Έστω A και B δύο $n \times n$ και πίνακες έτσι ώστε $AB = BA$, και υποθέτουμε ότι ο A έχει n το πλήθος διακεκριμένες ιδιοτιμές. Να δειχθεί ότι κάθε ιδιοδιάνυσμα του A είναι ιδιοδιάνυσμα του B.*

Άσκηση 5. *Θεωρούμε τον πίνακα (α) πραγματικών, (β) μιγαδικών, αριθμών.*

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$$

Για ποιές τιμές του a είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος;

Άσκηση 6. *Να εξετασθεί ως προς τη διαγωνοποίηση ο πίνακας:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 7. *Να εξετασθούν ως προς τη διαγωνοποίηση οι πίνακες:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 8. *Θεωρούμε τον ακόλουθο 3×3 πίνακα πραγματικών αριθμών:*

$$\begin{pmatrix} 3 & -12 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) *Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος; Αν ναι, να διαγωνοποιηθεί.*
(2) *Να βρεθούν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A^5.*
(3) *Είναι ο πίνακας A αντιστρέψιμος; Αν ναι, να βρεθούν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A^{-1}.*

Άσκηση 9. *Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$ και $c, d \in \mathbb{K}$.*

(1) *Αν λ είναι ένα ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $X \in \mathbb{K}_n$, τότε το διάνυσμα X είναι ιδιοδιάνυσμα του $n \times n$ πίνακα $cA + dI_n$ το οποίο ανιστοιχεί στην ιδιοτιμή $c\lambda + d$.*
(2) *Να δειχθεί ότι αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, τότε και ο πίνακας $cA+dI_n$ είναι διαγωνοποιήσιμος.*

Άσκηση 10. *Θεωρούμε το πολυώνυμο*

$$P(t) = (-1)^n \big(a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1} t^{n-1} + t^n\big) \ \in \ \mathbb{K}[t]$$

και τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & -a_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

ο οποίος καλείται ο **συνοδός πίνακας** *του πολυωνύμου $P(t)$. Να δείξετε ότι*

$$P_A(t) = |A - tI_n| = (-1)^n \big(a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1} t^{n-1} + t^n\big)$$

Άσκηση 11. *Με τη βοήθεια της 'σκησης 4 να βρείτε το πολυώνυμο $|A - tI_4|$, όπου A είναι ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 12. *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και βάσεις για τους αντίστοιχους ιδιοχώρους του ενδομορφισμού*

$$f\colon \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathsf{M}_2(\mathbb{R}), \quad f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & -2b + c \\ -5b + 2c & 2d \end{pmatrix}$$

Άσκηση 13. *Να εξετασθεί ως προτος τη διαγωνοποίηση ο ενδομορφισμός*

$$f\colon \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathsf{M}_2(\mathbb{R}), \quad f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{pmatrix}$$

Άσκηση 14. *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ με την ιδιότητα ότι $A^2 = -I_n$. Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές του πίνακα A και να αποδείξετε ότι ο n δεν μπορεί να είναι περιττός αριθμός.*

Άσκηση 15. *Αν a, b είναι μιγαδικοί αριθμοί, να εξετασθεί ως προς τη διαγωνοποίηση ο πίνακας μιγαδικλων αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Άσκηση 16. *Θεωρούμε ένα πίνακα $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ με θετικές ιδιοτιμές. Να εξετάσετε αν ο πίνακας $A + I$ είναι αντιστρέψιμος.*

Άσκηση 17. *Θεωρούμε τον ενδομορφισμό*

$$f\colon \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathsf{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(A) = {}^tA$$

Να βρείτε τις ιδιοτιμές του f και βάσεις των αντίστοιχων ιδιοχώρων. Είναι ο f διαγωνοποιήσιμος; Αν ναι, να διαγωνοποιηθεί.

Άσκηση 18. *Έστω A ένας $n \times n$-πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Υποθέτουμε ότι το άθροισμα των στοιχείων καθεμιάς γραμμής του είναι ίσο με 1.*

(1) *Να δείξετε ότι το 1 είναι ιδιοτιμή του A.*
(2) *Αν κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα στήλη του χώρου $\mathbb{K}_n$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A, να δείξετε ότι ο A είναι ο μοναδιαίος πίνακας: $A = I_n$.*

Άσκηση 19. *Αν $n \geq 1$, να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι του $n \times n$-πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 1 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 20. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Να υπολογισθεί ο πίνακας $A^{2017}(A - 2I_2)^{2018}$.

Άσκηση 21. *Να βρεθεί ένας 3×3-πίνακας A για τον οποίο τα διανύσματα στήλες*

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Z = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

είναι ιδιοδιανύσματα του A με αντίστοιχες ιδιοτιμές $1, -1$ *και* 0.

Άσκηση 22. *Να εξετασθεί εαν ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι διαγωνοποιήσιμος.

Άσκηση 23. *Θεωρούμε τον ενδομορφισμό*

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (3x+y-z,\ x+3y+z,\ -x+y+3z)$$

Να δείξετε ότι ο f είναι διαγωνοποιήσιμος και ακολούθως να τον διαγωνοποιήσετε.

Άσκηση 24. *Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες τις οποίες πρέπει να πληρούν τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \alpha & \beta \\ 0 & 3 & \gamma \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

να είναι διαγωνοποιήσιμος.

Άσκηση 25. *Θεωρούμε τον ενδομορφισμό*

$$f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad f(x,y,z,w) = \big(x,\ 2x+5y+6z+7w,\ 3x+8z+9w,\ 4x+10w\big)$$

Να εξετασθεί ο f ως προς τη διαγωνοποίηση.

Άσκηση 26. *Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες τις οποίες πρέπει να πληρούν τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & \alpha & \beta \\ 0 & 2 & \gamma \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

να είναι διαγωνοποιήσιμος.

Άσκηση 27. *Να εξετασθεί ως προς τη διαγωνοποίηση ο πίνακας μιγαδικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & i \\ -i & 0 & i \\ -i & -i & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 28. *Να υπολογισθεί η m-οστή δύναμη $A^m, \forall\, m \geq 1$, του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 29. *Έστω* $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$*. Υποθέτουμε ότι ο* A *είναι διαγωνοποιήσιμος και η μοναδική ιδιοτιμή του είναι το* $\lambda \in \mathbb{K}$*. Να δείξετε ότι*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Άσκηση 30. *Έστω* $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ *και* $(z_n)_{n\geq 0}$ *ακολουθίες πραγματικών αριθμών έτσι ώστε*

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + y_{n-1} - z_{n-1} \\ y_n &= -x_{n-1} + 3y_{n-1} - z_{n-1} \\ z_n &= -x_{n-1} + 2z_{n-1} \end{aligned}$$

για κάθε $n \geq 1$.

Αν $x_0 = 1$, $y_n = 0$, $z_n = -1$, *να βρεθούν οι ακολουθίες* $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$, $(z_n)_{n\geq 0}$.

Άσκηση 31. *Να μελετηθεί ως προς τη διαγωνοποίηση ο πίνακας πραγματικών αριθμών:*

$$\begin{pmatrix} 1 & -14 & 4 \\ -1 & 6 & -2 \\ -2 & 24 & -7 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 32. *Να μελετηθεί ως προς τη διαγωνοποίηση ο πίνακας πραγματικών αριθμών:*

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 3 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 3 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 33. *Να μελετηθεί ως προς τη διαγωνοποίηση ο πίνακας πραγματικών αριθμών:*

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 34. *Να μελετηθεί ως προς τη διαγωνοποίηση ο πίνακας μιγαδικών αριθμών:*

$$\begin{pmatrix} 0 & i & i & i \\ i & 0 & i & i \\ i & i & 0 & i \\ i & i & i & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 35. *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι του πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} 10001 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 10003 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 10005 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 10007 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 10009 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 10011 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 36. *Έστω A ένας διαγωνοποιήσιμος $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών και υποθέτουμε ότι*

$$P_A(t) = t^2(t-3)(t+2)^3(t-4)^3$$

(1) *Να βρεθεί το n.*
(2) *Να βρεθεί η διάσταση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(4)$.*
(3) *Να βρεθεί η βαθμίδα του A.*