ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

Προτεινομενες Ασκησεις - Φυλλαδιο 3

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII2020/LAII2020.html

Παρασκευή 27 Μαρτίου 2020

Άσκηση 1. *Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 2. *Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

και ακολούθως να προσδιορισθεί η n-οστή δύναμη του A.

Άσκηση 3. *Να βρεθεί το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο των ενδομορφισμών:*

(1)
$$f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \big(x_1 - x_2 + x_3,\ x_1,\ x_2 + x_4,\ 0\big)$$

(2)
$$f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \big(x_3 + 3x_2 + 2x_4,\ 2x_2,\ x_1 - 3x_2 - 4x_4,\ 2x_4\big)$$

(3)
$$f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \big(x_1 + x_3,\ x_2 + x_4,\ x_2 + x_3,\ x_4\big)$$

(4)
$$f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \big(x_1 - x_2 + x_3 - x_4,\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4,\ x_1 - x_2,\ x_1\big)$$

Άσκηση 4. *Θεωρούμε τους ακόλουθους πίνακες:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ -6 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) *Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο των πινάκων A και B.*
(2) *Να εξετασθεί αν οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι χωρίς να υπολογισθεί η ορίζουσά τους.*
(3) *Αν οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι να βρεθούν οι πίνακες A^{-1} και B^{-1} με τη βοήθεια του Θεωρήματος των Cayley-Hamilton.*

Άσκηση 5. (1) *Έστω* $f\colon \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ *ένας ενδομορφισμός.*

(α΄) *Αν* $f^2 = f$ *να υπολογισθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του* f.

(β΄) *Αν* $f^2 = \mathsf{Id}_{\mathbb{E}}$ *να υπολογισθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του* f.

(2) *Έστω* $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$.

(α΄) *Αν* $A^2 = A$, *να υπολογισθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του* A.

(β΄) *Αν* $A^2 = I_n$, *να υπολογισθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του* A.

Άσκηση 6. *Να προσδιοριστούν οι πίνακες* $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ *των οποίων το ελάχιστο πολυώνυμο είναι της μορφής*

$$Q_A(t) = t - \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{K})$$

Άσκηση 7. *Να βρείτε όλους τους πίνακες* $A \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ *που είναι διαγωνιοποιήσιμοι και ικανοποιούν τη σχέση*

$$A^2 - 3A + 2I_2 = O$$

Άσκηση 8. *Να δειχθεί ότι αν* $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ *είναι ένας πίνακας τέτοιος ώστε*

$$A^3 = 7A$$

τότε ο A *είναι διαγωνοποιήσιμος. Είναι ο* A *διαγωνοποιήσιμος όταν θεωρηθεί ως πίνακας ρητών αριθμών;*

Άσκηση 9. *Αν* $k \geq 1$, *θεωρούμε τον* $n \times n$ *πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} k & k & \cdots & k \\ k & k & \cdots & k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k & \cdots & k \end{pmatrix}$$

(1) *Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα* A.

(2) *Να εξετάσετε αν ο πίνακας* A *είναι διαγωνοποιήσιμος.*

(3) *Ποιό είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του* A;

Άσκηση 10. *έστω* A *ένας* 3×3 *πίνακας πραγματικών αριθμών για τον οποίο γνωρίζουμε ότι:*

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

(1) *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα* A.

(2) *Να βρεθεί το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα* A.

(3) *Είναι ο πίνακας* A *διαγωνοποιήσιμος; Αν ναι, ποιά είναι η διαγώνια μορφή του;*

(4) *Είναι ο πίνακας* A *αντιστρέψιμος;*

(5) *Είναι ο πίνακας* A *ταυτοδύναμος;*

(6) *Είναι ο πίνακας* A *μηδενοδύναμος;*

Άσκηση 11. *Θεωρούμε τον πίνακα πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

(1) *Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα* A.

(2) *Να εξεταστεί αν ο πίνακας* A *είναι διαγωνοποιήσιμος. Αν ο* A *είναι διαγωνοποιήσιμος, να διαγωνοποιηθεί.*

(3) *Να βρεθεί η n-οστή δύναμη του πίνακα A.*

Άσκηση 12. *Έστω A ένας $n \times n$ διαγωνοποιήσιμος πίνακας πραγματικών αριθμών με χαρακτηριστικό πολυώνυμο*

$$P_A(t) = -t^4(t-1)^3(t-3)^5(t+1)^7$$

(1) *Να βρεθεί το μέγεθος n του πίνακα A.*
(2) *Να βρθεί το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ του πίνακα A.*
(3) *Να βρεθεί η διάσταση των ιδιοχώρων των ιδιοτιμών του πίνακα A.*
(4) *Να βρεθεί η βαθμίδα του πίνακα A.*

Άσκηση 13. *Έστω P ένας αντιστρέψιμος 3×3 πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Θεωρούμε το σύνολο*

$$\mathcal{E}(P) = \big\{A \in \mathsf{M}_3(\mathbb{K}) \mid \text{ο πίνακας } P^{-1}AP \text{ είναι διαγώνιος}\big\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι το σύνολο $\mathcal{E}(P)$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathsf{M}_3(\mathbb{K})$.*
(2) *Να βρεθεί η διάσταση του $\mathcal{E}(P)$ και να προσδιορισθεί μια βάση του.*
(3) *Να δειχθεί ότι ορίζοντας*

$$f \colon \mathcal{E}(P) \longrightarrow \mathcal{E}(P), \quad f(A) = {}^tA$$

αποκτούμε έναν ενδομορφισμό του $\mathcal{E}(P)$.
(4) *Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του f.*
(5) *Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του f.*
(6) *Είναι ο f διαγωνοποιήσιμος; Αν ναι, να βρεθεί μια βάση του $\mathcal{E}(P)$ στην οποία ο πίνακας του f να είναι διαγώνιος.*

Άσκηση 14. *Ένας πίνακας $B = (b_{ij})\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ καλείται* **δίκαιος** *αν:*

(a) $b_{ij} > 0, \ \forall i,j = 1,2,\cdots,n.$
(b) $b_{ij}b_{jk} = b_{ik}, \ \forall i,j,k = 1,2,\cdots,n.$
(1) *Να δείξετε ότι ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

είναι δίκαιος.
(2) *Να δείξετε ότι αν B είναι ένας δίκαιος πίνακας, τότε: $B^2 = \frac{1}{n}B$.*
(3) *Κάθε δίκαιος πίνακας είναι όμοιος με τον A.*
(4) *Να δείξετε ότι κάθε δίκαιος πίνακας B είναι διαγωνοποιήσιμος και να προσδιορισθεί ένας αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας*

$$P^{-1}BP$$

να είναι διαγώνιος. Ποιά είναι η διαγώνια μορφή ενός δίκαιου πίνακα;

Άσκηση 15. *Έστω $R(t) \in \mathbb{K}[t]$ ένα πολυώνυμο το οποίο έχει όλες τις ρίζες του στο σώμα $\mathbb{K}$ και καθε ρίζα έχει πολλαπλότητα 1, δηλαδή το πολυώνυμο $R(t)$ αναλύεται σε γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων υπεράνω του $\mathbb{K}$.*

(1) *Έστω $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός, όπου $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{E} < \infty$. Αν $R(f) = 0$, να δειχθεί ότι ο ενδομορφισμός f είναι διαγωνοποιήσιμος.*
(2) *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$. Αν $R(A) = O$, να δειχθεί ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.*

Άσκηση 16. *Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A δείξτε ότι ο A και ο ${}^tA$ έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.*

Άσκηση 17. *Αν οι αριθμοί $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ είναι όλες οι ιδιοτιμές του διαγωνοποιήσιμου πίνακα A, τότε να δείξετε οτι οι αριθμοί $\lambda_1^2, \cdots, \lambda_n^2$ είναι όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A^2. Ισχύει αυτό το συμπέρασμα αν ο A δεν είναι διαγωνοποιήσιμος;*

Αν ο πίνακας A^2 είναι διαγωνοποιήσιμος, πότε είναι ο A διαγωνοποιήσιμος;

Άσκηση 18. *Έστω $k \geq 1$ ένας φυσικός αριθμός.*

(1) *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός, όπου $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{E} = n$. Να δειχθεί ότι:*

$$f^k = 0 \quad \Longrightarrow \quad f^n = 0$$

(2) *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$. Να δειχθεί ότι:*

$$A^k = 0 \quad \Longrightarrow \quad A^n = O$$

Άσκηση 19. *Θεωρούμε τον ακόλουθο πίνακα πραγματικών αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) *Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος;*
(2) *Ποιό είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του A;*
(3) *Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1} \cdot A \cdot P$ να είναι άνω τριγωνικός.*

Άσκηση 20. *Θεωρούμε τον ακόλουθο πίνακα μιγαδικών αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & i \\ -i & 0 & i \\ -i & -i & 0 \end{pmatrix}$$

(1) *Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος;*
(2) *Ποιό είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του A;*
(3) *Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1} \cdot A \cdot P$ να είναι άνω τριγωνικος.*

Άσκηση 21. *Έστω A ένας 2×2 πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$ και υποθέτουμε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι 4 και -2. Έστω $n \geq 0$. Να βρεθεί ο πίνακας A^n, $\forall n \in \mathbb{Z}$, συναρτήσει των πινάκων A και I_2, σε δύο μέρη:*

(1) *Να βρεθούν αριθμοί $a_n, b_n \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $A^{n+1} = a_n A + b_n I_2$.*
(2) *Να βρεθούν αριθμοί $c_n, d_n \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $A^{-n-1} = c_n A + d_n I_2$.*

Άσκηση 22. *Να εξετασθεί αν υπάρχει πίνακας B έτσι ώστε:*

$$B^2 = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 23. *Θεωρούμε τον πίνακα πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) *Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος;*
(2) *Ποιό είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του A;*
(3) *Να βρεθεί η n-οστή δύναμη του A.*
(4) *Να εξετασθεί αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος χωρίς να υπολογισθεί η ορίζουσα του A και ακολούθως, αν ο A είναι αντιστρέψιμος, να βρεθεί ο πίνακας A^n, $\forall n \in \mathbb{Z}$.*

Άσκηση 24. *Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

να δειχθεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος, και να εκφραστεί ο αντίστροφος πίνακας A^{-1} ως γραμμικός συνδυασμός των πινάκων I_4, A, και A^2.

Άσκηση 25. *Αν A και B είναι δύο $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$, τότε γνωρίζουμε ότι $P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$, βλέπε την Άσκηση* **30** *του Φυλλαδίου* **3**. *Να δοθεί παράδειγμα $n \times n$ πίνακων A και B με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$, έτσι ώστε:*

$$Q_{AB}(t) \neq Q_{BA}(t)$$

Άσκηση 26. *Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών για τον οποίο ισχύει ότι $A^m = I_m$, όπου $m \geq 1$. Να εξετασθεί αν ο πίνακας A είναι διαγωνοπιήσιμος (α) υπεράνω του $\mathbb{R}$, και (β) υπεράνω του $\mathbb{C}$.*

Άσκηση 27. *Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 0 & a+7 & -3 \\ 0 & 4 & a \end{pmatrix}$$

Πότε ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος; Ποιά είναι η διαγώνια μορφή του;

Άσκηση 28. *Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ και $\vec{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.*

(1) *Αν $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$, να δειχθεί ότι ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

είναι διαγωνοποιήσιμος. Ποιά είναι η διαγώνια μορφή του; Ποιό είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του A;

(2) *Αν $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$ και $x_1y_1 + x_2y_2 + x_ny_n = 0$. να δειχθεί ότι ο πίνακας*

$$B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$$

είναι διαγωνοποιήσιμος. Ποιά είναι η διαγώνια μορφή του; Ποιό είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του B;

Άσκηση 29. *Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

να δειχθεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος, και να εφραστεί ο πίνακας A^{-1} ως γραμμικός συνδυασμός των πινάκων I_3, A και A^2. Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος;

Άσκηση 30. *Θεωρούμε τον μη-μηδενικό πίνακα-γραμμή*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \; a_2 \; \cdots \; a_n \end{pmatrix}$$

και θέτουμε

$$B = {}^t A \cdot A$$

Να δειχθεί ότι ο πίνακας B είναι διαγωνοποιήσιμος και να βρεθεί η διαγώνια μορφή του.

Άσκηση 31. *Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

υπεράνω του $\mathbb{R}$ και υπεράνω του $\mathbb{C}$, και να υπολογιστεί η n-οστή δύναμη του.

Άσκηση 32. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$, όπου $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$, για κάποιους υπόχωρους $\mathcal{E}_1$ και $\mathcal{E}_2$ του $\mathcal{E}$.*

Αν $f(\mathcal{E}_1) \subseteq \mathcal{E}_1$ και $f(\mathcal{E}_2) \subseteq \mathcal{E}_2$, να δειχθούν τα εξής:

(1) *Οι απεικονίσεις*

$$f_1\colon \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_1, \quad f_1(\vec{x}) = f(\vec{x}) \qquad \text{και} \qquad f_2\colon \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}_2, \quad f_2(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

είναι ενδομορφισμοί των $\mathcal{E}_1$ και $\mathcal{E}_2$ αντίστοιχα.

(2) *Για τα ελάχιστα πολυώνυμα $Q_f(t)$, $Q_{f_1}(t)$, και $Q_{f_2}(t)$ των ενδομορφισμών f, f_1, και f_2 ισχύει ότι:*

$$Q_f(t) = \big[Q_{f_1}(t),\, Q_{f_2}(t)\big]$$

όπου $\big[Q_{f_1}(t),\, Q_{f_2}(t)\big]$ είναι το ελάχιστο κοινό πολλλαπλάσιο των πολυωνύμων $Q_{f_1}(t)$ και $Q_{f_2}(t)$.

Άσκηση 33. *Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα μιγαδικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos x & i\sin x & 0 \\ i\sin x & 0 & -i\sin x \\ 0 & -i\sin x & -\sqrt{2}\cos x \end{pmatrix}$$

όπου x είναι ένας π[ραγματικός αριθμός με: $0 \leq x \leq 2\pi$.

(1) *Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του A.*
(2) *Πότε ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος; Ποιά είναι η διαγώνια μορφή του;*
(3) *Αν $x \neq \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$, να βρεθεί ο πίνακας: A^{2018}.*

Άσκηση 34. *Θεωρούμε τον ακόλουθο* 3×3 *πίνακα πραγματικών αριθμών, όπου* $a \in \mathbb{R}$*:*

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν οι τιμές του a *έτσι ώστε ο πίνακας* A *να έχει ως ιδιοτιμή τον αριθμό* $\lambda = 0$ *και τις υπόλοιπες ιδιοτιμές ακέραιους αριθμούς. Για τις παραπάνω τιμές του* a*:*

(1) *Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα* A.
(2) *Είναι ο πίνακας* A *είναι διαγωνοποιήσιμος; Αν ναι, ποιά είναι η διαγώνια μορφή του;*
(3) *Να βρεθεί η* n*-οστή δύναμη του πίνακα* A.
(4) *Να βρεθούν όλες οι τετραγωνικές ρίζες του* A*, δηλαδή να βρεθούν όλοι οι* 3×3 *πίνακες πραγματικών αριθμών* B *για τους οποίους ισχύει ότι* $B^2 = A$.

Άσκηση 35. *Θεωρούμε τον ακόλουθο* 3×3 *πίνακα πραγματικών αριθμών, όπου* $a \in \mathbb{R}$*:*

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a & a-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν οι τιμές του a *έτσι ώστε ο πίνακας* A *να έχει ως ιδιοτιμή τον αριθμό* $\lambda = 0$ *και τις υπόλοιπες ιδιοτιμές ακέραιους αριθμούς. Για τις παραπάνω τιμές του* a*:*

(1) *Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα* A.
(2) *Είναι ο πίνακας* A *είναι διαγωνοποιήσιμος; Αν ναι, ποιά είναι η διαγώνια μορφή του;*
(3) *Να βρεθεί η* n*-οστή δύναμη του πίνακα* A.
(4) *Να βρεθούν όλες οι τετραγωνικές ρίζες του* A*, δηλαδή να βρεθούν όλοι οι* 3×3 *πίνακες πραγματικών αριθμών* B *για τους οποίους ισχύει ότι* $B^2 = A$.

Άσκηση 36. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος* $\mathbb{C}$ *των μιγαδικών αριθμών. Έστω* $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E} = n$ *και* $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ *μια βάση του* $\mathcal{E}$. *Ορίζουμε απεικόνιση*

$$f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \vec{x} = z_1\vec{e}_1 + z_2\vec{e}_2 + \cdots + z_n\vec{e}_n \longmapsto f(\vec{x}) = \overline{z}_1\vec{e}_1 + \overline{z}_2\vec{e}_2 + \cdots + \overline{z}_n\vec{e}_n$$

(1) *Να δειχθεί ότι ο* $\mathbb{C}$*-διανυσματικός χώρος* $\mathcal{E}$ *μπορεί να θεωρηθεί ως* $\mathbb{R}$*-διανυσματικός χώρος.*
(2) *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση* f *είναι ένας ενδομορφισμός του* $\mathbb{R}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathcal{E}$.
(3) *Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του* f.

Έστω $\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, όπου $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$ και έστω $f \colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ και $g \colon \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}$ ενδομορφισμοί των $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ αντίστοιχα. Το **ευθύ άθροισμα** $f \oplus g$ των ενδομορφισμών f και g ορίζεται να είναι η απεικόνιση

$$f \oplus g : \ \mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}, \quad (f \oplus g)(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{v}) + g(\vec{w})$$

Άσκηση 37. *Έστω* $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *ένας ενδομορφισμός του* $\mathbb{K}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathcal{E}$*, όπου* $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{E} < \infty$. *Να δειχθεί ότι ο* f *μπορεί να γραφεί ώς «ευθύ άθροισμα»*

$$f = g + h$$

κατάλληλων ενδομορφισμών

$$g \colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \quad \text{και} \quad h \colon \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}$$

όπου $\mathcal{V}$ *και* $\mathcal{W}$ *είναι κατάλληλοι υπόχωροι του* $\mathcal{E}$ *έτσι ώστε* $\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ *και:*

(1) *Ο ενδομορφισμός* $g \colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ *είναι ισομορφισμός.*
(2) *Ο ενδομορφισμός* $h \colon \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}$ *είναι μηδενοδύναμος, δηλ.* $h^m = 0$*, για κάποιο* $m \geq 1$.

Το **ευθύ άθροισμα** $A \oplus B$ δύο πινάκων $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ και $B \in \mathsf{M}_m(\mathbb{K})$ ορίζεται να είναι ο $(n+m) \times (n+m)$ πίνακας

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} \boxed{A} & O_{n\times m} \\ O_{m\times n} & \boxed{B} \end{pmatrix}$$

Άσκηση 38. *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ ένας τετραγωνικός πίνακας. Να δειχθεί ότι ο A μπορεί να γραφεί ώς «ευθύ άθροισμα» πινάκων:*

$$A = B \oplus C$$

όπου για κατάλληλα $1 \leq r, s \leq n$ έτσι ώστε $s + r = n$:

(1) *Ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος $s \times s$ πίνακας.*
(2) *Ο πίνακας C είναι μηδενοδύναμος $r \times r$ πίνακας, δηλ. $C^m = 0$, για κάποιο $m \geq 1$.*