ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

Προτεινομενες Ασκησεις - Φυλλαδιο 6

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII2020/LAII2020.html

Παρασκευή 15 Μαίου 2020

Άσκηση 1. *Να κατασκευάσετε μια ισομετρία μεταξύ του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^4$, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, και του Ευκλείδειου χώρου $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ ο οποίος είναι εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο*

$$\langle A, B\rangle = \mathsf{Tr}(A \cdot {}^tB)$$

Υπάρχει ισομετρία από τον $\mathbb{R}^3$ στον Ευκλείδειο χώρο $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$, για κατάλληλο n;

Άσκηση 2. *Έστω B ένας $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε τον ενδομορφισμό*

$$f\colon \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathsf{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(A) = A \cdot B$$

Να δειχθεί ότι ο ενδομορφισμός f του Ευκλείδειου χώρου[1] $(\mathsf{M}_n(\mathbb{R}), \langle,\rangle)$ είναι ισομετρία αν και μόνον αν ο πίνακας B είναι ορθογώνιος.

Άσκηση 3. *Να δείξετε ότι ο πραγματικός πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

παριστάνει συμμετρία ως προς άξονα ο οποίος και να βρεθεί.

Άσκηση 4. *Να συμπληρωθεί ο ακόλουθος πίνακας A σε έναν 3×3 ορθογώνιο πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Πότε ο πίνακας A γεωμετρικά παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) κατά γωνία θ γύρω από άξονα (ϵ) κάθετο στο (Π);

Άσκηση 5. *Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε την απεικόνιση*

$$\langle\ ,\rangle' \ :\ \mathbb{R}^2 \ \times\ \mathbb{R}^2 \ \longrightarrow\ \mathbb{R}, \qquad \big\langle (x,y),(x',y')\big\rangle' = xx' - yx' - xy' + 4yy'$$

(1) *Να δειξετε ότι η παραπάνω απεικόνιση είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^2$.*

---

[1] Ο Ευκλείδειος χώρος $(\mathsf{M}_n(\mathbb{R}), \langle,\rangle)$ θεωρείται ότι είναι εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό του γινόμενο: $\langle A, B\rangle = \mathsf{Tr}(A \cdot {}^tB)$.

(2) *Να κατασκευάσετε μια ισομετρία* $f\colon \left(\mathbb{R}^2, \langle,\rangle'\right) \longrightarrow \left(\mathbb{R}_1[t], \langle,\rangle\right)$*, όπου* $\langle,\rangle$ *συμβολίζει το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο του* $\mathbb{R}_1[t]$.

Άσκηση 6. *Να προσδιορισθεί ποιές από τις παρακάτω ισομετρίες*

$$\begin{aligned} f_1\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (y,z,x) \\ f_2\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (y,-z,x) \\ f_3\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (y,z,-x) \\ f_4\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (y,-z,-x) \\ f_5\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (-y,z,x) \\ f_6\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (-y,-z,x) \\ f_7\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (-y,z,-x) \\ f_8\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (-y,-z,-x) \end{aligned}$$

γεωμετρικά παριστάνουν στροφή επιπέδου (Π) *κατά γωνία* θ *γύρω από άξονα* (ϵ) *κάθετο στο επίπεδο, και ακολούθως να βρεθεί το επίπεδο* (Π)*, η γωνία* θ *και ο άξονας* (ϵ).

Άσκηση 7. *Έστω* $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ *μια ορθοκανονική βάση του Ευκλειδείου χώρου* $\mathcal{E}$*. Αν* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *είναι η μοναδική γραμμική απεικόνιση, έτσι ώστε*

$$f(\vec{e}_1) = -\vec{e}_2, \quad f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_3, \quad f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_4, \quad f(\vec{e}_4) = \vec{e}_1$$

να εξετάσετε αν η f *είναι ισομετρία.*

Άσκηση 8. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle\,\rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος περασμένης διάστασης και* $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ *ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων του Ευκλείδειου χώρου* E*. Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα* $\vec{z} \in \mathcal{E}$ *έτσι ώστε:*

$$f_{\vec{z}}(\vec{x}) = \frac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{y}\|}\,\vec{y}$$

όπου $f_{\vec{z}}$ *είναι ο ενδομορφισμός*[2] *του* $\mathcal{E}$ *ο οποίος ορίζεται ως εξής:*

$$f_{\vec{z}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad f_{\vec{z}}(\vec{x}) = \vec{x} - 2\frac{\langle \vec{x}, \vec{z}\rangle}{\langle \vec{z}, \vec{z}\rangle}\,\vec{z}$$

Άσκηση 9. *Έστω* $A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ *ένας πίνακας για τον οποίο ισχύει:*

$$a_{ij} = \frac{1}{4} \qquad \text{ή} \qquad a_{ij} = -\frac{1}{4}$$

Αν ο A *είναι ορθογώνιος, να βρεθεί το* n.

Άσκηση 10. *Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο* $\mathbb{R}^3$ *εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο και τη γραμμική απεικόνιση*

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = \left(x,\ \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z\right)$$

[2] Ο ενδομορφισμός $f_{\vec{z}}$ είναι ισομετρία και γεωμετρικά παριστάνει ανάκλαση ως προς το υπερεπίπεδο $\{\vec{z}\}^\perp$, δηλαδή υπόχωρο διάστασης $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} - 1$ του $\mathcal{E}$. Με άλλα λόγια:

$$f_{\vec{z}}(\vec{z}) = -\vec{z} \qquad \text{και} \qquad f_{\vec{z}}(\vec{x}) = -\vec{x},\ \forall \vec{x} \in \{\vec{z}\}^\perp$$

(1) *Να δειχθεί ότι η f είναι ισομετρία και να υπολογισθεί η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $f(3,7,1)$ και $f(2,-1,3)$.*
(2) *Τι παριστάνει γεωμετρικά η ισομετρία f;*

Άσκηση 11. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος. Ένας ενδομορφισμός $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ καλείται απεικόνιση ομοιότητας αν:*

$$\text{υπάρχει } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \quad \|f(\vec{x})\| = \lambda\|\vec{x}\|, \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$$

Να δειχθεί ότι για έναν μη-μηδενικό ενδομορφισμό $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) *Ο ενδομορφισμός f είναι μια απεικόνιση ομοιότητας.*
(2) *Ο ενδομορφισμός f διατηρεί την ορθογωνιότητα διανυσμάτων, δηλαδή, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$:*

$$\vec{x} \perp \vec{y} \quad \Longrightarrow \quad f(\vec{x}) \perp f(\vec{y})$$

Τι μορφή έχει ο πίνακας μιας ομοιότητας σε μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}$;

Άσκηση 12. (1) *Να δειχθεί ότι η σύνθεση $f \circ g$ δύο ισομετριών $f, g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ισομετρία.*
(2) *Να δειχθεί ότι ο αντίστροφος ενδομορφισμός μιας ισομετρίας $f, g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, όπου $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} < \infty$, είναι ισομετρία.*
(3) *Να εξετασθεί αν το άθροισμα $f + g$ δύο ισομετριών $f, g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ισομετρία.*
(4) *Να εξετασθεί αν το άθροισμα $A + B$ δύο ορθογωνίων πινάκων $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ είναι ορθογώνιος πίνακας.*

Άσκηση 13. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια απεικόνιση, όχι κατ' ανάγκη γραμμική, όπου $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης.*

(1) *Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
  (α') *Η απεικόνιση f είναι μια ισομετρία.*
  (β') *Η απεικόνιση f διατηρεί την αρχή των αξόνων και αποστάσεις διανυσμάτων, δηλαδή $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$:*

$$f(\vec{0}) = \vec{0} \quad \text{και} \quad \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

(2) *Να βρεθεί μια απεικόνιση $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ η οποία διατηρεί αποστάσεις, δηλαδή, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$:*

$$\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

έτσι ώστε $f(\vec{0}) \neq \vec{0}$, δηλαδή η f δεν είναι γραμμική.

Άσκηση 14. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια απεικόνιση, όχι κατ' ανάγκη γραμμική, όπου $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Η απεικόνιση f είναι μια ισομετρία.*
(2) *Η απεικόνιση f είναι «επί» και διατηρεί εσωτερικά γινόμενα, δηλαδή $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$:*

$$\langle f(\vec{x}),\, f(\vec{y})\rangle = \langle \vec{x},\, \vec{y}\rangle$$

Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης. Μια απεικόνιση, όχι κατ' ανάγκην γραμμική, $R\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ καλείται **στερεά κίνηση**, αν η R διατηρεί αποστάσεις, δηλαδή $\forall \vec{x}, \vec{y}$:

$$\|R(\vec{x}) - R(\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

Μια απεικόνιση $T\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ καλείται **μεταφορά**, αν υπάρχει ένα διάνυσμα $\vec{a} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$:

$$T(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$$

Μια μεταφορά όπως παραπάνω συμβολίζεται με $T = T_{\vec{a}}$.

Άσκηση 15. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης. Μια απεικόνιση $R\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι στερεά κίνηση αν και μόνον αν υπάρχει μια ισομετρία $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ και μια μεταφορά $T\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε:*

$$R = T \circ f$$

Άσκηση 16. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και έστω $\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k\right\}$ και $\left\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_k\right\}$ δύο σύνολα διανυσμάτων του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Υπάρχει μια ισομετρία $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε*

$$f(\vec{x}_i) = \vec{y}_i, \quad 1 \leq i \leq k$$

(2) *Ισχύει ότι:*

$$\langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle = \langle \vec{y}_i, \vec{y}_j \rangle, \qquad 1 \leq i, j \leq k$$

Έστω A ένας 3×3 ορθογώνιος πίνακας πραγματικών αριθμών. Αν $|A| = 1$, τότε από το Θεώρημα του Euler, υπάρχει μοναδική γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$, έτσι ώστε ο πίνακας A είναι ορθογώνια όμοιος με τον πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

δηλαδή υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε: ${}^tP \cdot A \cdot P = B$. Ο πίνακας B καλείται η **κανονική μορφή του πίνακα** A.

Άσκηση 17. *Να βρεθεί η κανονική μορφή των ακόλουθων ορθογώνιων πινάκων:*

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 18. *Να βρεθεί η κανονική μορφή των ακόλουθων ορθογώνιων πινάκων:*

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 19. *Να εξετασθεί αν ο πίνακας*

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

παριστάνει γεωμετρικά στροφή επιπέδου (Π) κατά γωνία θ γύρω από άξονα (ϵ) κάθετο στο (Π). Αν αυτό συμβαίνει, να βρεθεί το επίπεδο (Π), ο άξονας (Π), και η γωνία θ.

Άσκηση 20. *Να βρεθούν οι τιμές των πραγματικών αριθμών a, b, c, d έτσι ώστε οι πίνακες*

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ a & b & c & d \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

είναι ορθογώνιοι. Για ποιές τιμές των a, b, c, d οι πίνακες A και B είναι ορθογώνιοι και διαγωνοποιήσιμοι;

Άσκηση 21. *Να βρεθεί η κανονική μορφή των ακόλουθων ορθογώνιων πινάκων:*

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

και να βρεθεί το επίπεδο (Π), *ο άξονας* (Π), *και η γωνία* ϑ.

Τέλος να προσδιορισθεί ορθογώνιος πίνακας P *έτσι ώστε ο πίνακας* ${}^tP \cdot A \cdot P$ *να είναι η κανονική μορφή των παραπάνω ορθογώνιων πινάκων:*

Άσκηση 22. *Να εξετασθεί αν ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/3\sqrt{2} & 4/3\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

είναι ορθογώνιος και γεωμετρικά παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) *κατά γωνία* θ *γύρω από άξονα* (ϵ) *κάθετο στο* (Π). *Σε περίπτωση θετικής απάντησης, να βρεθεί το επίπεδο* (Π), *ο άξονας* (Π), *και η γωνία* θ.

Άσκηση 23. *Να εξετασθεί αν ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & \sqrt{6}/4 \\ 1/4 & 3/4 & -\sqrt{6}/4 \\ -\sqrt{6}/4 & \sqrt{6}/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

είναι ορθογώνιος και γεωμετρικά παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) *κατά γωνία* θ *γύρω από άξονα* (ϵ) *κάθετο στο* (Π). *Σε περίπτωση θετικής απάντησης, να βρεθεί το επίπεδο* (Π), *ο άξονας* (Π), *και η γωνία* θ.

Άσκηση 24. *Ποιός από τους παρακάτω πίνακες*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

γεωμετρικά παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) *κατά γωνία* θ *γύρω από άξονα* (ϵ) *κάθετο στο* (Π); *Ποιά είναι τότε η κανονική μορφή του;*