

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΤΜΗΜΑ Β' (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 8

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII2020/LAII2020.html>

Παρασκευή 29 Μαΐου 2020

Άσκηση 1. Να βρεθούν όλοι οι 2×2 πίνακες πραγματικών αριθμών οι οποίοι είναι: (a) συμμετρικοί και ορθογώνιοι, και (b) αντι-συμμετρικοί και ορθογώνιοι.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας συμμετρικός πίνακας A καλείται θετικός αν $\langle AX, X \rangle > 0, \forall X \in \mathbb{R}_n, X \neq O$, και τότε γράφουμε: $A > O$.

Για δύο συμμετρικούς πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, ορίζουμε:

$$A > B \iff A - B > O$$

Άσκηση 2. Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ δύο συμμετρικοί πίνακες. Να δειχθούν τα εξής:

(1) Αν $A > O$ και $B > O$ και $\kappa, \lambda > 0$, τότε: $\kappa A + \lambda B > O$.

(2) Αν $A > O$ και ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος, τότε: ${}^t P A P > O$

(3) Αν $A', B' \in M_n(\mathbb{R})$ είναι δύο συμμετρικοί πίνακες, τότε:

$$A < A' \text{ και } B < B' \implies A + A' < B + B'$$

(4) Αν $C \in M_n(\mathbb{R})$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας, τότε:

$$A < B \text{ και } B < C \implies A < C$$

(5) Αν ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος, τότε:

$$A < B \implies {}^t P A P < {}^t P B P$$

(6)

$$O < A < I_n \implies I_n < A^{-1}$$

(7)

$$O < A < B \implies B^{-1} < A^{-1}$$

(8)

$$O < A < B \implies \sqrt{A} < \sqrt{B}$$

Άσκηση 3. Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή

$$q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad q(x, y, z) = \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}y^2 + 5z^2 - xy - 2xz + 2yz$$

στους κύριους άξονες οι οποίοι και να βρεθούν. Αν A είναι ο πίνακας της q , να εξετασθεί αν ο A είναι θετικός ή μη-αρνητικός. Στην πρώτη περίπτωση να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του A , και στην δεύτερη περίπτωση να βρεθεί μια κυβική ρίζα του A .

Άσκηση 4. Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή

$$q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz$$

στους κύριους άξονες οι οποίοι και να βρεθούν. Αν A είναι ο πίνακας της q , να εξετασθεί αν ο A είναι θετικός ή μη-αρνητικός. Στην πρώτη περίπτωση να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του A , και στην δεύτερη περίπτωση να βρεθεί μια κυβική ρίζα του A .

Άσκηση 5. Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή

$$q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz - 4yz$$

στους κύριους άξονες οι οποίοι και να βρεθούν. Αν A είναι ο πίνακας της q , να εξετασθεί αν ο A είναι θετικός ή μη-αρνητικός. Στην πρώτη περίπτωση να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του A , και στην δεύτερη περίπτωση να βρεθεί μια κυβική ρίζα του A .

Τέλος να προσδιορισθεί το είδος της δευτεροβάθμιας επιφάνειας

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid q(x, y, z) = 3\}$$

Άσκηση 6. Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή

$$q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4xy - 8xz - 4yz$$

στους κύριους άξονες οι οποίοι και να βρεθούν. Αν A είναι ο πίνακας της q , να εξετασθεί αν ο A είναι θετικός ή μη-αρνητικός. Στην πρώτη περίπτωση να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του A , και στην δεύτερη περίπτωση να βρεθεί μια κυβική ρίζα του A .

Τέλος να προσδιορισθεί το είδος της δευτεροβάθμιας επιφάνειας

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid q(x, y, z) = -4\}$$

Άσκηση 7. Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή

$$q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad q(x, y, z) = 17x^2 + 8y^2 + 12xy$$

στους κύριους άξονες οι οποίοι και να βρεθούν. Αν A είναι ο πίνακας της q , να εξετασθεί αν ο A είναι θετικός ή μη-αρνητικός. Στην πρώτη περίπτωση να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του A , και στην δεύτερη περίπτωση να βρεθεί μια κυβική ρίζα του A .

Τέλος να προσδιορισθεί το είδος της δευτεροβάθμιας επιφάνειας

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 17x^2 + 8y^2 + 12xy + 60x + 80y - 5z + 210 = 0\}$$

Άσκηση 8. Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή

$$q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad q(x, y, z) = y^2 + z^2 - xy + xz + yz$$

στους κύριους άξονες οι οποίοι και να βρεθούν. Αν A είναι ο πίνακας της q , να εξετασθεί αν ο A είναι θετικός ή μη-αρνητικός. Στην πρώτη περίπτωση να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του A , και στην δεύτερη περίπτωση να βρεθεί μια κυβική ρίζα του A .

Τέλος να προσδιορισθεί το είδος της δευτεροβάθμιας επιφάνειας

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 - xy + xz + yz - 2x - 2y - 2z + 1 = 0\}$$

Άσκηση 9. Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή

$$q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 5xy - 2xz - 2yz$$

στους κύριους άξονες οι οποίοι και να βρεθούν. Αν A είναι ο πίνακας της q , να εξετασθεί αν ο A είναι θετικός ή μη-αρνητικός. Στην πρώτη περίπτωση να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του A , και στην δεύτερη περίπτωση να βρεθεί μια κυβική ρίζα του A .

Τέλος να προσδιοριστεί το είδος της δευτεροβάθμιας επιφάνειας

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 5xy - 2xz - 2yz - 2x - 2y + z = 0\}$$

Άσκηση 10. Να προσδιοριστεί το είδος της δευτεροβάθμιας επιφάνειας

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 3y + 4z + 4 = 0\}$$

Άσκηση 11. Να βρεθεί μια κυβική ρίζα του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και ακολούθως να προσδιοριστεί το είδος της δευτεροβάθμιας επιφάνειας

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + 2xz = 1\}$$

Άσκηση 12. Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή

$$q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad q(x, y, z) = 2x^2 - 4xy - 4yz$$

στους κύριους άξονες οι οποίοι και να βρεθούν. Αν A είναι ο πίνακας της q , να εξετασθεί αν ο A είναι θετικός ή μη-αρνητικός. Στην πρώτη περίπτωση να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του A , και στην δεύτερη περίπτωση να βρεθεί μια κυβική ρίζα του A .

Τέλος να προσδιοριστεί το είδος της δευτεροβάθμιας επιφάνειας

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 - 4xy - 4yz + 12x + 6y + 6z = 1\}$$