ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Τμημα Β′ (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

Προχειρη Δοκιμασια 2

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:
http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII2020/LAII2020.html

Παρασκευή 20 Μαρτίου 2020

Πρόχειρη Δοκιμασία. *Να βρεθεί η n-οστή δύναμη του ακόλουθου 3×3 πίνακα πραγματικών αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Λύση. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A:

$$P_A(t) = |A - tI_3| = \begin{vmatrix} 3-t & -2 & 0 \\ -2 & 3-t & 0 \\ 0 & 0 & 5-t \end{vmatrix} = (5-t)\begin{vmatrix} 3-t & -2 \\ -2 & 3-t \end{vmatrix} = (5-t)((3-t)^2 - 4) =$$

$$= (5-t)(t^2 - 6t + 5)$$

Οι ρίζες του τριωνύμου $t^2 - 6t + 5$ είναι 5 και 1 και επομένως

$$P_A(t) = (5-t)^2(t-1)$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου και επομένως είναι οι εξής:

$$\lambda_1 = 1 \quad (\text{αλγεβρικής πολλαπλότητας } 1) \qquad \text{και} \qquad \lambda_2 = 5 \quad (\text{αλγεβρικής πολλαπλότητας } 2)$$

Θα προσδιορίσουμε βάσεις και τη διάσταση των ιδιοχώρων $\mathcal{V}(1)$ και $\mathcal{V}(5)$.

- Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(1)$ θεωρούμε το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$(A - I_3)X = O \implies \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \\ 4z = 0 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Επομένως:

$$\mathcal{V}(1) = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

και το σύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}(1)$. Ιδιαίτερα: $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(1) = 1$.

- Για τον ιδιοχώρο $\mathcal{V}(5)$ θεωρούμε το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$(A-5I_3)X=O \quad\Longrightarrow\quad \begin{pmatrix}-2&-2&0\\-2&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases}-2x-2y=0\\-2x-2y=0\end{cases} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad \begin{cases}y=-x\\z\in\mathbb{R}\end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-x\\z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad (x,z\in\mathbb{R})$$

Επομένως:

$$\mathcal{V}(5)=\left\{x\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}_3 \mid x,z\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

και προφανώς το σύνολο $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}(5)$. Ιδιαίτερα: $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{V}(5)=2$.

Επειδή $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{V}(1)=1=$ αλγεβρική πολλαπλότητα της $\lambda_1=1$ και $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{V}(5)=5=$ αλγεβρική πολλαπλότητα της $\lambda_2=5$, έπεται ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος.

Γνωρίζουμε τότε ότι ο πίνακας P ο οποίος σχηματίζεται από τις στήλες των διανυσμάτων στηλών των βάσεων των ιδιοχώρων, δηλαδή ο πίνακας

$$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και ικανοποιεί τη σχέση

$$P^{-1}\,A\,P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}$$

Τότε:

$$A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}P^{-1} \quad\Longrightarrow\quad A^n=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}^n P^{-1}=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5^n&0\\0&0&5^n\end{pmatrix}P^{-1}$$

δηλαδή:

$$A^n=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5^n&0\\0&0&5^n\end{pmatrix}P^{-1}$$

Υπολογίζουμε εύκολα ότι:

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac12&\frac12&0\\0&0&1\\-\frac12&\frac12&0\end{pmatrix}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$A^n=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5^n&0\\0&0&5^n\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5^n&0\\0&0&5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac12&\frac12&0\\0&0&1\\-\frac12&\frac12&0\end{pmatrix} \overset{\text{πράξεις}}{=\!=\!=\!=}$$

$$=\frac12\begin{pmatrix}1+5^n&1-5^n&0\\1-5^n&1+5^n&0\\0&0&2\cdot5^n\end{pmatrix}$$

Επομένως η n-οστή δύναμη του πίνακα A είναι ο πίνακας:

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+5^n & 1-5^n & 0 \\ 1-5^n & 1+5^n & 0 \\ 0 & 0 & 2\cdot 5^n \end{pmatrix}$$

∎