ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

Προχειρη Δοκιμασια 3

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII2020/LAII2020.html

Παρασκευή 27 Μαρτίου 2020

Πρόχειρη Δοκιμασία. *Θεωρούμε τον ακόλουθο 3×3 πίνακα πραγματικών αριθμών, όπου $a, b \in \mathbb{R}$:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}$$

(I) *Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A.*
(II) *Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος; Αν ναι, ποιά είναι η διαγώνια μορφή του;*
(III) *Αν $a = 0$:*
  (α΄) *Να βρεθεί η n-οστή δύναμη του πίνακα A.*
  (β΄) *Αν $b \geq 0$, να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του A, δηλαδή ένας 3×3 πίνακας πραγματικών αριθμών B για τον οποίο ισχύει ότι $B^2 = A$.*
  (γ΄) *Αν $b = 1$, να βρεθεί ο πίνακας A^n συναρτήσει των πινάκων A και I_3.*

Λύση. (I) Θεωρούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A:

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 1 \\ 1 & 0 & b-t \end{vmatrix} = (1-t)^2(b-t)$$

Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A είναι κανονικό και διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, έπεται ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι ένα εκ των $t-1$, $t-b$, $(t-1)^2$, $(t-1)(t-b)$, και $(t-1)^2(t-b)$. Παρατηρούμε ότι:

1. Αν $b = 1$, τότε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad P_A(t) = -(t-1)^3$$

Άρα το ελάχιστο πολυώνυμο είναι ένα εκ των $t-1$, $(t-1)^2$, και $(t-1)^3$.

Θα έχουμε:

(i)

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O \implies$$

$$\implies Q_A(t) \neq t - 1$$

(ii)

$$(A-I_3)^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&a\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&a\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\a&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad Q_A(t)=\begin{cases}(t-1)^2, & \text{αν } a=0\\(t-1)^3, & \text{αν } a\neq 0\end{cases}$$

2. Αν $b\neq 1$, τότε επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A έχει τις ίδιες ρίζες με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, έπεται ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι ένα εκ των $(t-1)(t-b)$ και $(t-1)^2(t-b)$.

Θα έχουμε:

$$(A-I_3)(A-bI_3)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&a\\1&0&b-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-b&0&0\\0&1-b&a\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\a&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad Q_A(t)=\begin{cases}(t-1)(t-b), & \text{αν } a=0\\(t-1)^2(t-b), & \text{αν } a\neq 0\end{cases}$$

Συνδυάζοντας τις περιπτώσεις **1.** και **2.** έπεται ότι:

$$Q_A(t)=\begin{cases}(t-1)(t-b), & \text{αν } a=0\\(t-1)^2(t-b), & \text{αν } a\neq 0\end{cases}$$

(II) Γνωρίζουμε ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος αν το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων. Επομένως, από το μέρος (I) έπεται ότι:

ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος $\iff$ $a=0$ *και* $b\neq 1$

Υποθέτουμε ότι $a=0$ και $b\neq 1$. Τότε ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος και η διαγώνα μορφή του είναι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&b\end{pmatrix}$$

Με τη γνωστή διαδικασία βρίσκουμε βάσεις για τους ιδιοχώρους $\mathcal{V}(1)$ και $\mathcal{V}(b)$:

$$\mathcal{V}(1)=\left\langle\begin{pmatrix}1-b\\0\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle\qquad\text{και}\qquad\mathcal{V}(b)=\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

και άρα το σύνολο $\left\{\begin{pmatrix}1-b\\0\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ είναι μια βάση τοπυ $\mathcal{V}(1)$ και το σύνολο $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}(b)$.

Επομένως, θέτοντας

$$P=\begin{pmatrix}1-b&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

αποκτούμε έναν αντιστρέψιμο πίνακα P έτσι ώστε:

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&b\end{pmatrix}$$

(III) (α′) Εύκολα βλέπουμε ότι

$$P^{-1} = \frac{1}{1-b} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-b & 0 \\ -1 & 0 & 1-b \end{pmatrix}$$

Τότε

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} \implies A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix} P^{-1} \implies$$

$$\implies A^n = \begin{pmatrix} 1-b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix} \frac{1}{1-b} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-b & 0 \\ -1 & 0 & 1-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} b^k & 0 & b^n \end{pmatrix}$$

(β′) Έστω $b \geq 0$. Θα έχουμε:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \implies A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{b} \end{pmatrix}^2 P^{-1}$$

Επομένως θέτοντας

$$B = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{b} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1-\sqrt{b}}{1-b} & 0 & \sqrt{b}(1-b) \end{pmatrix}$$

θα έχουμε:

$$B^2 = \left(P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{b} \end{pmatrix} P^{-1} \right)^2 = \left(P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{b} \end{pmatrix}^2 P^{-1} \right) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = A$$

(γ′) Αν $b = 1$, τότε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad P_A(t) = -(t-1)^3$$

Επειδή $|A| = P_A(0) = 1$, έπεται ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Επειδή $a = 0$ και $b = 1$, από το μέρος (I) έπεται ότι $Q_A(t) = (t-1)^2 = t^2 - 2t + 1$. Επειδή $Q_A(A) = O$, δηλαδή $A^2 - 2A + I_2 = O$, θα έχουμε:

$$A^2 = 2A - I_2 \quad \text{και} \quad A^{-1} = 2I_2 - A$$

Εύκολα βλέπουμε με επαγωγή ότι, $\forall n \geq 0$:

$$A^n = nA - (n-1)I_2 \quad \text{και} \quad A^{-n} = (n+1)I_2 - nA \qquad \blacksquare$$