

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΤΜΗΜΑ Β' (Αρχικό γράμμα επωνύμου: Λ - Ω)

ΠΡΟΧΕΙΡΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ 4

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII2020/LAII2020.html>

Παρασκευή 3 Απριλίου 2020

Πρόχειρη Δοκιμασία. 1. Έστω $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος και $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{E}$ ένα υποσύνολο του \mathcal{E} .
Ναδειχθεί ότι το υποσύνολο

$$\mathcal{U}^\perp = \{ \vec{x} \in \mathcal{E} \mid \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = 0, \forall \vec{v} \in \mathcal{U} \}$$

είναι ένας υπόχωρος του \mathcal{E} , και:

$$\{\vec{0}\}^\perp = \mathcal{E} \quad \text{και} \quad \mathcal{E}^\perp = \{\vec{0}\}$$

2. Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $(M_2(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, όπου

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A \cdot {}^t B)$$

(α) Να βρεθεί το μήκος και η γωνία των διανυσμάτων

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(β) Να βρεθεί η ορθογώνια προβολή του διανύσματος A στο διάνυσμα B .

(γ) Να βρεθεί ένα μοναδιαίο διάνυσμα $C \in M_2(\mathbb{R})$ έτσι ώστε: $C \perp B$.

(δ) Αν $\mathcal{U} = \{A, B\}$, να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου \mathcal{U}^\perp .

Λύση. 1. Επειδή $\langle \vec{0}, \vec{v} \rangle = 0, \forall \vec{v} \in \mathcal{U}$, έπεται ότι $\vec{0} \in \mathcal{U}^\perp$.

Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{U}^\perp$, δηλαδή $\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = 0 = \langle \vec{y}, \vec{v} \rangle, \forall \vec{v} \in \mathcal{U}$. Τότε, $\forall \vec{v} \in \mathcal{U}$:

$$\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{v} \rangle = 0 + 0 = 0 \implies \vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{U}^\perp$$

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\vec{x} \in \mathcal{U}^\perp$, δηλαδή $\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = 0, \forall \vec{v} \in \mathcal{U}$. Τότε, $\forall \vec{v} \in \mathcal{U}$:

$$\langle \lambda \vec{x}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = \lambda \cdot 0 = 0 \implies \lambda \vec{x} \in \mathcal{U}^\perp$$

Οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν ότι το υποσύνολο \mathcal{U}^\perp είναι ένας υπόχωρος του \mathcal{E} .

Επειδή $\langle \vec{0}, \vec{x} \rangle = 0, \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$, έπεται ότι $\mathcal{E} \subseteq \{\vec{0}\}^\perp$ και επομένως: $\mathcal{E} = \{\vec{0}\}^\perp$. Αν $\vec{x} \in \mathcal{E}^\perp$, τότε $\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle = 0, \forall \vec{y} \in \mathcal{E}$, και ιδιαίτερα θα έχουμε $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$. Τότε όμως $\vec{x} = \vec{0}$ άρα $\mathcal{E}^\perp \subseteq \{\vec{0}\}$ και επομένως: $\mathcal{E}^\perp = \{\vec{0}\}$.

2. (α) Θα έχουμε:

$$\langle A, A \rangle = \text{Tr}(A \cdot {}^t A) = \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Tr} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \implies \|A\| = \sqrt{3}$$

$$\langle B, B \rangle = \text{Tr}(B \cdot {}^t B) = \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Tr} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 \implies \|B\| = 2$$

Έστω θ η γωνία των διανυσμάτων A, B . Τότε:

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \|A\| \cdot \|B\| \cdot \cos(\theta) \implies \text{Tr}(A \cdot {}^t B) = \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos(\theta) \implies \\ \implies \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) &= 2\sqrt{3} \cdot \cos(\theta) \implies \text{Tr} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2\sqrt{3} \cdot \cos(\theta) \implies \\ \implies -1 &= 2\sqrt{3} \cdot \cos(\theta) \implies \cos(\theta) = -\frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6} \approx -0.288 \end{aligned}$$

Η μοναδική γωνία $\theta \in [0, \pi]$ για την οποία ισχύει ότι $\cos(\theta) = -0,288$ είναι η γωνία 106.73° .

(β) Η ορθογώνια προβολή του διανύσματος A στο διάνυσμα B είναι

$$\Pi_B(A) = \frac{\langle A, B \rangle}{\langle B, B \rangle} B = \frac{-1}{4} B = -\frac{1}{4} B = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

(γ) Θεωρούμε το διάνυσμα

$$A - \Pi_B(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & -3/4 \\ 5/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Τότε

$$\begin{aligned} \langle A - \Pi_B(A), B \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 3/4 & -3/4 \\ 5/4 & 1/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{Tr}((A - \Pi_B(A), B) \cdot {}^t B) = \\ &= \text{Tr} \begin{pmatrix} -6/4 & 0 \\ -1 & 6/4 \end{pmatrix} = 0 \implies (A - \Pi_B(A)) \perp B \end{aligned}$$

Τέλος θα έχουμε

$$\begin{aligned} \|A - \Pi_B(A)\| &= \sqrt{\langle A - \Pi_B(A), A - \Pi_B(A) \rangle} = \sqrt{\text{Tr}((A - \Pi_B(A)) \cdot {}^t(A - \Pi_B(A)))} = \\ &= \sqrt{\text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 3/4 & -3/4 \\ 5/4 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/4 & 5/4 \\ -3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \right)} = \sqrt{\text{Tr} \begin{pmatrix} 9/8 & 3/4 \\ 3/4 & 13/8 \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2} \end{aligned}$$

Τότε ο πίνακας

$$C = \frac{A - \Pi_B(A)}{\|A - \Pi_B(A)\|} = \frac{2}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 3/4 & -3/4 \\ 5/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

είναι μοναδιαίος και είναι κάθετος στον πίνακα B .

(δ) Έστω $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ έτσι ώστε $X \in \mathcal{U}^\perp$. Τότε:

$$\begin{aligned} \langle X, A \rangle = 0 = \langle X, B \rangle &\implies \text{Tr}(X \cdot {}^t A) = 0 = \text{Tr}(X \cdot {}^t B) = 0 \implies \\ \implies \begin{cases} \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \\ \text{και} \\ \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} x_1 - x_2 & x_1 \\ x_3 - x_4 & x_3 \end{pmatrix} \right) = 0 \\ \text{και} \\ \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} -x_1 + x_2 & x_1 + x_2 \\ -x_3 + x_4 & x_3 + x_4 \end{pmatrix} \right) = 0 \end{cases} \implies \\ \implies (\Sigma) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \text{και} \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} & \end{aligned}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η γενική λύση του ομογενούς συστήματος (Σ) είναι της μορφής:

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ -2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \\ -2x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

Επομένως ο υπόχωρος \mathcal{U}^\perp είναι ο εξής:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^\perp &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid x_1 = x_2 - x_3 \text{ και } x_4 = -2x_3 \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_2 - x_3 & x_2 \\ x_3 & -2x_3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_2 & x_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_3 & 0 \\ x_3 & -2x_3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \end{aligned}$$

= ο υπόχωρος του $M_2(\mathbb{R})$ ο οποίος παράγεται από τους πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ και } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ευκολα βλέπουμε ότι οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητοι και άρα αποτελούν μια βάση του \mathcal{U}^\perp . ■